ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

GRAVITATION

Charles W. Misner
University of Maryland

Kip S. Thorne
California Institute
of Technology

John Archibald Wheeler
Princeton University

W. H. Freeman and Company
San Francisco 1973

Ч. МИЗНЕР

К. ТОРН

Дж. УИЛЕР

ГРАВИТАЦИЯ

ТОМ 3

Перевод с английского
А. Г. Полнарева

под редакцией
В. Б. Брагинского и И. Д. Новикова

Издательство «Мир»
Москва 1977

УДК 530.12+523.112

Монография выдающихся американских физиков Ч. Мизнера, К. Торна и Дж. Уилера «Гравитация» представляет собой прекрасное учебное пособие по теории тяготения и обширный обзор проблем гравитационной физики. В книге излагаются новые мощные математические методы исследования и рассматриваются многочисленные приложения теории к различным проблемам астрономии и астрофизики.

В русском переводе книга разделена на три тома. Третий том посвящен физическим явлениям, для которых релятивистские эффекты гравитации играют определяющую роль. Здесь рассматриваются все конкретные физические приложения теории тяготения Эйнштейна (за исключением космологии, включенной в предыдущий том). Важнейшими фактами, предсказываемыми теорией, является существование черных дыр и гравитационных волн. Поиски этих феноменов активно ведутся разными методами в настоящее время. Последние две части этого тома посвящены разбору экспериментальных методов проверки общей теории относительности и анализу возможных ее теоретических обобщений.

В данном томе, так же как и в других томах, текст разделен на два курса, «перемешанных между собой». Эти курсы помечены крупными цифрами 1 и 2 в верхних углах страниц (в оглавлении параграфы курса 1 отмечены жирной чертой слева). В курсе 1 дается систематическое изложение без углубления в детали; в курсе 2 подробно рассматриваются некоторые специальные вопросы.

Книга рассчитана как на специалистов, так и на студентов и аспирантов, интересующихся этой быстро развивающейся областью науки.

Редакция литературы по физике

М $\frac{20401\text{-}051}{041(01)\text{-}77}$ 51—77

© 1973 by W. H. Freeman and Company
© Перевод на русский язык «Мир», 1977

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть VII. Гравитационный коллапс и черные дыры

Глава 31. Геометрия Шварцшильда 13

§ 31.1. Неизбежность коллапса для сверхмассивных звезд 13
§ 31.2. Отсутствие сингулярности на гравитационном радиусе 14
Дополнение 31.1. «Шварцшильдовская сингулярность»: историческая справка 18
§ 31.3. Поведение шварцшильдовских координат при $r = 2M$ 18
§ 31.4. Некоторые системы координат, не имеющие особенности 22
Дополнение 31.2. Обоснование координат Крускала — Шекереса 24
§ 31.5. Соотношение между координатами Крускала — Шекереса и шварцшильдовскими координатами 29
§ 31.6. Динамика геометрии Шварцшильда 34

Глава 32. Гравитационный коллапс 41

§ 32.1. Почему важна геометрия Шварцшильда 41
§ 32.2. Теорема Биркгофа 42
§ 32.3. Внешняя геометрия коллапсирующей звезды 46
§ 32.4. Коллапс звезды с однородной плотностью и равным нулю давлением 52
Дополнение 32.1. Идеализированная коллапсирующая звезда с фридмановской внутренней и шварцшильдовской внешней областями 55
§ 32.5. Сферически симметричный коллапс в присутствии внутренних сил давления 58
§ 32.6. Судьба человека, падающего в сингулярность $r = 0$ 63
§ 32.7. Общий обзор проблемы реального гравитационного коллапса 66
Дополнение 32.2. Коллапс с малыми несферическими возмущениями 72
Дополнение 32.3. Одномерный и двумерный коллапс 76

Глава 33. Черные дыры 78

§ 33.1. Почему «черная дыра»? 78

§ 33.2. Гравитационное и электромагнитное поля черной дыры 82
Дополнение 33.1. У черной дыры нет «волос» 84
Дополнение 33.2. Геометрия Керра — Ньюмана и электромагнитное поле 86
Дополнение 33.3. Астрофизика черных дыр 92
Дополнение 33.4. Законы динамики черных дыр 97

§ 33.3. Масса, момент импульса, заряд и магнитный момент 100

§ 33.4. Симметрии и увлечение систем отсчета 101

§ 33.5. Уравнения движения для пробных частиц 107

§ 33.6. Главные нулевые конгруэнции 112

§ 33.7. Энергия, заключенная в черных дырах, и извлечение энергии из черных дыр 115

§ 33.8. Обратимые и необратимые превращения 120
Дополнение 33.5. Орбиты пробных частиц в «экваториальной плоскости» черной дыры Керра — Ньюмана 126

Глава 34. Глобальные методы, горизонты и теоремы о сингулярностях 128

§ 34.1. Сопоставление глобальных и локальных методов 128

§ 34.2. «Бесконечность» в асимптотически плоских пространствах-временах 129

§ 34.3. Причинность и горизонты 135

§ 34.4. Глобальная структура горизонтов 139
Дополнение 34.1. Горизонты генерируются нулевыми геодезическими, не имеющими конца 140

§ 34.5. Доказательство второго закона динамики черных дыр 146

§ 34.6. Теоремы о сингулярностях и «проблема конечного состояния» 149
Дополнение 34.2. Роджер Пенроуз 154
Дополнение 34.3. Стивен В. Хоукинг 156

Часть VIII. Гравитационные волны

Глава 35. Распространение гравитационных волн 161

§ 35.1. Две точки зрения 161

§ 35.2. Обзор «линеаризованной теории» в вакууме 163

§ 35.3. Решения для плоских волн в линеаризованной теории 164

§ 35.4. Поперечная калибровка со следом, равным нулю (ТТ-калибровка) 165
Дополнение 35.1. Методы вычисления «поперечной бесследовой части» поля волны 169

§ 35.5. Отклонение геодезических в линеаризованной гравитационной волне 170

§ 35.6. Поляризация плоской волны 172

§ 35.7. Энергия-импульс, переносимый гравитационной волной 177

§ 35.8. Гравитационные волны в неупрощенной общей теории относительности 178

§ 35.9. Точное решение для плоской волны 180

§ 35.10. Физические свойства точной плоской волны 183

§ 35.11. Сравнение точной электромагнитной плоской волны с гравитационной плоской волной 184

§ 35.12. Новая точка зрения на точную плоскую волну 185
§ 35.13. Коротковолновое приближение 187
§ 35.14. Влияние фоновой кривизны на распространение волн 191
§ 35.15. Тензор энергии-импульса для гравитационных волн 193

Глава 36. Генерация гравитационных волн 200

§ 36.1. Квадрупольная природа гравитационных волн 200
§ 36.2. Мощность излучения, выраженная через внутренний поток мощности 205
§ 36.3. Лабораторные генераторы гравитационных волн 206
§ 36.4. Астрофизические источники гравитационных волн: общие соображения 207
§ 36.5. Гравитационный коллапс, черные дыры, сверхновые и пульсары как источники гравитационного излучения 208
Дополнение 36.1. Гравитационные волны от пульсирующих нейтронных звезд 213
Дополнение 36.2. Анализ всплесков излучения от импульсных источников 214
§ 36.6. Двойные звезды как источники гравитационного излучения 216
§ 36.7. Формулы для излучения почти ньютоновских, медленно движущихся источников 217
Дополнение 36.3. Гравитационное излучение от нескольких двойных звездных систем 218
§ 36.8. Реакция излучения в медленно движущихся источниках 222
§ 36.9. Принципы, лежащие в основе вывода формул для излучения 224
§ 36.10. Расчет поля излучения в приближении медленного движения 226
§ 36.11. Вывод потенциала реакции излучения 231

Глава 37. Детектирование гравитационных волн 235

§ 37.1. Системы координат и падающие волны 235
§ 37.2. Ускорения в механических детекторах 238
Дополнение 37.1. Вывод уравнений движения для механического детектора 241
Дополнение 37.2. Силовые линии для ускорений, вызванных гравитационными волнами 243
§ 37.3. Типы механических детекторов 244
§ 37.4. Колебательные механические детекторы: вводные замечания 253
Дополнение 37.3. Как используется поперечное сечение в радиационно доминированных детекторах 255
§ 37.5. Идеализированный радиационно доминированный детектор, возбуждаемый стационарным потоком монохроматических гравитационных волн 257
§ 37.6. Идеализированный радиационно доминированный детектор, возбуждаемый произвольным потоком излучения 261
§ 37.7. Радиационно доминированный детектор общего типа, возбуждаемый произвольным потоком излучения 265
Дополнение 37.4. Колебательные резонансные детекторы произвольной формы 271

§ 37.8. Шумовые детекторы 274
Дополнение 37.5. Детектируемость всплесков гравитационных волн, приходящих от астрофизических источников: два примера 279
§ 37.9. Немеханические детекторы 280
Дополнение 37.6. Немеханический детектор гравитационных волн 281
§ 37.10. Заглядывая в будущее! 283

Часть IX. Экспериментальная проверка общей теории относительности

Глава 38. Проверка основ теории относительности 287

§ 38.1. Проверку в Солнечной системе проводить легче, чем в удаленном космосе 287
Дополнение 38.1. Сопоставление техники 70-х годов с релятивистскими явлениями 288
§ 38.2. Теоретические системы для анализа тестов ОТО 289
§ 38.3. Проверки принципа универсальности свободного падения: эксперимент Этвеша — Дикке 290
Дополнение 38.2. Барон Лоранд фон Этвеш 292
Дополнение 38.3. Роберт Генри Дикке 293
§ 38.4. Проверки существования метрики, определяющей измерения длины и времени, а также кинематику частиц 295
§ 38.5. Проверки движения по геодезическим: эксперименты по гравитационному красному смещению 297
§ 38.6. Проверки принципа эквивалентности 302
§ 38.7. Проверки существования неизвестных полей, медленно убывающих с расстоянием 306

Глава 39. Другие теории гравитации и постньютоновское приближение 309

§ 39.1. Другие теории 309
§ 39.2. Метрические теории гравитации 311
§ 39.3. Постньютоновский предел и ППН-формализм 312
Дополнение 39.1. Теория Дикке — Бранса — Йордана и теория Ни 315
Дополнение 39.2. Качественное описание десяти ППН-параметров 317
§ 39.4. ППН-система координат 318
§ 39.5. Описание вещества в Солнечной системе 319
§ 39.6. Сущность постньютоновского разложения 320
Дополнение 39.3. Постньютоновское разложение метрических коэффициентов 322
§ 39.7. Ньютоновское приближение 323
§ 39.8. ППН-метрические коэффициенты 326
§ 39.9. Скорость ППН-координат относительно «универсальной системы покоя» 330
§ 39.10. ППН-тензор энергии-импульса 333
§ 39.11. ППН-уравнения движения 335
§ 39.12. Связь ППН-координат с окружающей Вселенной 338
§ 39.13. Обзор ППН-формализма 339

Дополнение 39.4. Обзор ППН-формализма 341
Дополнение 39.5. ППН-параметры, используемые в литературе: руководство для перевода 343

Глава 40. Эксперименты в Солнечной системе 344

§ 40.1. Различные эксперименты, цель которых — отличить общую теорию относительности от других выдвигаемых метрических теорий гравитации 344
§ 40.2. Использование лучей света и радиоволн для экспериментального исследования гравитации 348
§ 40.3. Отклонение «света» 350
Дополнение 40.1. Отклонение света и радиоволн Солнцем: экспериментальные результаты 353
§ 40.4. Временная задержка радиолокационных сигналов 355
Дополнение 40.2. Временная задержка радиолокационного сигнала в Солнечной системе: экспериментальные результаты 359
§ 40.5. Смещение перигелия и периодические возмущения геодезических орбит 361
Дополнение 40.3. Смещения перигелия: экспериментальные результаты 367
§ 40.6. Эффекты трех тел для орбиты Луны 369
§ 40.7. Увлечение инерциальных систем отсчета 370
§ 40.8. Постоянна ли гравитационная постоянная? 375
§ 40.9. Движутся ли планеты и Солнце по геодезическим? 382
§ 40.10. Краткое резюме по экспериментальным проверкам общей теории относительности 387
Дополнение 40.4. Перечень экспериментов 387

Часть X. Границы

Глава 41. Спиноры 391

§ 41.1. Отражения, вращения и сложение вращений 391
§ 41.2. Инфинитезимальные вращения 397
§ 41.3. Преобразование Лоренца на языке алгебры спиноров 399
§ 41.4. Прецессия Томаса на языке алгебры спиноров 403
§ 41.5. Спиноры 405
§ 41.6. Соответствие между векторами и спинорами 408
§ 41.7. Алгебра спиноров 410
Дополнение 41.1. Спинорное представление некоторых простых тензоров в контексте локально лоренцевой системы отсчета 412
§ 41.8. Спиновое пространство и его базисные спиноры 414
§ 41.9. Спинор, рассматриваемый как флагшток плюс флаг плюс отношение ориентация — запутанность 415
§ 41.10. Вид ночного неба: применение спиноров 419
§ 41.11. Спиноры как мощный аппарат в теории гравитации 423

Глава 42. Исчисление Редже 426

§ 42.1. Зачем нужно исчисление Редже? 426
§ 42.2. Краткое описание исчисления Редже 427

§ 42.3. Симплексы и недостающие углы 428
Дополнение 42.1. Узлы, где кривизна сконцентрирована в «подвижных углах» между строительными блоками в скелетном многообразии 431
Дополнение 42.2. Схема для исчисления Редже 431
§ 42.4. Уравнения поля в скелетной форме 433
§ 42.5. Выбор структуры решетки 434
Дополнение 42.3. Синтез скелетных геометрий из скелетных геометрий более низкой размерности 438
§ 42.6. Выбор длин ребер 439
§ 42.7. Применения исчисления Редже в прошлом 441
§ 42.8. Будущее исчисления Редже 442

Глава 43. Суперпространство: арена для динамики геометрии 443
§ 43.1. Различие между пространством, суперпространством и пространством-временем 443
Дополнение 43.1. Сравнение геометродинамики и динамики частицы 447
§ 43.2. Динамика геометрии, описанная на языке суперпространства геометрий $^{(3)}\mathcal{G}$ 447
§ 43.3. Уравнение Эйнштейна — Гамильтона — Якоби 450
§ 43.4. Флуктуации геометрии 455

Глава 44. За границей времени 462
§ 44.1. Гравитационный коллапс как величайший кризис в истории физики 462
Дополнение 44.1. Сравнение и противопоставление коллапса Вселенной, предсказываемого классической теорией, и классически предсказанного коллапса атома 464
§ 44.2. Оценка теории, предсказывающей коллапс 465
Дополнение 44.2. Три уровня гравитационного коллапса: 1) Вселенная, 2) черная дыра, 3) флуктуация порядка планковской длины 468
§ 44.3. Вакуумные флуктуации: их преобладание и конечное доминирование 469
Дополнение 44.3. Трудности, связанные с попытками найти естественное место для частиц спина 1/2 в классической эйнштейновской геометродинамике 471
Дополнение 44.4. «Кучка пыли» — ранняя попытка сформулировать концепцию предгеометрии 473
§ 44.4. Предгеометрия, а не геометрия — магический строительный материал 474
§ 44.5. Предгеометрия как исчисление высказываний 477
Дополнение 44.5. Предгеометрия как исчисление высказываний 480
§ 44.6. Черный ящик: воспроизводство Вселенной 481

Литература 489

Предметный указатель 505

ЧАСТЬ VII

ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС И ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

В которой читатель переносится в страну черных дыр и сталкивается с колониями пределов статичности, эргосфер и горизонтов, под покровами которых скрываются зияющие, свирепые сингулярности.

31. ГЕОМЕТРИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

Эта глава, посвященная шварцшильдовской геометрии, необходима как подготовительный материал для изучения гравитационного коллапса (следующая глава) и черных дыр (гл. 33).

§ 31.1. НЕИЗБЕЖНОСТЬ КОЛЛАПСА ДЛЯ СВЕРХМАССИВНЫХ ЗВЕЗД

Если число барионов в звезде превосходит приблизительно в два или более раз число барионов в Солнце ($A > A_{\text{макс}} \sim 2A_{\odot}$), *то в самом конце термоядерной эволюции для такой звезды не существует равновесного состояния.* Это один из самых поразительных и волнующих выводов из того, что обсуждалось в гл. 24. Другими словами, прежде, чем звезда с $A > A_{\text{макс}} \sim 2A_{\odot}$ придет в конечное состояние покоя, она должна выбросить, например путем взрывов новой или сверхновой, столько барионов, чтобы оставшееся их число не превышало $A_{\text{макс}}$; в противном случае конечного состояния покоя, в которое могла бы прийти звезда, не существует.

Какова же судьба звезды, которой не удалось выбросить избыток барионов до того, как подойдет к концу термоядерная эволюция? Что случится, например, после взрыва очень массивной сверхновой со сколлапсировавшим ядром, состоящим из вырожденных нейтронов, если оно содержит больше чем $A_{\text{макс}}$ барионов? Такая сверхкритическая масса не может взорваться, поскольку является гравитационно связанной, и в ней исчерпана термоядерная энергия, которая могла бы высвободиться. Не может она достичь и статического равновесного состояния, поскольку для таких больших масс подобного состояния не существует. Остается только одна возможность: сверхкритическая масса должна, катастрофически сжимаясь, уйти под свой «гравитационный радиус» $r = 2M$, оставив после себя в пространстве гравитирующую «черную дыру».

Явление коллапса под гравитационный радиус, как оно описывается в классической общей теории относительности, рассматривается в следующей главе. Однако, прежде чем заняться этим вопросом, необходимо составить себе более полное, чем в предшествующих главах, представление о шварцшильдовской геометрии пространства-времени вокруг черных дыр, а также вокруг коллапсирующих и статических звезд.

В этой главе затрагиваются два на первый взгляд не связанные между собой вопроса: падение пробной частицы в уже имеющейся геометрии Шварцшильда, которая рассматривается как статическая, но которую можно также представлять себе как оставшуюся от звезды, претерпевшей коллапс некоторое время тому назад, и вопрос о физическом характере шварцшильдовской геометрии как таковой. Метод пробных частиц является самым эффективным методом исследования этой геометрии. Но на пробную частицу можно взглянуть и с иной точки зрения. Ее можно представить себе как частичку вещества, оставшуюся в процессе быстрого сжатия звезды от основной ее массы. При таком подходе пробная частица представляет собой простейшую иллюстрацию асимметрии в распределении вещества коллапсирующей звезды. Поэтому то обстоятельство, что асимметрия в этом случае сглаживается, позволяет качественно понять, каким образом сглаживаются более сложные типы асимметрии. Короче говоря, две такие, казалось бы, разные проблемы, как движение пробной частицы и динамика шварцшильдовской геометрии (а в дальнейшем станет ясно, что эта геометрия носит динамический характер), удивительным образом способны пролить свет одна на другую.

§ 31.2. ОТСУТСТВИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ НА ГРАВИТАЦИОННОМ РАДИУСЕ

Может показаться, что шварцшильдовская геометрия пространства-времени

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \quad (31.1)$$

При радиусе $r = 2M$ («гравитационном радиусе») шварцшильдовский линейный элемент становится сингулярным

обладает сингулярностью вблизи $r = 2M$, где g_{tt} обращается в нуль, а g_{rr} — в бесконечность. Однако без тщательного анализа нельзя с уверенностью сказать, является ли эта сингулярность линейного элемента следствием сингулярности самой геометрии пространства-времени или же она вызвана всего лишь сингулярностью системы координат (t, r, θ, ϕ) вблизи $r = 2M$. [В качестве примера такой сингулярности системы координат рассмотрим окрестность точки $\theta = 0$ на одной из инвариантных сфер $t = \text{const}$ и $r = \text{const}$. Здесь $g_{\phi\phi}$ обращается в нуль из-за того, что система координат обладает сингулярностью, в то время как поведение,

присущее сфере, не зависящей от выбора системы координат геометрии, в этом месте вполне нормально. Другой пример см. на фиг. 1.4 (т. 1).]

Область шварцшильдовской геометрии, где возникают указанные затруднения, $r = 2M$, называется «гравитационным радиусом», «шварцшильдовским радиусом», «поверхностью Шварцшильда», «горизонтом Шварцшильда», или, наконец, «сферой Шварцшильда». В некоторых более ранних работах эту область называют также «шварцшильдовской сингулярностью»; но такое название нельзя считать правильным, поскольку, как будет показано ниже, геометрия пространства-времени в этой области не имеет сингулярности.

Чтобы определить, является ли геометрия пространства-времени сингулярной на гравитационном радиусе, пошлем туда воображаемого первоначально удаленного наблюдателя, который должен составить описание локальных свойств этой геометрии. Для простоты пусть он находится в состоянии свободного радиального падения по направлению к гравитационному радиусу; при этом с ним постоянно связана сопутствующая ему ортогональная тетрада. Его траектория в пространстве-времени [«параболическая орбита», радиальная геодезическая в метрике (31.1)] задается следующими уравнениями:

$$\frac{\tau}{2M} = -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} + \text{const},$$
$$\frac{t}{2M} = -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + \ln\left|\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}\right| + \text{const}. \tag{31.2}$$

[См. § 25.5 и особенно вывод и обсуждение уравнения (25.38).] Решая первое уравнение относительно r, получаем зависимость координаты r наблюдателя от собственного времени, измеряемого по часам наблюдателя, $r(\tau)$. Решая второе уравнение относительно r, получаем зависимость координаты r от координатного времени $r(t)$.

Падающий наблюдатель достигает $r = 2M$ за конечное собственное время, но за бесконечное координатное время

Из всех особенностей траектории наблюдателя выделяется одна: чтобы достичь гравитационного радиуса $r = 2M$, требуется конечный промежуток собственного времени, но бесконечный промежуток координатного времени:

$$\begin{aligned} r/2M &= 1 - (\tau + \text{const})/2M \quad &&\text{вблизи } r = 2M, \\ r/2M &= 1 + \text{const}\cdot\exp(-t/2M) \quad &&\text{в пределе } t \to \infty \end{aligned} \tag{31.3}$$

[см. фиг. 25.5]. Наблюдатель живет, конечно, по собственному времени, именно этим временем определяется его пульс. Никакая система координат не может воспрепятствовать ему достичь $r = 2M$. Только геометрия пространства-времени, которая не зависит от выбора системы координат, способна была бы помешать этому, но, как видно из уравнений (31.3), не мешает!

Допустим, что наблюдатель достиг $r = 2M$. Какая геометрия пространства-времени предстанет перед ним в этом месте? Сингулярная или несингулярная? Другими словами, что́ измерит наблюдатель — бесконечно большие приливные силы, которые разорвут и сдавят его, когда он достигнет $r = 2M$, или же он почувствует лишь конечные приливные воздействия, которые его тело в принципе может выдержать?

Приливные силы, которые испытывает наблюдатель при прохождении данного радиуса r, определяются компонентами тензора кривизны Римана, отнесенными к ортогональной сопутствующей системе отсчета в этом месте (уравнение отклонения геодезических). Проведем вычисление этих компонент кривизны в два этапа.

1. Вычислим компоненты тензора Римана, но не в системе отсчета наблюдателя, а в «статической» ортогональной системе отсчета

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\mathbf{d}t, & \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} &= \frac{\mathbf{d}r}{(1-2M/r)^{1/2}}, \\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} &= r\,\mathbf{d}\theta, & \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} &= r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi, \end{aligned} \tag{31.4а}$$

локализованной в том пространственно-временном событии, через которое проходит наблюдатель; результат [который получается из уравнений (14.50) и (14.51), если положить $e^{2\Phi} = e^{-2\Lambda} = 1 - 2M/r$] имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= \frac{-2M}{r^3}, & R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} &= R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}, \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{2M}{r^3}, & R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{-M}{r^3}; \end{aligned} \tag{31.4б}$$

все другие компоненты $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ обращаются в нуль, за исключением тех компонент, которые могут быть получены из приведенных выше с помощью свойств симметрии $\mathbf{R}$.

2. Вычислим компоненты в системе отсчета наблюдателя, применяя к компонентам в «статической системе отсчета» (31.4б) подходящее преобразование. Для $r > 2M$ таким преобразованием служит лоренцевский буст [1]) в направлении $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ с трехмерной скоростью $v^{\hat{r}}$; при $r < 2M$ буст не существует, но преобразование дается стандартным выражением для буста (дополнение 2.4), где $v^{\hat{r}} > 1$. Здесь

$$v^{\hat{r}} = \frac{(g_{rr})^{1/2}\,dr}{(-g_{tt})^{1/2}\,dt} = \frac{dr/dt}{1-2M/r} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \tag{31.5}$$

Поразительный результат (являющийся следствием специальных алгебраических свойств геометрии Шварцшильда и в чем-то схожий с тем, что происходит или, лучше сказать, не происходит

[1]) См. примечание в т. 1, стр. 106.— *Прим. перев.*

с компонентами электромагнитного поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, когда они одновременно параллельны бусту) состоит в следующем: все компоненты $\mathbf{R}$ при действии на них буста остаются неизменными. Если $\mathbf{e}_{\hat{\rho}}$ — радиальный базисный вектор наблюдателя, а $\mathbf{e}_{\hat{\tau}} = \mathbf{u}$ — его временной базисный вектор, то

$$R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} = -2M/r^3, \quad R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} = R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = M/r^3,$$
$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = 2M/r^3, \quad R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} = R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -M/r^3 \qquad (31.6)$$

(см. упражнение 31.1).

На радиусе $r = 2M$ падающий наблюдатель не испытывает бесконечных приливных сил

Из этого вычисления следует, что, согласно выражениям (31.6), ни одна из компонент $\mathbf{R}$ в ортогональной системе отсчета наблюдателя не обращается на гравитационном радиусе в бесконечность. Приливные силы, которые испытывает путешественник по мере приближения к $r = 2M$, остаются конечными; они не разорвут путешественника на части — по крайней мере в том случае, когда масса M достаточно велика, поскольку при $r = 2M$ типичная ненулевая компонента $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ тензора кривизны имеет величину порядка $1/M^2$. Гравитационный радиус является областью пространства-времени с вполне нормальным поведением, не обладающей сингулярностью, и ничто не может в этой области помешать наблюдателю падать далее внутрь.

Таким образом, при $r = 2M$ геометрия пространства-времени имеет нормальное поведение, а система координат в этом месте сингулярна

Но глубоко внутри, под гравитационным радиусом, наблюдатель встретит бесконечные приливные силы, причем это произойдет независимо от пути, по которому он туда попал. В этом смысле говорят, что «$r = 0$ является физической сингулярностью пространства-времени». Чтобы убедиться в этом, необходимо вычислить, пользуясь (31.4б) и (31.6), «инвариант кривизны»

$$I \equiv R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = 48M^2/r^6. \qquad (31.7)$$

При $r = 0$ кривизна бесконечна

В любой локально лоренцевой системе отсчета этот инвариант является суммой произведений компонент тензора кривизны и имеет одно и то же значение $48M^2/r^6$. Таким образом, в любой локально лоренцевой системе отсчета, включая систему отсчета наблюдателя, $\mathbf{R}$ имеет одну или несколько компонент, которые обращаются в бесконечность при $r \to 0$; это и означает, что приливные силы становятся бесконечными.

31.1. Приливные силы, действующие на свободно падающего наблюдателя УПРАЖНЕНИЕ

а. Проведите во всех деталях вывод компонент тензора Римана (31.6).

б. Дайте грубую оценку критической массы $M_{\text{кр}}$, такой, что при $M_{\text{кр}}$ тело наблюдателя (человеческое тело, состоящее из обыкновенных костей и обыкновенной плоти) может выдержать при-

УПРАЖНЕНИЕ

ливные силы при $r = 2M$, но при $M < M_{кр}$ эти силы искалечат его. (Ответ: $M_{кр} \sim 1000\, M_\odot$. Очевидно, что при $M \sim M_\odot$ физику следует превратиться в муравья, прежде чем ринуться навстречу опасности. Подробности см. в § 32.6.)

Дополнение 31.1. «ШВАРЦШИЛЬДОВСКАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ»: ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Эддингтон [37] впервые построил систему координат, свободную от сингулярности при $r = 2M$, однако он не вполне осознал значение своего результата. Леметр (см. [38], особенно стр. 82), по-видимому, первый понял, что так называемая «шварцшильдовская сингулярность» при $r = 2M$ вовсе не является сингулярностью. Он писал: « La singularité du champ de Schwarzschild est donc une singularité fictive, analogue á celle qui se présentait a l'horizon du centre dans la forme originale de l'univers de de Sitter » [1]). Он тоже построил систему координат, охватывающую горизонт $r = 2M$. Тем не менее его система координат, подобно системе Эддингтона, охватывала лишь половину геометрии Шварцшильда (области I и II на фиг. 31.3). Синг [39] впервые открыл неполноту систем координат Эддингтона и Леметра и построил новую систему координат, которая охватывает всю геометрию (области I, II, III, IV на фиг. 31.3). Фронсдал [40], не знавший о работе Синга, заново открыл глобальную структуру геометрии Шварцшильда с помощью диаграмм погружения и вычислений. Система координат, которая наиболее полно охватывает геометрию Шварцшильда, известна как система координат Крускала — Шекереса. Крускал [41] и Шекерес [42] построили ее независимо друг от друга.

§ 31.3. ПОВЕДЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДОВСКИХ КООРДИНАТ ПРИ $r = 2M$

Сущность сингулярности координат при $r = 2M$

Поскольку поведение геометрии пространства-времени на гравитационном радиусе вполне нормально, сингулярный характер шварцшильдовских метрических компонент $g_{tt} = -(1 - 2M/r)$ и $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1}$ должен быть обусловлен сингулярностью шварцшильдовских координат t, r, θ, ϕ. Необходимо каким-то образом найти способ избавиться от этой сингулярности, т. е. надо построить новую систему координат, в которой сингулярность отсутствует. Прежде чем заниматься этим, полезно получше разобраться, в чем именно заключается сущность этой сингулярности.

---

[1]) «Сингулярность в поле Шварцшильда является такой же фиктивной сингулярностью, как и сингулярность, представленная горизонтом вокруг центра вселенной де Ситтера в ее первоначальной форме» (*франц.*).— *Прим. перев.*

Наиболее очевидным образом сингулярность при $r = 2M$ проявляется в том, что временная t и пространственная r координаты меняются в этом месте ролями [1]). В области $r > 2M$ направление t, т. е. $\partial/\partial t$, является времениподобным ($g_{tt} < 0$), а направление r, т. е. $\partial/\partial r$,— пространственноподобным ($g_{rr} > 0$); но при $r < 2M$ $\partial/\partial t$ пространственноподобно ($g_{tt} > 0$), а $\partial/\partial r$ времениподобно ($g_{rr} < 0$).

1) t и r меняются ролями как времениподобная и пространственноподобная координаты

Что следует понимать под тем обстоятельством, что координата r, выступавшая в качестве пространственноподобной координаты, становится времениподобной? Воображаемый наблюдатель, который перемещается в космическом корабле с ракетными двигателями, но не достиг еще $r = 2M$, всегда имеет возможность включить двигатели и направить свое движение, которое до этого проходило с уменьшением r (падение), в сторону увеличения r (преодоление сил притяжения). Но если он попал внутрь сферы $r = 2M$, то ситуация в корне меняется. В этом случае дальнейшее уменьшение r играет роль течения времени. Среди тех команд, которые путешественник может дать своим ракетным двигателям, нет такой, которая могла бы повернуть время вспять. Та же незримая повсюду действующая сила, которая независимо от нашей воли влечет каждого из нас от возраста двадцать лет к сорока годам и от сорока лет к восьмидесяти, тянет ракету внутрь от временной координаты $r = 2M$ к более позднему значению временной координаты $r = 0$. Никакой акт человеческой воли, никакой двигатель, никакая ракета, никакая сила (см. упражнение 31.3) не могут заставить время остановиться. Как несомненно то, что живые клетки умирают, а часы путешественника отстукивают «безвозвратно уходящие минуты», так же несомненно и то, что r неуклонно уменьшается от $2M$ до нуля.

При $r = 2M$, где r и t меняются ролями как пространственная и временна́я координаты, g_{tt} стремится к нулю, в то время как g_{rr} обращается в бесконечность. Обращение g_{tt} в нуль предполагает, что *поверхность* $r = 2M$, *которая может сначала показаться трехмерной в шварцшильдовской системе координат* ($-\infty < t < +\infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$), *имеет объем, равный нулю, и, следовательно, на самом деле является всего лишь двумерной или, иначе говоря, нулевой поверхностью*; таким образом,

2) область $r = 2M$, $-\infty < t < +\infty$, является двумерной, а не трехмерной

$$\int\limits_{r=2M} |g_{tt}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2}\, dt\, d\theta\, d\phi = 0,$$
$$\int\limits_{(r=2M,\ t=\text{const})} |g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2}\, d\theta\, d\phi = 4\pi(2M)^2. \tag{31.8}$$

Расходимость g_{rr} при $r = 2M$ не означает, что $r = 2M$ находится бесконечно далеко от других областей пространства-времени.

[1]) Система отсчета, в которой в выражении (31.1) координата r рассматривается как временная, а t — как пространственная при $r < 2M$, исследуется в работе [491].— *Прим. ред.*

Напротив, собственное расстояние от $r = 2M$ до точки с произвольным r дается формулой

$$\int_{2M}^{r} |g_{rr}|^{1/2}\, dr = \begin{cases} [r\,(r-2M)]^{1/2} + 2M \ln |(r/2M-1)^{1/2} + (r/2M)^{1/2}| \\ \qquad\qquad \text{при } r > 2M, \\ -2M \operatorname{arc\,ctg} [r^{1/2}/(2M-r)^{1/2}] - [r\,(2M-r)]^{1/2} \\ \qquad\qquad \text{при } r < 2M; \end{cases} \tag{31.9}$$

это расстояние конечно для любых $0 < r < \infty$.

Как именно область $r < 2M$ физически связана с областью $r > 2M$, можно установить, изучив радиальные геодезические в шварцшильдовской метрике. Для конкретности сосредоточим внимание на траектории пробной частицы, которая выбрасывается из сингулярности при $r = 0$, летит по радиусу наружу, пересекая $r = 2M$, достигает максимального радиуса $r_{\text{макс}}$ («наивысшая точка орбиты») в момент собственного времени $\tau = 0$ и координатного времени $t = 0$, а затем падает вниз к $r = 0$, снова пересекая $r = 2M$. Решение уравнения для такой геодезической орбиты получено в § 25.5 и приведено на фиг. 25.3. Решение имеет «форму циклоиды» (с параметром η, пробегающим интервал значений от $-\pi$ до $+\pi$):

$$r = \frac{1}{2} r_{\text{макс}} (1 + \cos\eta), \tag{31.10а}$$

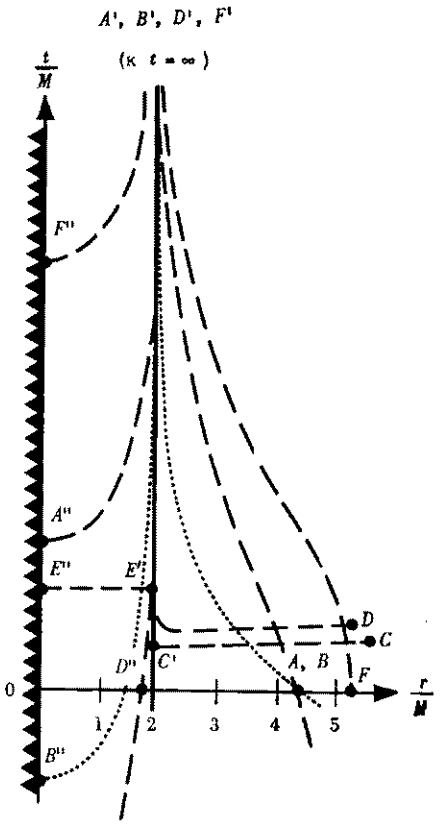
$$\tau = (r_{\text{макс}}^3/8M)^{1/2} (\eta + \sin\eta), \tag{31.10б}$$

$$t = 2M \ln \left| \frac{(r_{\text{макс}}/2M-1)^{1/2} + \operatorname{tg}(\eta/2)}{(r_{\text{макс}}/2M-1)^{1/2} - \operatorname{tg}(\eta/2)} \right| + 2M \left(\frac{r_{\text{макс}}}{2M} - 1\right)^{1/2} \left[\eta + \left(\frac{r_{\text{макс}}}{4M}\right)(\eta + \sin\eta)\right]. \tag{31.10в}$$

На фиг. 31.1 эта орбита нанесена на плоскость координат r, t (кривая F — F' — F''); кроме того, приведены некоторые другие типы радиальных геодезических.

3) радиальные геодезические показывают, что области $r = 2M$, $t = \pm\infty$, являются «конечными» частями пространства-времени

Согласно фиг. 31.1 и соответствующим вычислениям, любая радиальная геодезическая, за исключением «множества геодезических меры нуль», пересекает гравитационный радиус при $t = +\infty$ (или при $t = -\infty$, или же и при том и при другом значении t) (упражнения для студентов! См. гл. 25). Таким образом, можно подозревать, что все физические явления, происходящие на гравитационном радиусе, относятся к $t = \pm\infty$ по причине несколько неудачного выбора шварцшильдовских координат. Возникает надежда, что более удачно выбранная система координат охватит и эти две «точки на бесконечности», развернув каждую из них в линию на новой плоскости ($r_{\text{нов}}$, $t_{\text{нов}}$), и что эта новая система координат сожмет «линию» ($r = 2M$, t от $-\infty$ до $+\infty$)



ФИГ. 31.1.
Типичные радиальные геодезические геометрии Шварцшильда, изображенные (схематически) в шварцшильдовских координатах. $FF'F''$ [см. (31.10)]— времениподобная геодезическая пробной частицы, которая начинает свое движение из состояния покоя при $r = 5{,}2M$ и падает прямо внутрь, достигая за конечное собственное время сингулярности $r = 0$ (кривая с зубцами). Неудачный характер шварцшильдовских координат проявляет себя двояко: 1) в том, что на некоторой части пути пробной частицы t уходит в бесконечность, и 2) в том, что после этого t уменьшается, в то время как τ (не показано) продолжает расти. Поведение той же траектории до $t = 0$ можно получить путем отражения всей фигуры относительно горизонтальной оси («инверсия времени»). Образ точки F'', полученный при обращении времени, обозначает выброс пробной частицы из сингулярности. $AA'A''$ — времениподобная геодезическая, которая начинается в $r = +\infty$ и направлена внутрь. $BB'B''$ — нулевая геодезическая, по которой движется фотон, падающий прямо внутрь (нет наивысшей точки; никогда не достигается состояние покоя!). $DD'D''$ — пространственноподобная радиальная геодезическая. То же относится к CC', в то время как $E'E''$—времениподобна. Ни одна из этих двух последних геодезических никогда не пересечет $r = 2M$. (Все вопросы по поводу этих геодезических, оставленные пока без ответа, разрешатся сами собой на фиг. 31.4, где те же мировые линии нанесены на диаграмму Крускала — Шекереса.)

Геодезическая $F''_{\text{инв}}F'_{\text{инв}}FF'F''$, описываемая уравнениями (31.10), начинается с выброса частицы из

$$r=0 \quad \text{при} \quad t=-2\pi M\left(\frac{r_{\text{макс}}}{2M}-1\right)^{1/2}\left(\frac{r_{\text{макс}}}{4M}+1\right), \quad \tau=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{r_{\text{макс}}^3}{2M}\right)^{1/2};$$

затем она распространяется наружу с ростом собственного времени τ, но с уменьшением координатного времени t до тех пор, пока не достигнет гравитационного радиуса

$$r=2M \quad \text{при} \quad t=-\infty, \quad \tau=-\left(\frac{r_{\text{макс}}^3}{8M}\right)^{1/2}\arccos\left(\frac{4M}{r_{\text{макс}}}-1\right)-r_{\text{макс}}\left(1-\frac{2M}{r_{\text{макс}}}\right)^{1/2}.$$

После этого она продолжает двигаться наружу, но координатное время теперь растет от $t = -\infty$ до того значения времени, когда геодезическая достигает максимального радиуса $r = r_{\text{макс}}$ при $t = 0$, $\tau = 0$ (событие F на фигуре); затем происходит падение внутрь, причем t продолжает расти до тех пор, пока геодезическая вновь не пересечет гравитационный радиус

$$r=2M \quad \text{при} \quad t=+\infty, \quad \tau=+\left(\frac{r_{\text{макс}}^3}{8M}\right)^{1/2}\arccos\left(\frac{4M}{r_{\text{макс}}}-1\right)+r_{\text{макс}}\left(1-\frac{2M}{r_{\text{макс}}}\right)^{1/2}$$

(событие F' на фигуре); и, наконец, с уменьшением t (но, конечно, по-прежнему с ростом τ) геодезическая падает внутрь до

$$r=0 \quad \text{при} \quad t=+2\pi M\left(\frac{r_{\text{макс}}}{2M}-1\right)^{1/2}\left(\frac{r_{\text{макс}}}{4M}+1\right), \quad \tau=+\frac{\pi}{2}\left(\frac{r_{\text{макс}}^3}{2M}\right)^{1/2}$$

(событие F'' на фигуре).

в одну точку на той же плоскости ($r_{\text{нов}}$, $t_{\text{нов}}$). Читатель вполне подготовлен к восприятию этого интуитивного заключения и к использованию его в работе, так как уже было показано [уравнение (31.8)], что область, покрывающая 2-сферу (θ, ϕ) при $r = 2M$ и простирающаяся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, имеет собственный объем, равный нулю. Можно ли желать более явного указания на то, что «линия» $r = 2M$, $-\infty < t < \infty$, на самом деле является точкой?

§ 31.4. НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, НЕ ИМЕЮЩИЕ ОСОБЕННОСТИ

Координаты Новикова: 1) как они строятся

Из всех систем координат, не имеющих координатной сингулярности, наиболее наглядной является система, относительно которой пробные частицы, движущиеся радиально, согласно уравнениям (31.10), всегда находятся в состоянии покоя («сопутствующие координаты»). Впервые такие координаты использовал Новиков [43]. Каждой пробной частице, вылетающей из сингулярности при $r = 0$, где действуют бесконечные приливные силы, Новиков приписывает в своей системе координат специальное значение радиальной координаты R^* и требует, чтобы это значение R^* сохранялось на протяжении всей «циклоидальной жизни» частицы: частица движется вверх, пересекает $r = 2M$, достигает $r = r_{\text{макс}}$, затем вновь падает вниз, пересекает $r = 2M$ и достигает $r = 0$. Для определенности Новиков выражает значение R^*, связанное с каждой частицей, через значение радиуса в наивысшей точке траектории этой частицы, используя формулу

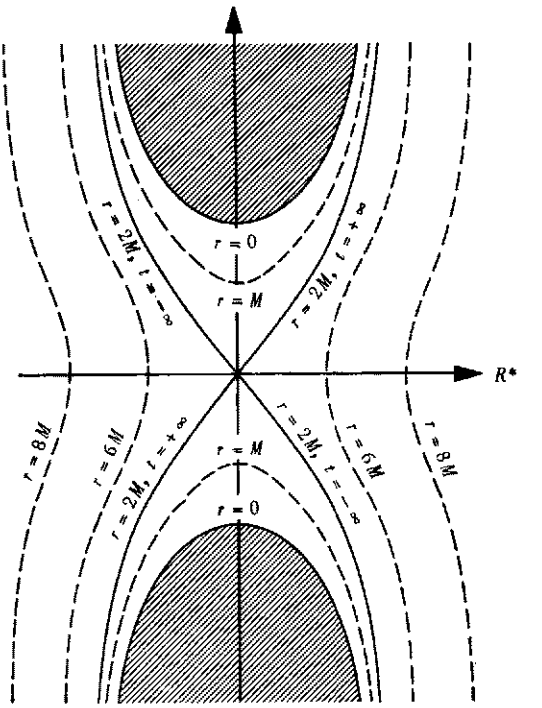
$$R^* = (r_{\text{макс}}/2M - 1)^{1/2}. \tag{31.11}$$

В качестве временно́й координаты Новиков использует собственное время пробной частицы τ, причем за начало отсчета $\tau = 0$ принимается та же наивысшая точка траектории. Каждая частица выбрасывается из сингулярности таким образом, чтобы она достигла вершины своей траектории ($r = r_{\text{макс}}$, $\tau = 0$) в тот же момент шварцшильдовского координатного времени, что и все остальные частицы, а именно в момент $t = 0$.

Хотя координаты Новикова в принципе просты, но преобразование, которое связывает их с первоначальными шварцшильдовскими координатами, является весьма сложным. Проводя это преобразование, нужно 1) объединить уравнения (31.10б) и (31.11) для получения $\eta(\tau, R^*)$, 2) объединить $\eta(\tau, R^*)$ с (31.10а) и (31.11) для получения $r(\tau, R^*)$ и, наконец, 3) объединить $\eta(\tau, R^*)$ с (31.10в) и (31.11) для получения $t(\tau, R^*)$. Окончательное координатное преобразование метрики Шварцшильда (31.1) приводит к линейному элементу вида

2) линейный элемент

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(\frac{R^{*2}+1}{R^{*2}}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R^*}\right)^2 dR^{*2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{31.12а}$$



ФИГ. 31.2.
Система координат Новикова для пространства-времени Шварцшильда (схематическое изображение). Пунктирные кривые являются кривыми постоянного радиуса r ($4\pi r^2$ — площадь поверхности вокруг центра симметрии). Заштрихованная область не является частью пространства-времени; она соответствует $r < 0$, т. е. недостижима из-за сингулярности пространства-времени при $r = 0$. Заметим, что «линия» ($r = 2M$, $-\infty < t < +\infty$) на шварцшильдовской координатной диаграмме (фиг. 31.1) сжалась здесь в точку (см. конец § 31.3).

(*геометрия Шварцшильда в координатах Новикова*). Здесь r уже не является радиальной координатой; теперь это метрическая функция $r(\tau, R^*)$, заданная в неявном виде уравнением

$$\frac{\tau}{2M} = \pm (R^{*2}+1)\left[\frac{r}{2M} - \frac{(r/2M)^2}{R^{*2}+1}\right]^{1/2} + \\ + (R^{*2}+1)^{3/2} \arccos\left[\left(\frac{r/2M}{R^{*2}+1}\right)^{1/2}\right]. \quad (31.12б)$$

На фиг. 31.2 показано положение некоторых основных областей шварцшильдовской геометрии пространства-времени в этой системе координат. В § 31.5 рассматривается существование двух отдельных областей с $r = 0$ (сингулярностей) и двух отдельных областей с $r \to \infty$ (асимптотически плоских областей; напомним, что $4\pi r^2$ — площадь сферы!).

Хотя сама концепция системы координат Новикова очень проста, математические выражения для метрических компонент в этой системе довольно громоздки. Более простые выражения, которые легче использовать, были получены в иной системе координат (в «координатах Крускала — Шекереса»), предложенной Крускалом [41] и независимо от него Шекересом [42].

Координаты Крускала — Шекереса

Крускал и Шекерес используют безразмерную радиальную координату u и безразмерную временну́ю координату v; эти коор-

динаты следующим образом связаны со шварцшильдовскими координатами r и t:

$$\left.\begin{aligned} u &= (r/2M-1)^{1/2}\, e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M) \\ v &= (r/2M-1)^{1/2}\, e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad r > 2M, \tag{31.13а}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= (1-r/2M)^{1/2}\, e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M) \\ v &= (1-r/2M)^{1/2}\, e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad r < 2M. \tag{31.13б}$$

(Обоснование выбора подобных координат дано в дополнении 31.2.) Произведя эту замену координат в метрике Шварцшильда (31.1), получаем линейный элемент следующего вида:

$$ds^2 = (32M^3/r)\, e^{-r/2M}\, (-dv^2 + du^2) + r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{31.14а}$$

(*геометрия Шварцшильда в координатах Крускала — Шекереса*). Под r здесь следует понимать функцию от u и v, которая в неявном виде определяется уравнением

$$(r/2M - 1)\, e^{r/2M} = u^2 - v^2 \tag{31.14б}$$

[см. соотношения (31.13)].

Дополнение 31.2. ОБОСНОВАНИЕ КООРДИНАТ КРУСКАЛА — ШЕКЕРЕСА [1])

А. Координаты Эддингтона — Финкельштейна

Обоснование системы координат Крускала — Шекереса начинается с введения отличной от нее системы координат, впервые построенной Эддингтоном [37] и позднее вновь открытой Финкельштейном [44]. Эддингтон и Финкельштейн в качестве основы для своей системы координат вместо свободно падающих частиц, как это делал Новиков, используют свободно падающие фотоны. В частности, они вводят координаты $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$, которые служат метками для нулевых геодезических, направленных наружу и внутрь. Эти геодезические определяются уравнением

$$ds^2 = 0 = -(1 - 2M/r)\, dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}\, dr^2.$$

Точно так же уходящие на бесконечность геодезические задаются уравнением $\tilde{U} = \text{const}$, где

$$\tilde{U} \equiv t - r^*, \tag{1а}$$

а геодезические, направленные внутрь, задаются уравнением $\tilde{V} = \text{const}$, где

$$\tilde{V} \equiv t + r^*. \tag{1б}$$

Здесь r^* — «черепашья координата», приведенная в § 25.5 и на фиг. 25.4:

$$r^* \equiv r + 2M \ln |\, r/2M - 1\,|. \tag{1в}$$

[1]) Это дополнение основывается на обзоре Мизнера [19].

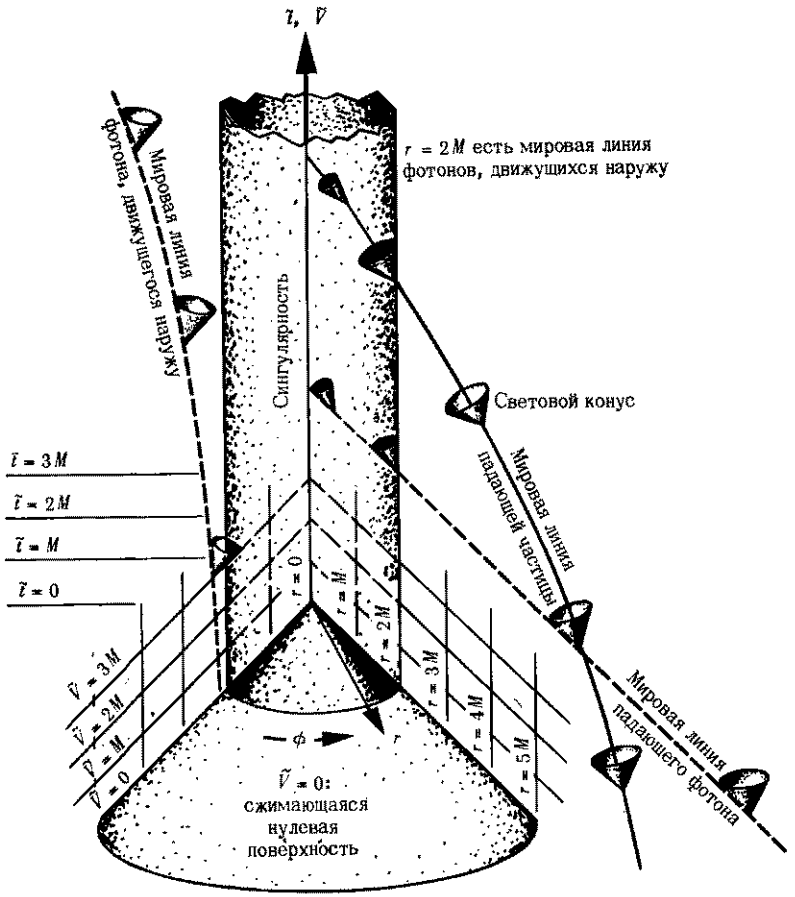
Сжимающаяся система координат Эддингтона — Финкельштейна: вместо r и t в качестве координат приняты r и $\tilde{V}$

Метрика Шварцшильда превращается в метрику

$$ds^2 = -(1-2M/r)\,d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}\,dr + r^2\,d\Omega^2. \tag{2}$$

Одна из образующих радиального светового конуса $ds^2 = 0$ определяется уравнением

$$d\tilde{V}/dr = 0, \tag{3а}$$



Сжимающиеся координаты Эддингтона — Финкельштейна (одна из вращательных степеней свободы не показана, т. е. θ положено равным $\pi/2$). Поверхности постоянного $\tilde{V}$, будучи нулевыми сжимающимися поверхностями, нанесены под углом наклона 45°, т. е. точно так же, как в плоском пространстве-времени. Равным образом поверхности постоянного $\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r = t + 2M \ln|r/2M - 1|$ изображаются горизонтальными линиями.

а другая — уравнением

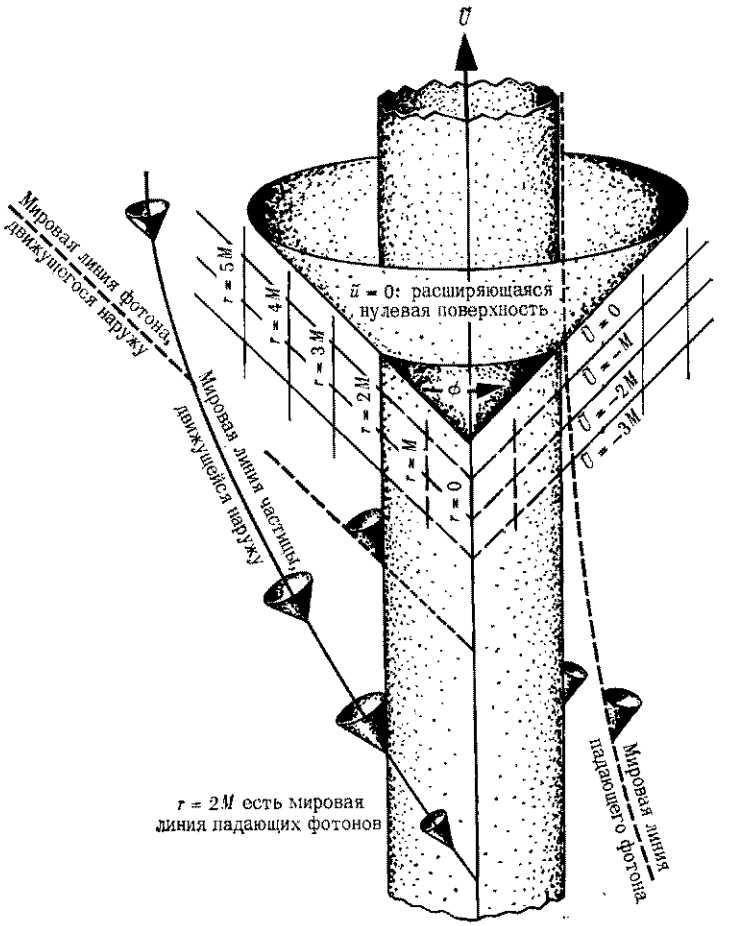
$$\frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{2}{1-2M/r}. \tag{3б}$$

Исходя из этого и только из этого, можно разобраться во всем том, что изображено на рисунке.

Расширяющаяся система координат Эддингтона — Финкельштейна: вместо r и t в качестве координат приняты r и $\tilde{U}$

Метрика Шварцшильда превращается в метрику

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)\, d\tilde{U}^2 - 2d\tilde{U}\, dr + r^2\, d\Omega^2. \tag{4}$$



Расширяющиеся координаты Эддингтона — Финкельштейна (одна из вращательных степеней свободы не показана). Поверхности постоянного $\tilde{U}$, будучи нулевыми расширяющимися поверхностями, нанесены под углом наклона 45° точно так же, как в плоском пространстве-времени.

Одна из образующих радиального светового конуса $ds^2 = 0$ определяется уравнением

$$d\tilde{U}/dr = 0, \tag{5а}$$

а другая — уравнением

$$\frac{d\tilde{U}}{dr} = -\frac{2}{1-2M/r}. \tag{5б}$$

Исходя из этого и только из этого, можно разобраться во всем том, что изображено на рисунке.

Отметим, что на гравитационном радиусе обе системы координат Эддингтона — Финкельштейна ведут себя лучше, чем шварцшильдовская система координат; но они не *вполне* безупречны. Расширяющаяся система координат ($\tilde{U}$, r, θ, ϕ) прекрасно описывает выброс частиц наружу из $r = 0$ за пределы гравитационного радиуса $r = 2M$, но при описании с помощью этой системы падения частиц под гравитационный радиус возникает такая же сингулярность, что и при использовании шварцшильдовской системы координат (фиг. 31.1). Аналогичным образом, сжимающаяся система координат ($\tilde{V}$, r, θ, ϕ) хорошо описывает падение частиц под гравитационный радиус, но эта система не способна описать выходящих на бесконечность траекторий. Более того, сильное различие приведенных выше двух рисунков кажется парадоксальным: на одном из них гравитационный радиус образован из мировых линий выходящих фотонов, в то время как на другом — из мировых линий фотонов, движущихся внутрь! Чтобы разрешить этот парадокс, надо искать более подходящую систему координат. [*Замечание.* Поскольку сжимающаяся система координат Эддингтона — Финкельштейна прекрасно описывает падение внутрь, эти координаты широко используются при рассмотрении гравитационного коллапса (гл. 32) и черных дыр (гл. 33 и 34).]

Б. Переход от координат Эддингтона — Финкельштейна к координатам Крускала — Шекереса

Может быть, мы получим систему координат, обнаруживающую всюду нормальное поведение, если вовсе исключим r, а в качестве двух координат на плоскости радиус—время используем $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$. Полученная в результате система координат связана со шварцшильдовскими координатами соотношениями

$$\tilde{V} - \tilde{U} = 2r^*, \tag{6а}$$

$$\tilde{V} + \tilde{U} = 2t; \tag{6б}$$

линейный элемент в этих новых координатах записывается в виде

$$ds^2 = -(1-2M/r)\, d\tilde{U}\, d\tilde{V} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{7}$$

Вопреки ожиданиям эта система координат имеет сингулярность при $r = 2M$.

При более глубоком рассмотрении указанного выше построения обнаруживается причина такого затруднения. С геометрической точки зрения поверхности $\tilde{U} = \text{const}$ (расширяющиеся нулевые поверхности) и $\tilde{V} = \text{const}$ (сжимающиеся нулевые поверхности) определены вполне хорошо; но этого нельзя сказать о том способе, которым мы приписываем каждой такой поверхности метку. Любое

переобозначение $\tilde{u} = F(\tilde{U})$ и $\tilde{v} = G(\tilde{V})$ с точки зрения физики оставляет эти поверхности без изменений. Необходимо такое переобозначение, которое устранило бы из линейного элемента (7) сингулярный множитель $1 - 2M/r$. Переобозначение, приводящее к желаемому результату, подсказывается уравнением

$$\exp[(\tilde{V} - \tilde{U})/4M] = \exp(r^*/2M) = (r/2M - 1)\exp(r/2M), \tag{8}$$

которое следует из уравнений (6а) и (1в). Немного поэкспериментировав с этим уравнением, мы быстро обнаружим, что переобозначение

$$\tilde{u} \equiv -e^{-\tilde{U}/4M} = -(r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} e^{-t/4M}, \tag{9а}$$

$$\tilde{v} \equiv e^{+\tilde{V}/4M} = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} e^{t/4M} \tag{9б}$$

устраняет из метрических коэффициентов доставляющий неприятности множитель $1 - 2M/r$. В этих новых координатах линейный элемент записывается в виде

$$ds^2 = -(32M^3/r)\, e^{-r/2M}\, d\tilde{v}\, d\tilde{u} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{10а}$$

Здесь r по-прежнему определяется из условия, что $4\pi r^2$ — площадь сферы, но теперь r следует рассматривать как функцию от $\tilde{v}$ и $\tilde{u}$:

$$(r/2M - 1)\, e^{r/2M} = -\tilde{u}\tilde{v}. \tag{10б}$$

Легко убедиться, что это уравнение однозначно определяет r (напомним, что $r > 0$!) через произведение $\tilde{u}\tilde{v}$ (подробности см. в работе [19]).

Координаты $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, которые использовались как метки для сжимающихся и расширяющихся нулевых поверхностей, являются нулевыми координатами, т. е.

$$\partial/\partial\tilde{u} \cdot \partial/\partial\tilde{u} = g_{\tilde{u}\tilde{u}} = 0, \qquad \partial/\partial\tilde{v} \cdot \partial/\partial\tilde{v} = g_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0$$

[см. выражение (10а)]. Если нет навыка работы с нулевыми координатами, то полезно заменить $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ на пространственноподобную и времениподобную координаты u и v (это и есть координаты Крускала — Шекереса!), которые определяются следующим образом:

$$u \equiv \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}) = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M), \tag{11а}$$

$$v \equiv \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u}) = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M), \tag{11б}$$

так что

$$dv^2 - du^2 = d\tilde{v}\, d\tilde{u}. \tag{12}$$

В этих координатах линейный элемент имеет крускаловскую форму (31.14), и поведение этой системы координат на гравитационном радиусе абсолютно безупречно.

Хотя поведение линейного элемента Крускала — Шекереса при $r = 2M$ вполне нормально, нельзя сказать того же о преобразовании (11) от шварцшильдовских координат к системе координат Крускала — Шекереса; это преобразование теряет смысл (u и v «мнимые»), когда мы переходим от $r > 2M$ к $r < 2M$. Конечно, в этом проявляется сингулярность шварцшильдовских координат. Методом проб

и ошибок легко находится новое преобразование, переводящее шварцшильдовские координаты в координаты Крускала — Шекереса, которое заменяет (11) при $r < 2M$:

$$u = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M), \tag{11в}$$

$$v = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M). \tag{11г}$$

§ 31.5. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ КРУСКАЛА — ШЕКЕРЕСА И ШВАРЦШИЛЬДОВСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Координаты Крускала — Шекереса показывают, что в пространстве-времени Шварцшильда имеются две «сингулярности $r = 0$» и две «внешние области $r \to \infty$»

В системе координат Крускала — Шекереса сингулярность $r = 0$ расположена в том месте, где $v^2 - u^2 = 1$. Таким образом, фактически имеется не одна, а *две* сингулярности:

$$v = +(1 + u^2)^{1/2} \text{ и } v = -(1 + u^2)^{1/2} \text{ соответствуют } r = 0! \tag{31.15}$$

И это не единственный сюрприз, скрытый в линейном элементе Крускала — Шекереса (31.14). Заметим также, что $r \gg 2M$ (область пространства-времени, расположенная далеко от гравитационного радиуса) дается неравенством $u^2 \gg v^2$. Таким образом, и здесь имеются фактически *две* внешние области [1])

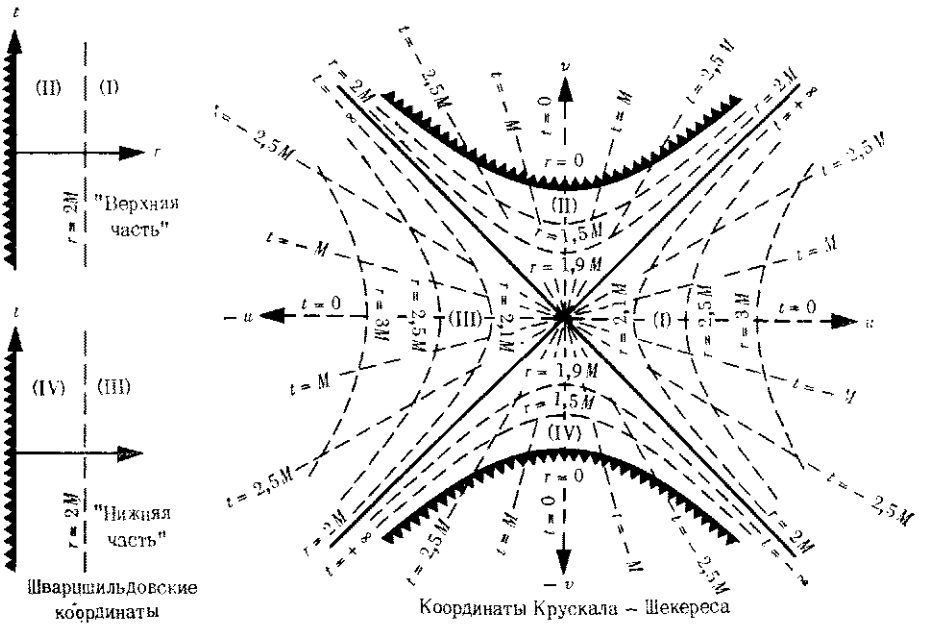
$$u \gg +|v| \text{ и } u \ll -|v| \text{ соответствуют } r \gg 2M! \tag{31.16}$$

Как это может быть? Когда геометрия описывается в шварцшильдовских координатах, она содержит одну сингулярность и одну внешнюю область; но когда геометрия Шварцшильда описывается в координатах Крускала — Шекереса, в ней появляются две сингулярности и две внешние области. Ответ состоит в том, что шварцшильдовская система координат охватывает лишь часть пространственно-временно́го многообразия; эту систему координат следует представлять себе как местную координатную сетку, наложенную лишь на часть этого многообразия. С помощью преобразования координат, приводящего к координатам Крускала — Шекереса, мы получаем метрику, которая покрывает все (или почти все) многообразие и которая является аналитическим продолжением ограниченного шварцшильдовского решения.

Чтобы иметь более ясное представление о таком покрытии, совершим обратное преобразование от координат Крускала —

---

[1]) Глобальная структура геометрии Шварцшильда, включающая две сингулярности и две внешних области, была впервые открыта Сингом [39]. См. дополнение 31.1.



ФИГ. 31.3.
Преобразование геометрии Шварцшильда для вакуума от шварцшильдовских координат к координатам Крускала — Шекереса. Для покрытия всей геометрии Шварцшильда требуются две шварцшильдовские координатные системы I, II и III, IV (показанные в верхней и нижней частях фиг. 31.5, *а*), в то время как для этой же цели достаточно одной системы координат Крускала — Шекереса. Геометрия Шварцшильда включает четыре области I, II, III и IV. Области I и III представляют собой две раздельные, но тождественные асимптотически плоские вселенные, в которых $r > 2M$; в то же время области II и IV являются двумя также тождественными, но обратимыми по отношению друг к другу во времени областями, в которых эволюционируют физические сингулярности ($r = 0$). Законы преобразования, связывающие системы координат Шварцшильда и Крускала — Шекереса, даются уравнениями (31.17) и (31.18). В системе координат Крускала — Шекереса в плоскости (u, v) кривые постоянного r представляют собой гиперболы с асимптотами $u = \pm v$, а кривые постоянного t — прямые, проходящие через начало координат.

Шекереса к координатам Шварцшильда (фиг. 31.3). Уравнения этого преобразования, записанные в виде (31.13), были справедливы лишь для квадрантов $u > |v|$ [уравнение (31.13а)] и $v > |u|$ [уравнение (31.13б)] в крускаловской системе координат. Обозначим эти квадранты цифрами I и II (фиг. 31.3), а два других — цифрами III и IV. В квадрантах III и IV также можно преобразовать линейный элемент Крускала — Шекереса (31.14) в шварцшильдовский линейный элемент (31.1), но для этого потребуются уравнения, немного отличные от (31.13а) и (31.13б). Легко убедиться, что в этих квадрантах имеют место следующие

преобразования:

$$\text{I}\begin{cases} u = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M), \\ v = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M), \end{cases} \tag{31.17а}$$

Переход от координат Шварцшильда к координатам Крускала — Шекереса

$$\text{II}\begin{cases} u = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M), \\ v = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M), \end{cases} \tag{31.17б}$$

$$\text{III}\begin{cases} u = -(r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M), \\ v = -(r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M), \end{cases} \tag{31.17в}$$

$$\text{IV}\begin{cases} u = -(1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M), \\ v = -(1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M). \end{cases} \tag{31.17г}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$(r/2M - 1)\, e^{r/2M} = u^2 - v^2 \text{ в областях I, II, III и IV,} \tag{31.18а}$$

$$t = \begin{cases} 4M \operatorname{ar\,th}(v/u) \text{ в областях I и III,} \\ 4M \operatorname{ar\,th}(u/v) \text{ в областях II и IV.} \end{cases} \tag{31.18б}$$

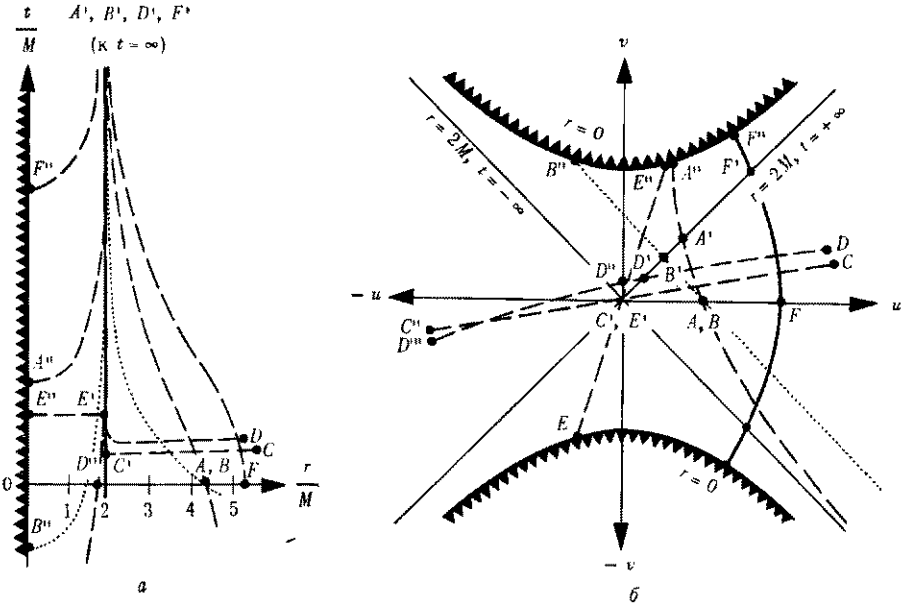
Эти преобразования координат представлены графически на фиг. 31.3. Отметим, что для покрытия всей геометрии Шварцшильда требуются две шварцшильдовские системы координат I, II и III, IV, но в то же время для этого достаточно одной крускаловской системы координат. Шварцшильдовская система координат I, II разделяется на две области: область I, которая находится вне гравитационного радиуса ($r > 2M$), и область II, находящаяся внутри гравитационного радиуса ($r < 2M$). Аналогично, шварцшильдовская система координат III, IV состоит из внешней III и внутренней IV областей.

Для покрытия всего пространства-времени требуются две шварцшильдовские системы координат

Из уравнений (31.18) видно, что поверхности постоянного радиуса (или, что то же самое, поверхности постоянной площади) в координатах Крускала — Шекереса схематически изображаются гиперболами с асимптотами $u = \pm v$, а поверхности постоянного t представляют собой в том же схематическом изображении прямые линии, проходящие через начало координат.

На фиг. 31.4 в системе координат Крускала — Шекереса изображены некоторые геодезические полной геометрии Шварцшильда. Заметим, насколько более приемлемо выглядят геодезические в координатах Крускала — Шекереса по сравнению со шварцшильдовскими координатами. Заметим также, что *радиальные геодезические, вдоль которых движется свет, представляют собой прямые, наклоненные под углом 45° к осям системы координат Крускала — Шекереса*. Это можно видеть непосредственно из линейного элемента Крускала — Шекереса (31.14), для которого $du = \pm dv$ гарантирует $ds = 0$. Благодаря этому свойству нулевых геодезических иметь наклон 45° радиальный световой конус,

Свойства системы координат Крускала — Шекереса



ФИГ. 31.4.
а — типичные времениподобные (A, E, F), световая (B) и пространственноподобные (C, D) радиальные геодезические в геометрии Шварцшильда, схематически изображенные в шварцшильдовской системе координат; эта фигура является точным воспроизведением фиг. 31.1. *б* — те же геодезические в системе координат Крускала — Шекереса, продолженные либо до бесконечной протяженности, либо до сингулярности при $r = 0$, где кривизна бесконечна (схематическое изображение).

изображенный в координатах Крускала — Шекереса, имеет ту же форму, что и в специальной теории относительности. Любая радиальная кривая, направленная «в обычном смысле вверх» (т. е. имеющая с вертикальной осью v угол меньше 45°), является времениподобной, а кривые, направленные «в обычном смысле наружу» относительно светового конуса, являются пространственноподобными. Именно это свойство позволяет легко выявлять причинную связь между двумя событиями в пространстве-времени с помощью их графического изображения в координатах Крускала — Шекереса (см. упражнения 31.2—31.4).

УПРАЖНЕНИЯ

31.2. Нерадиальные световые конусы

Покажите, что мировая линия фотона, движущегося нерадиально, имеет угол меньше 45° с вертикальной осью на диаграмме Крускала — Шекереса. Исходя из этого, покажите, что частицы с конечной массой покоя, движущиеся радиально или нерадиально, должны всегда двигаться «в обычном смысле вверх» (угол с вертикальной осью меньше 45°).

УПРАЖНЕНИЯ

31.3. Роковая катастрофа

Используя диаграмму Крускала, покажите следующее.

а. Если какой-то человек упал под гравитационный радиус $r = 2M$, то он обязательно попадет в сингулярность $r = 0$ (и погибнет там), и нет никакой возможности избежать этого.

б. Если человек упал под гравитационный радиус, то у него нет никакой возможности послать сообщения своим друзьям, находящимся снаружи на радиусе $r > 2M$, но сам он может получать от них сообщения (например, в виде радиоволн, лазерного луча или в виде падающих вниз «посылок»).

31.4. Сколько времени осталось жить?

Покажите, что если человек, падающий вниз, достиг гравитационного радиуса, то независимо от того, что он будет предпринимать впоследствии (независимо от того, в каком направлении, как долго и с какой мощностью будет работать двигатель его ракеты), его затянет в сингулярность, где он погибнет за собственное время

$$\tau < \tau_{\text{макс}} = \pi M = 1{,}54 \cdot 10^{-5}\,(M/M_\odot)\ \text{с}. \qquad (31.19)$$

[*Указание.* Траектория, вдоль которой указанный интервал собственного времени максимален, должна быть геодезической. Используя математический аппарат гл. 25, покажите, что геодезическая, на которой интервал собственного времени между $r = 2M$ и $r = 0$ максимален, является радиальной геодезической (31.10а) с $r_{\text{макс}} = 2M$; для нее этот интервал времени равен πM.]

31.5. Сравнение координат Эддингтона — Финкельштейна и Крускала — Шекереса

Воспользуйтесь координатными диаграммами для сравнения сжимающейся и расширяющейся систем координат Эддингтона — Финкельштейна, приведенных в дополнении 31.2, с координатами Крускала — Шекереса. Проделайте это, приняв в качестве образца сравнение шварцшильдовских координат с координатами Крускала — Шекереса, проведенное на фиг. 31.3 и 31.4.

31.6. Еще одна система координат

Постройте координатную диаграмму для системы координат $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, θ, ϕ, которая приводится в дополнении 31.2 [уравнения (6) и (7)]. Покажите на диаграмме такие характерные черты, как 1) связь с координатами Шварцшильда и Крускала — Шекереса, 2) положение $r = 2M$ и 3) радиальные геодезические.

§ 31.6. ДИНАМИКА ГЕОМЕТРИИ ШВАРЦШИЛЬДА

Как выглядит геометрия Шварцшильда? На этот вопрос легче всего ответить с помощью диаграмм погружения, аналогичных тем, которые использовались для изучения равновесной звезды [§ 23.8, фиг. 23.1 и конец дополнения 23.2] и вселенных Фридмана с положительной и отрицательной кривизной [уравнения (27.23) и (27.24), а также дополнение 27.2].

Исследуем сначала геометрию пространственноподобной гиперповерхности $v = 0$, которая простирается от $u = +\infty$ ($r = \infty$) до внутренней границы $u = 0$ ($r = 2M$) и затем до другой внешней границы $u = -\infty$ ($r = \infty$). В шварцшильдовской системе координат эта поверхность представляет собой сечение постоянного времени $t = 0$ [см. уравнение (31.18б)]; это как раз та поверхность, для которой вычислялась диаграмма погружения с помощью уравнения (23.34б). Погружаемая поверхность, одна из вращательных степеней свободы которой отбрасывается, описывается параболоидом вращения

$$\bar{r} = 2M + \bar{z}^2/8M \tag{31.20}$$

в плоском эвклидовом пространстве с метрикой

$$d\sigma^2 = d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\phi}^2 \tag{31.21}$$

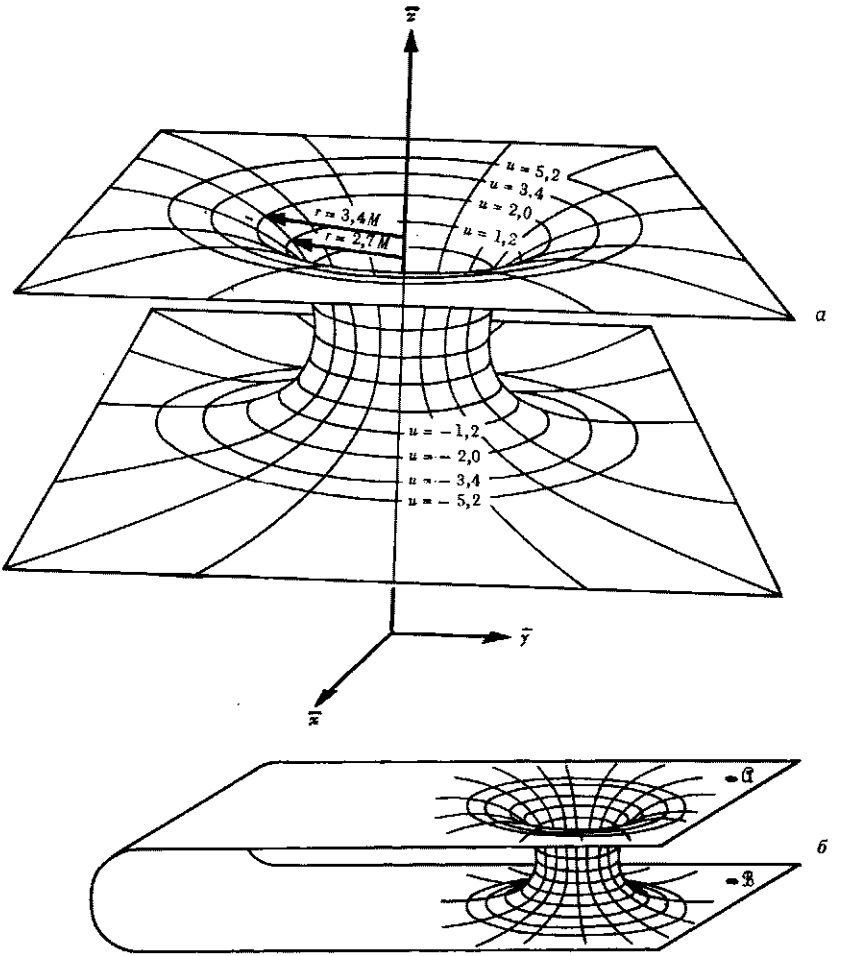
(фиг. 31.5).

3-поверхность $v = t = 0$ является «горловиной», которая соединяет две асимптотически плоские вселенные или две области одной вселенной

Заметим, исходя из диаграммы погружения, показанной на фиг. 31.5, *а*, что геометрия Шварцшильда на пространственноподобной гиперповерхности $t = \text{const}$ включает в себя мост, или «горловину», соединяющую две отдельные, но тождественные плоские вселенные. Этот мост иногда называют «мостом Эйнштейна — Розена», «шварцшильдовским перешейком» или «шварцшильдовской горловиной». При желании можно изменить топологию геометрии Шварцшильда, соединив две асимптотически плоские вселенные вместе в области, удаленной от шварцшильдовской горловины ([45]; фиг. 31.5, *б*). Единственная вселенная становится, таким образом, неодносвязной: один пространственноподобный путь из точки $\mathscr{A}$ в точку $\mathscr{B}$ проходит по шварцшильдовской горловине, а другой — по почти плоской вселенной. Для определенности сконцентрируем внимание на интерпретации геометрии Шварцшильда в виде двойной вселенной Эйнштейна — Розена (фиг. 31.5, *а*), не касаясь многосвязной единственной вселенной Уилера.

Геометрия Шварцшильда является динамической в областях $r < 2M$

Как правило, мы привыкли думать о геометрии Шварцшильда как о статической геометрии. Однако статическое «преобразование времени» $t \to t + \Delta t$, которое оставляет геометрию Шварцшильда неизменной, является преобразованием времени в строгом смысле этого слова лишь в областях I и III геометрии Шварцшильда. В областях II и IV преобразование $t \to t + \Delta t$ является



ФИГ. 31.5.

а — пространственная геометрия Шварцшильда в «момент времени» $t = v = 0$; одна из вращательных степеней свободы не изображена ($\theta = \pi/2$). Чтобы восстановить эту вращательную степень свободы и получить полную шварцшильдовскую 3-геометрию, нужно мысленно заменить окружности с постоянным $\bar{r} = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$ на сферические поверхности площадью $4\pi\bar{r}^2$. Заметим, что полученная таким образом 3-геометрия переходит в плоскую (эвклидову) вдали от перешейка моста в обоих направлениях (две «вселенные»). *б* — погружение пространственной геометрии Шварцшильда в «момент времени» $t = v = 0$, геометрически тождественное погружению *а*, но топологически отличное от последнего. Полевые уравнения Эйнштейна определяют локальную геометрию пространства-времени, но не определяют его топологию (см. обсуждение в конце дополнения 27.2). На этой фигуре шварцшильдовская «горловина» соединяет две удаленные друг от друга области одной и той же единственной асимптотически плоской вселенной. Обсуждение спорных вопросов причинности, связанных с таким выбором топологии, см. в работе [45].

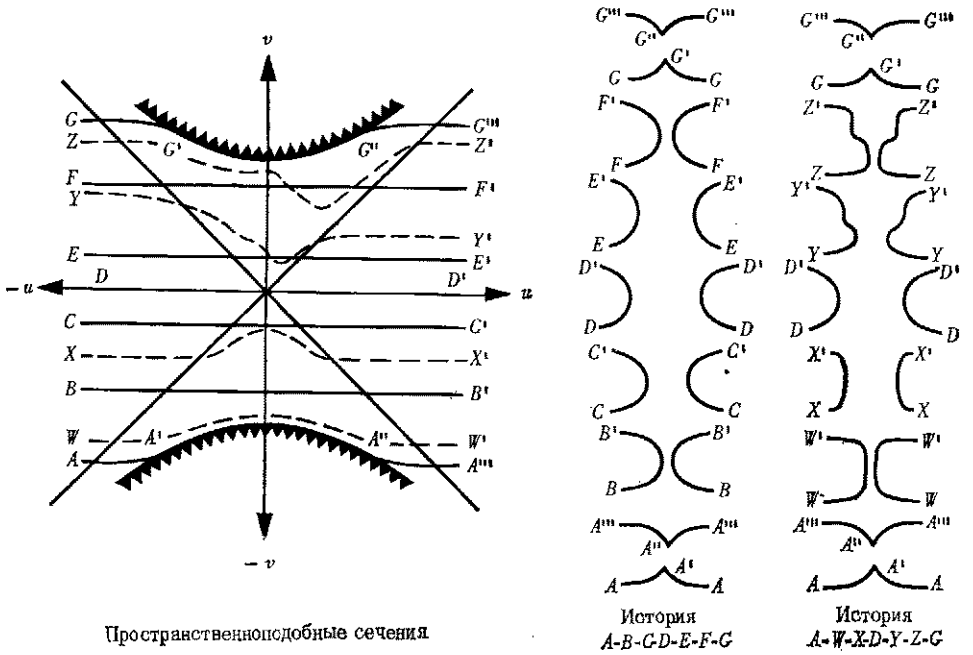
не времениподобным, а пространственноподобным движением (фиг. 31.3). Следовательно, пространственноподобная гиперповерхность, например поверхность $t = \text{const}$ на фиг. 31.5, *а* (последняя простирается от области I, проходя через $u = v = 0$, до области III), *не является* статической. С течением времени эта пространственноподобная гиперповерхность входит в область II, и ее геометрия начинает изменяться.

Чтобы изучить временну́ю эволюцию геометрии Шварцшильда, необходимо рассмотреть последовательность диаграмм погружения, каждая из которых соответствует геометрии пространственноподобной гиперповерхности, расположенной в будущем по отноше́нию к предшествующей гиперповерхности. Но как выбрать эти гиперповерхности? В ньютоновской теории или в специальной теории относительности выбираются гиперповерхности постоянного времени. Но в динамических областях искривленного пространства-времени не существует временно́й координаты, которая была бы предпочтительней других временны́х координат. Такая ситуация заставляет совершенно *произвольным* образом выбирать гиперповерхности, служащие для наглядного представления временно́й эволюции геометрии, но необходимо постоянно помнить, что выбор сделан произвольно.

Временна́я эволюция горловины: возникновение, расширение, сжатие и разрыв

На фиг. 31.6 для описания временно́й эволюции геометрии Шварцшильда используются два различные выбора гиперповерхностей. (Другие варианты выбора гиперповерхностей иллюстрируются на фиг. 21.4.) Отметим, что конкретная геометрия развивающегося моста зависит от произвольного выбора пространственноподобных гиперповерхностей, но качественная картина эволюции от выбора этих гиперповерхностей не зависит. Картину эволюции качественно можно описать следующим образом. Две асимптотически плоские вселенные вначале не связаны друг с другом, и каждая из них содержит по сингулярности, в которой кривизна бесконечна ($r = 0$). По мере того как две вселенные эволюционируют во времени, их сингулярности соединяются друг с другом, и при этом образуется несингулярный мост. Мост увеличивается до тех пор, пока перешеек не достигает максимального радиуса $r = 2M$ (максимальные длина окружности $4\pi M$ и площадь поверхности $16\pi M^2$). Затем мост сжимается, становясь все тоньше, пока не разорвется; в результате остаются две вселенные, которые снова друг с другом не связаны и содержат сингулярности ($r = 0$). Образование, расширение и коллапс моста происходят так быстро, что ни частица, ни луч света не успевают пересечь мост и пройти путь от удаленной области одной вселенной до удаленной области другой вселенной: частица и световой луч обязательно будут захвачены и уничтожены в перешейке в процессе его разрыва. (Чтобы убедиться в этом, достаточно изучить диаграмму Крускала — Шекереса на фиг. 31.3, где радиальные световые лучи изображаются прямыми линиями, имеющими наклон 45°.)

Сообщение через горловину невозможно: она слишком быстро разрывается



ФИГ. 31.6.
Динамическая эволюция моста Эйнштейна — Розена в геометрии Шварцшильда для вакуума (схематическое изображение). Показанные здесь две последовательности диаграмм погружения соответствуют двум различным способам рассмотрения эволюции моста — истории *A-B-C-D-E-F-G* и истории *A-W-X-D-Y-Z-G*. Диаграммы погружения даны в виде схематических набросков, в том смысле, что каждую из этих диаграмм необходимо вращать вокруг соответствующей вертикальной оси, чтобы они стали двумерными поверхностями, аналогичными изображенным на фиг. 31.5, *а*. [Отметим, что гиперповерхности, для которых приведены диаграммы погружения, соприкасаются с сингулярностью, лишь касаясь ее. Те гиперповерхности, которые пересекают сингулярность под конечным углом в *u*, *v*-плоскости, не могут быть показаны, поскольку их невозможно погрузить в эвклидово пространство. Вместо последнего необходимо использовать, по крайней мере вблизи $r = 0$, пространство Минковского (индефинитная метрика). Пример погружения в пространство Минковского см. в уравнениях (27.23), (27.24) и дополнении 27.2,В, где обсуждается вселенная с постоянной отрицательной кривизной.] На фиг. 21.4 представлены диаграммы погружения для других пространственноподобных сечений шварцшильдовской геометрии.

Рождение и уничтожение в сингулярностях

Из диаграммы Крускала — Шекереса, если принять во внимание свойство световых лучей иметь на этой диаграмме наклон 45°, видно, что любая частица, когда-либо попадающая в область IV пространства-времени, должна была «родиться» перед этим в более ранней сингулярности, а любая частица, когда-либо попадающая в область II, обречена на уничтожение в более поздней сингулярности. Только те частицы, которые всегда находятся

в одной из асимптотически плоских вселенных I или III вне гравитационного радиуса ($r > 2M$), навечно избавлены от сингулярностей.

Нежизнеспособные предложения модифицировать топологию пространства-времени Шварцшильда

Некоторые исследователи предлагали модифицировать топологию геометрии Шварцшильда, чтобы исключить сингулярности при $r = 0$ и «двойную вселенную», присущую этой геометрии. Одно из подобных предложений состоит в следующем: более ранняя и более поздняя сингулярности отождествляются друг с другом, так что частица, падающая в сингулярность, принадлежащую области II, вместо того чтобы быть уничтоженной, внезапно вновь появляется, выброшенная из сингулярности, принадлежащей области IV. Эта точка зрения встречается с серьезным возражением: область $r = 0$ является физической сингулярностью, в которой действуют бесконечные приливные силы и в которой риманова кривизна бесконечна. Любая частица, падающая в такую сингулярность, должна быть разрушена этими силами. Всякая попытка экстраполировать судьбу такой частицы после прохождения сингулярности с помощью уравнений Эйнштейна должна потерпеть неудачу: уравнения теряют силу, сталкиваясь с бесконечной кривизной. Следовательно, постулировать, что частица вновь возникает в более поздней сингулярности, означает выдумывать специальное математическое правило, не имеющее отношения к физике. Едва ли можно поверить в справедливость того, что какое-либо тело конечной массы изменит геометрию сингулярности при достижении $r = 0$ до такой степени, что это тело сможет пройти через сингулярность и вновь появиться, хотя сама по себе такая возможность ничему не противоречит. Как бы то ни было, ответ на вопрос, является ли подобная спекуляция корректной, должен быть дан не в виде специально придуманных правил, а путем конкретных трудоемких вычислений в рамках общей теории относительности (см. гл. 34).

Второе предложение относительно модификации топологии геометрии Шварцшильда состоит в следующем. Мы исключим существование двух различных асимптотически плоских вселенных, если в системе координат Крускала — Шекереса отождествим каждую точку (v, u, θ, ϕ) с противоположной ей точкой $(-v, -u, \theta, \phi)$. Против этого предложения имеются два возражения. 1. Такая процедура приводит к своего рода «конической» сингулярности (отсутствию локально лоренцевой системы отсчета) при $(v, u) = (0, 0)$, т. е. на перешейке моста в момент максимального расширения. 2. Она вызывает нарушение причинности, которое проявляется, например, в том, что человек может встретить самого себя, движущегося в обратном направлении во времени.

Чтобы лучше познакомиться с основными чертами геометрии Шварцшильда, читателю следует прочесть снова внимательно § 31.1—31.4, истолковывая все сказанное там с помощью диаграммы Крускала — Шекереса.

УПРАЖНЕНИЯ

31.7. Метрика Шварцшильда в изотропных координатах

а. Покажите, что переписанная в изотропных координатах, приведенных в упражнении 23.1, метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -\left(\frac{1-M/2\bar{r}}{1+M/2\bar{r}}\right)^2 dt^2 + \\ + \left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)], \qquad (31.22)$$

и выведите преобразование

$$r = \bar{r}(1 + M/2\bar{r})^2 \qquad (31.23)$$

между двумя радиальными координатами.

б. Какие области пространства-времени (I, II, III, IV, см. фиг. 31.3) покрываются изотропной системой координат, а какие нет?

в. Рассчитайте и постройте диаграмму погружения для пространственноподобной гиперповерхности $t = 0$, $0 < \bar{r} < \infty$.

г. Найдите преобразование координат, которое меняет местами области вблизи $\bar{r} = 0$ и $\bar{r} = \infty$, оставляя при этом метрические коэффициенты в первоначальной форме.

31.8. Геометрия Рейснера — Нордстрема

а. Решите эйнштейновские уравнения поля для сферически симметричного статического гравитационного поля

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}\, dt^2 + e^{2\Lambda(r)}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

в том случае, когда вещество отсутствует, но имеется радиальное электрическое поле $\boldsymbol{B} = 0$, $\boldsymbol{E} = f(r)\,\mathbf{e}_{\hat{r}}$, в статической ортогональной системе координат

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi}\,\mathbf{d}t, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\,\mathbf{d}r,$$
$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi.$$

В качестве источника в эйнштейновских уравнениях поля используйте тензор энергии-импульса электрического поля. (*Ответ*:

$$\boldsymbol{E} = (Q/r^2)\,\mathbf{e}_{\hat{r}}, \qquad (31.24а)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dr^2 + \\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \qquad (31.24б)$$

Это так называемая «метрика Рейснера [46] — Нордстрема [47]».)

б. Покажите, что константа Q является полным зарядом, измеряемым удаленным наблюдателем ($r \gg 2M$ и $r \gg Q$), причем

УПРАЖНЕНИЯ

этот наблюдатель использует гауссов интеграл для потока или изучает орбиты пробных зарядов, для которых отношение заряда к массе $e/\mu \gg M/Q$, т. е. кулоновские силы преобладают. Каково отношение заряда к массе для электрона в безразмерных единицах? Покажите, что константа M является полной массой, измеряемой удаленным наблюдателем, который использует для ее измерения кеплеровские орбиты электрически нейтральных частиц.

в. Покажите, что если $Q > M$, то поведение системы координат Рейснера — Нордстрема вполне нормально во всей области от $r = \infty$ до $r = 0$, где имеется физическая сингулярность и действуют бесконечные приливные силы.

г. Исследуйте свойства геометрии пространства-времени для случая $Q < M$, используя все методы, изложенные в этой главе (преобразование координат, координаты, подобные крускаловским, исследование орбит частиц, диаграммы погружения и т. д.). (*Решение*: см. [48], а также фиг. 34.4.)

д. Исследуйте аналогичным образом геометрию пространства-времени для случая $Q = M$. (*Решение*: см. [49].)

е. Покажите, что в случае большого отношения заряда к массе ($Q > M$ как в пункте «в») область вблизи $r = 0$ является нефизической. Или, более конкретно, покажите, что любое сферически симметричное распределение заряженного вещества, которое вне этого вещества приводит к полям (31.24), должно изменять эти поля при $r < r_0 = Q^2/2M$. [*Указание*. Обратите внимание на величину $m(r)$, определение которой дается в (23.18) и (32.22); выпишите значения для этой величины, выведенные из уравнения (31.24), с одной стороны, и из соответствующего уравнения Эйнштейна внутри распределения вещества — с другой. См. фиг. 26 в обзоре [19], приведенную для подобного доказательства.]

32. ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС

Здесь, как видишь, надо бежать, что есть мочи, чтобы только удержаться на месте. А если тебе надо попасть в другое место, то ты должна бежать еще в два раза быстрее.

КРАСНАЯ КОРОЛЕВА ИЗ «ЗАЗЕРКАЛЬЯ»,
ЛЬЮИС КЭРРОЛ [50]

§ 32.1. ПОЧЕМУ ВАЖНА ГЕОМЕТРИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

Картина, которая открылась перед нами в предыдущей главе, была поистине фантастична! Мы начали с рассмотрения безобидного шварцшильдовского линейного элемента

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \quad (32.1)$$

который первоначально был получен как внешнее поле статической звезды. Был задан вопрос, что случится, если звезды нет, т. е. мы занялись исследованием природы геометрии Шварцшильда в том случае, когда звезда, порождающая эту геометрию, отсутствует. Можно было бы ожидать, что геометрия будет такой же, как в случае точечной массы, расположенной при $r = 0$. Но оказалось, что она не такая. Оказалось, что в ней имеется «горловина», соединяющая две асимптотически плоские вселенные. Более того, горловина носит динамический характер. Она возникает в результате «соединения воедино» двух сингулярностей $r = 0$, по одной в каждой вселенной; горловина расширяется, достигает максимальной длины окружности $4\pi M$, затем она сжимается обратно и разрывается, причем получаются две не связанные друг с другом вселенные, каждая из которых обладает своей собственной сингулярностью $r = 0$.

Значение геометрии Шварцшильда и ее связь с реальностью

Поскольку эта расширяющаяся и затем сжимающаяся горловина есть решение эйнштейновских уравнений поля, мы должны относиться к ней совершенно серьезно. Она является точным решением и к тому же одним из самых простых среди всех точных решений. Но нет никаких оснований верить в существование таких

горловин в реальной Вселенной. Они могут существовать лишь в том случае, если расширяющаяся Вселенная «родилась» примерно $10 \cdot 10^9$ лет тому назад с необходимыми для существования горловин начальными условиями: с шварцшильдовскими сингулярностями $r = 0$, которые готовы превратиться в горловины. Нет ни малейших причин верить в такие патологические начальные условия!

Если это так, то почему в гл. 31 было потрачено столько времени и усилий, чтобы разобраться в геометрии Шварцшильда? Потому что 1) она дает наглядный пример в высшей степени неэвклидова характера геометрии пространства-времени, когда гравитационное поле становится сильным; 2) она иллюстрирует многие из методов, которые могут применяться для исследования сильных гравитационных полей, и, что наиболее важно, 3) эта геометрия, если ее соответствующим образом ограничить, является геометрией не только горловины, но и пространства-времени вокруг черной дыры или коллапсирующей звезды.

В данной главе изучается роль геометрии Шварцшильда в гравитационном коллапсе; в следующей главе исследуется ее роль в физике черных дыр.

§ 32.2. ТЕОРЕМА БИРКГОФА

Единственность геометрии Шварцшильда: теорема Биркгофа

Утверждение, что геометрия Шварцшильда имеет непосредственное отношение к гравитационному коллапсу, следует из теоремы Биркгофа [51]: *Пусть геометрия данной области пространства-времени* 1) *является сферически симметричной и* 2) *представляет собой решение эйнштейновских уравнений поля в вакууме. Тогда такая геометрия с необходимостью является частью геометрии Шварцшильда.* Внешнее поле любой электрически нейтральной сферически симметричной звезды удовлетворяет условиям теоремы Биркгофа, если звезда является статической, колеблющейся или коллапсирующей. Поэтому внешнее поле таких звезд должно быть частью геометрии Шварцшильда.

Физическое обоснование теоремы Биркгофа

Теорему Биркгофа легко понять с точки зрения физики. Рассмотрим равновесную конфигурацию, которая неустойчива относительно гравитационного коллапса и которая, подобно любой равновесной конфигурации (см. § 23.6), в качестве внешнего гравитационного поля имеет геометрию Шварцшильда. Наложим на эту конфигурацию сферически симметричное возмущение, так что она начнет радиально коллапсировать. Наложенное возмущение и последующий коллапс не могут повлиять на внешнее гравитационное поле до тех пор, пока поддерживается точная сферическая симметрия. Точно так же, как законы Максвелла запрещают монопольные электромагнитные волны, законы Эйнштейна запрещают монопольные гравитационные волны. При радиальном коллапсе распространение гравитационного воздействия наружу абсолютно невозможно.

Доказательство теоремы Биркгофа

Теорему Биркгофа не только легко понять, но и довольно легко доказать. Рассмотрим сферическую область пространства-времени. Уже одной сферической симметрии достаточно, чтобы гарантировать выполнение условий I, II и III дополнения 23.1 и обеспечить таким образом возможность введения шварцшильдовских координат

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2),$$
$$\Phi = \Phi\,(t,\ r) \text{ и } \Lambda = \Lambda\,(t,\ r). \tag{32.2}$$

[Доказательство см. в дополнении 23.1; отметим следующее: 1) для общности необходимо допустить, что $g_{tt} = -e^{2\Phi}$ и $g_{rr} = e^{2\Lambda}$ могут быть как положительными, так и отрицательными (никаких ограничений на знак!); 2) в тех событиях, где градиент «функции, связанной с длиной окружности» r обращается в нуль, нельзя ввести шварцшильдовские координаты. В упражнении 32.1 рассматривается как раз этот специальный случай, когда $(\nabla r)^2 = 0$.]

Подставим метрику (32.2) в эйнштейновские уравнения поля для вакуума, используя при этом ортогональные компоненты тензора Эйнштейна, выведенные в упражнении 14.16:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = r^{-2}\,(1 - e^{-2\Lambda}) + 2\,(\Lambda_{,r}/r)\,e^{-2\Lambda} = 0, \tag{32.3а}$$

$$G_{\hat{t}\hat{r}} = G_{\hat{r}\hat{t}} = 2\,(\Lambda_{,t}/r)\,e^{-(\Lambda+\Phi)} = 0, \tag{32.3б}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = 2\,(\Phi_{,r}/r)\,e^{-2\Lambda} + r^{-2}\,(e^{-2\Lambda} - 1) = 0, \tag{32.3в}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = +(\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}^2 - \Phi_{,r}\Lambda_{,r} + \Phi_{,r}/r - \Lambda_{,r}/r)\,e^{-2\Lambda} -$$
$$-(\Lambda_{,tt} + \Lambda_{,t}^2 - \Lambda_{,t}\Phi_{,t})\,e^{-2\Phi} = 0. \tag{32.3г}$$

Уравнение (32.3б) гарантирует, что Λ является функцией только r, после чего из уравнения (32.3а) получаем, что Λ имеет тот же вид, что и в метрике Шварцшильда:

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\ln|1 - 2M/r| \tag{32.4а}$$

Далее, уравнения (32.3в) и (32.3г) благодаря тождеству Бианки $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ становятся двумя эквивалентными уравнениями, решение которых есть

$$\Phi = \frac{1}{2}\ln|1 - 2M/r| + f\,(t). \tag{32.4б}$$

Здесь f — произвольная функция. Подставим выражения (32.4) в линейный элемент (32.2); при этом получим

$$ds^2 = -e^{2f(t)}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2).$$

Переопределим после этого временну́ю координату:

$$t_{\text{нов}} = \int e^{f(t)}\,dt$$

и приведем, таким образом, линейный элемент к шварцшильдовскому виду

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

Вывод: Если пространство-время вокруг какого-либо объекта обладает сферической симметрией и свободно от заряда, массы и каких бы то ни было полей, отличных от гравитационного поля, то можно ввести такие координаты, в которых метрика будет шварцшильдовской. Если сформулировать этот вывод, не прибегая к понятию координат, то мы получим: геометрия любой сферически симметричной вакуумной области пространства-времени является частью геометрии Шварцшильда (теорема Биркгофа). Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЕ

32.1. Единственность геометрии Рейснера — Нордстрема (курс 2)

Докажите следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы Биркгофа. Пусть геометрия данной области пространства-времени 1) сферически симметрична и 2) является решением эйнштейновских уравнений поля с электромагнитным полем в качестве источника. Тогда такая геометрия с необходимостью есть часть геометрии Рейснера — Нордстрема [уравнение (31.24б)], в которой электрические и магнитные поля, измеренные в обычной статической ортогональной системе отсчета, равны

$$\boldsymbol{E} = (Q_e/r^2)\,\boldsymbol{e}_{\hat{r}},\quad \boldsymbol{B} = (Q_m/r^2)\,\boldsymbol{e}_{\hat{r}},\quad Q = (Q_e^2 + Q_m^2)^{1/2}.$$

[*Указания*: 1. Сначала рассмотрите область пространства-времени, в которой $(\nabla r)^2 \neq 0$, используя те же методы, что и в тексте при доказательстве теоремы Биркгофа. В результате получается решение Рейснера — Нордстрема. 2. Любую область, имеющую размерность меньше четырех и в которой $(\nabla r)^2 = 0$ (примером такой области служит шварцшильдовский радиус), можно рассматривать как границу между двумя четырехмерными областями с $(\nabla r)^2 \neq 0$. Более того, геометрия такой области однозначно определяется геометрией граничащих друг с другом четырехмерных областей («условия сшивания», § 21.13). Поскольку примыкающие друг к другу четырехмерные области обязательно имеют геометрию Рейснера — Нордстрема (п. 1), то и области, «зажатые» между ними, имеют ту же геометрию. 3. Затем рассмотрите четырехмерную область, в которой $\nabla r = \mathbf{d}r$ является нулевым, но не равным нулю [1]). Покажите, что в таких областях существует система координат, в которой

$$ds^2 = -2\Psi\, dr\, dt + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

[1]) Напомним (см. часть III), что $\mathbf{d}r$ называется нулевым, т. е. лежит на световом конусе, если $\mathbf{d}r\cdot\mathbf{d}r = 0$, но при этом не обязательно, чтобы $\mathbf{d}r$ обращалось в нуль.— *Прим. перев.*

УПРАЖНЕНИЕ

где $\Psi = \Psi(r, t)$. Покажите далее, что тензор Риччи для этого линейного элемента имеет ортогональную компоненту

$$R_{\hat{0}\hat{0}} = 1/r^2,$$

в то время как тензор энергии-импульса для сферически симметричного электромагнитного поля обладает компонентой

$$8\pi T_{\hat{0}\hat{0}} = 8\pi\left(T_{\hat{0}\hat{0}} - \frac{1}{2} g_{\hat{0}\hat{0}} T\right) = Q^2/r^4, \quad Q = \text{const}.$$

Эти величины $R_{\hat{0}\hat{0}}$ и $8\pi T_{\hat{0}\hat{0}}$ должны быть равны (эйнштейновские уравнения поля), но, с другой стороны, этого не может быть, поскольку эти величины по-разному зависят от r. Это означает, что электромагнитное поле не может порождать области, в которых $\mathbf{dr} \neq 0$, а $\mathbf{dr}\cdot\mathbf{dr} = 0$. 4. В заключение рассмотрите четырехмерную область, в которой $\mathbf{dr} = 0$. Обозначьте постоянное значение r через a и покажите, что любое событие может быть выбрано за начало системы координат, обладающей локально хорошим поведением и такой, что

$$ds^2 = a^2(-d\tilde{\tau}^2 + e^{2\lambda}\, dz^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

$$\lambda = \lambda(\tilde{\tau}, z), \quad \lambda(\tilde{\tau} = 0, z) = 0, \quad \dot{\lambda}(\tilde{\tau} = 0, z) = 0.$$

(Система координат того же типа, что и система Новикова, см. § 31.4.) Покажите, что в ортогональной системе отсчета, связанной с таким выбором, сферическая симметрия требует, чтобы

$$\boldsymbol{E} = (Q_e/a^2)\, \boldsymbol{e}_{\hat{z}}, \quad \boldsymbol{B} = (Q_m/a^2)\, \boldsymbol{e}_{\hat{z}}, \quad Q = (Q_e^2 + Q_m^2)^{1/2};$$

после чего из эйнштейновских уравнений поля с необходимостью следует $Q = a$ и $e^{\lambda} = \cos\tilde{\tau}$, так что

$$ds^2 = Q^2(-d\tilde{\tau}^2 + \cos^2\tilde{\tau} dz^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

5. Это решение уравнений поля (иногда его называют «электромагнитной вселенной Бертотти [52] — Робинсона [53]»; оно исследовалось в системе координат, предложенной Линдквистом [54]) фактически является горловиной в решении Рейснера — Нордстрема для специального случая $Q = M$. Убедитесь в правильности этого утверждения, произведя следующее координатное преобразование в области, являющейся горловиной решения Рейснера—Нордстрема (уравнение (31.24б) с $Q = M$ и $|r - Q| \ll Q$):

$$r - Q = Qe^{-z}\cos\tilde{\tau}, \qquad t = Qe^{z}\operatorname{tg}\tilde{\tau}.$$

6. Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев получается одно из двух: либо вовсе нет решения, либо решением служит сегмент геометрии Рейснера — Нордстрема, что и требовалось доказать.] *Примечание.* В тексте при доказательстве теоремы Биркгофа не рассматривается случай $(\nabla r)^2 = 0$. Чтобы устранить

УПРАЖНЕНИЕ возникшую из-за этого неясность, достаточно заметить следующее: пункты 3 и 4, изложенные выше, приводят к выводу о том, что при $Q = 0$ в случае $(\nabla r)^2 = 0$ никаких решений не существует. Мы благодарны Г. Эллису, обратившему внимание на то, что в предварительном варианте этой книги был опущен случай $(\nabla r)^2 = 0$.

§ 32.3. ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ ЗВЕЗДЫ

Рассмотрим мгновенно статическую звезду, которая в следующий момент времени начинает коллапсировать. Ее пространственная геометрия в начальный момент шварцшильдовского координатного времени $t = 0$ делится на две части: вакуумная область вне звезды ($r > R > 2M$), геометрия которой является шварцшильдовской (теорема Биркгофа!), и внутренняя область звезды, где геометрия совершенно другая. Но какой бы ни была внутренняя геометрия, ее диаграмма погружения в момент времени $t = 0$ качественно похожа на диаграмму, приведенную на фиг. 23.1 (доказательство и обсуждение этого утверждения см. в § 23.8). Отметим, что пространственная геометрия звезды получается путем отбрасывания нижней вселенной в полной геометрии Шварцшильда (фиг. 31.5, *а*) и замены ее гладким (т. е. без сингулярности) «шаром», который содержит в себе вещество звезды.

Анализ гравитационного коллапса посредством изучения внешней по отношению к звезде геометрии Шварцшильда

Аналогичным образом, чтобы в шварцшильдовской системе координат, в системе координат Крускала — Шекереса или в сжимающейся системе координат Эддингтона — Финкельштейна проследить за коллапсом звезды, начавшимся сразу после $t = 0$, мы можем отбросить ту часть координатной диаграммы, которая лежит внутри поверхности звезды, и оставить лишь внешнюю по отношению к звезде область, которая описывается геометрией Шварцшильда (фиг. 32.1). Вместо отброшенной внутренней шварцшильдовской области мы должны ввести некоторую другую систему координат, другой линейный элемент и другую координатную диаграмму, которые дают правильное описание области, лежащей внутри коллапсирующей звезды.

С помощью обрезанной координатной диаграммы (такой, как показано на фиг. 32.1, *а*—*в*) легко обнаружить и изучить различные специфические черты коллапса под гравитационный радиус.

Гравитационный радиус как точка, откуда нет возврата, и «сжатие» в $r = 0$

1. Независимо от жесткости вещества коллапсирующей (сферической) звезды, если ее поверхность сколлапсировала под гравитационный радиус, то после этого звезда будет продолжать коллапсировать до тех пор, пока ее поверхность не будет сжата в сингулярность при $r = 0$. Мы приходим к этому выводу, вспоминая, что поверхность звезды не может двигаться быстрее света и, следовательно, угол между мировой линией поверхности и осью v на диаграмме Крускала — Шекереса должен быть всегда меньше 45°.

2. Никакой сигнал, например фотон, посланный с поверхности звезды после того, как поверхность сколлапсировала под гравитационный радиус, никогда не сможет уйти к внешнему наблюдателю. Все сигналы, испущенные уже под гравитационным радиусом, захватываются и уничтожаются в процессе коллапса окружающей звезду геометрии в сингулярность при $r = 0$, когда пространство вокруг звезды «разрывается».

3. Следовательно, внешний наблюдатель никогда не сможет видеть звезду после того, как она пересекла свой гравитационный радиус, и никогда не сможет видеть сингулярность, которая является завершением коллапса,— разве что он пожелает сам упасть под гравитационный радиус и ценой собственной жизни заплатить за полученные таким путем знания.

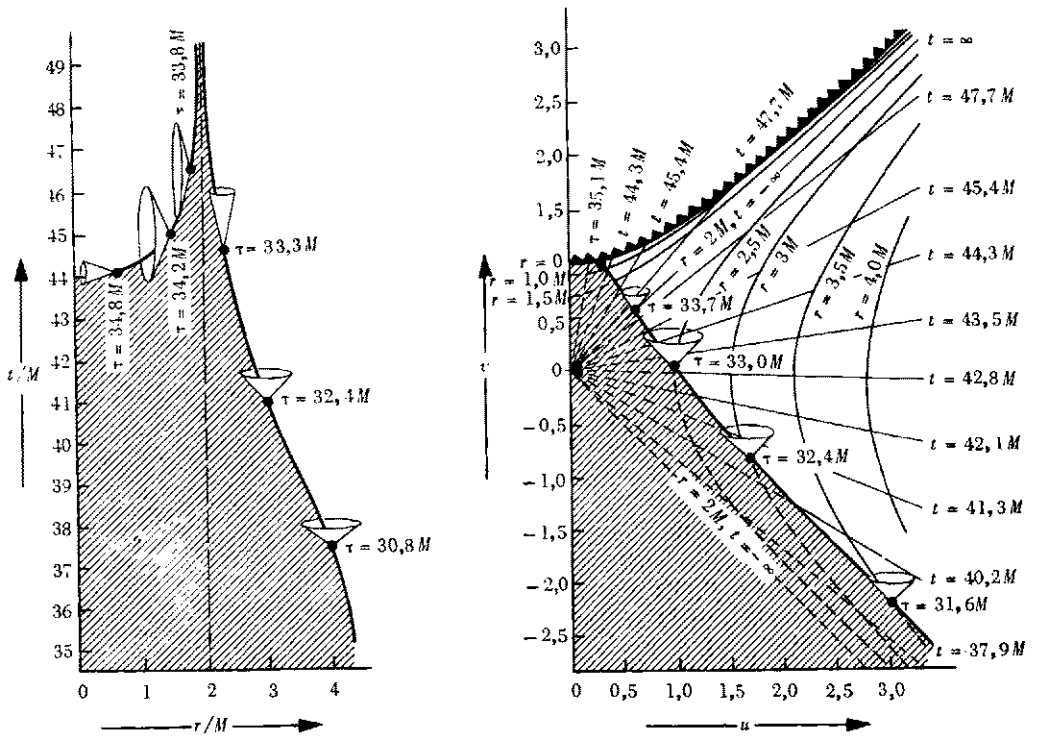
Означает ли это, что коллапсирующая звезда мгновенно и полностью исчезает из поля зрения внешнего наблюдателя, как только она достигает гравитационного радиуса? Нет, согласно приведенному на фиг. 32.1 исследованию, это будет выглядеть иначе. Поместим на поверхности звезды астрофизика, который будет информировать удаленного ($r \gg 2M$) неподвижного астронома о ходе коллапса, посылая серию сигналов, разделенных равными промежутками времени. На пространственно-временной диаграмме, показанной на фиг. 32.1, *в*, эти сигналы распространяются вдоль нулевых линий. Сигналы посылаются из точек, лежащих на мировой линии поверхности звезды, а принимаются удаленным астрономом в точках пересечения сигналов с его мировой линией $r = \text{const} \gg M$. По мере того как звезда коллапсирует, подходя все ближе и ближе к своему гравитационному радиусу, сигналы, посылаемые с равными промежутками времени по часам астрофизика, будут приниматься все реже и реже. Только через бесконечный промежуток времени астроном получит сигнал, посланный непосредственно перед тем, как звезда достигла гравитационного радиуса, и он никогда не получит сигналов, посланных уже из-под гравитационного радиуса. Эти сигналы, так же как и сам астрофизик, посылающий их, совершив короткое путешествие, будут захвачены и уничтожены в сингулярности при $r = 0$. Коллапсирует не только звезда; сама геометрия вокруг звезды тоже коллапсирует.

Красное смещение сигналов, посланных непосредственно перед пересечением гравитационного радиуса

Следовательно, удаленному астроному кажется, что коллапс звезды замедляется по мере того, как звезда приближается к своему гравитационному радиусу: свет, приходящий от звезды, испытывает все большее и большее красное смещение. Кажется, что часы, расположенные на поверхности звезды, идут все медленней и медленней. С точки зрения удаленного астронома, звезда достигает своего гравитационного радиуса за бесконечное время и никогда не оказывается под гравитационным радиусом.

Оптическое проявление коллапсирующей звезды

Математическое исследование задачи об оптическом проявлении коллапсирующей звезды было впервые проведено Оппенгеймером и Снайдером [55], которые главное внимание обращали



а Шварцшильдовская диаграмма

б Диаграмма Крускала—Шекереса

ФИГ. 32.1.

Свободный коллапс звезды от начального радиуса $R_i = 10M$, изображенный: *а* — в шварцшильдовской системе координат, *б* — в системе координат Крускала — Шекереса, *в* — в сжимающейся системе координат Эддингтона — Финкельштейна (см. дополнение 31.2). Заштрихована область пространства-времени внутри коллапсирующей звезды, белым изображается область вне звезды. Шварцшильдовской является геометрия лишь внешней по отношению к звезде области. Кривая, разделяющая заштрихованную и белую области, есть геодезическая мировая линия поверхности коллапсирующей звезды [уравнения (31.10) или (32.10) при $r_{\text{макс}} = R_i = 10M$]. Эта мировая линия параметризована с помощью собственного времени τ, измеряемого наблюдателем, который расположен на поверхности звезды; у поверхности показаны радиальные световые конусы, вычисленные исходя из того, что $ds^2 = 0$.

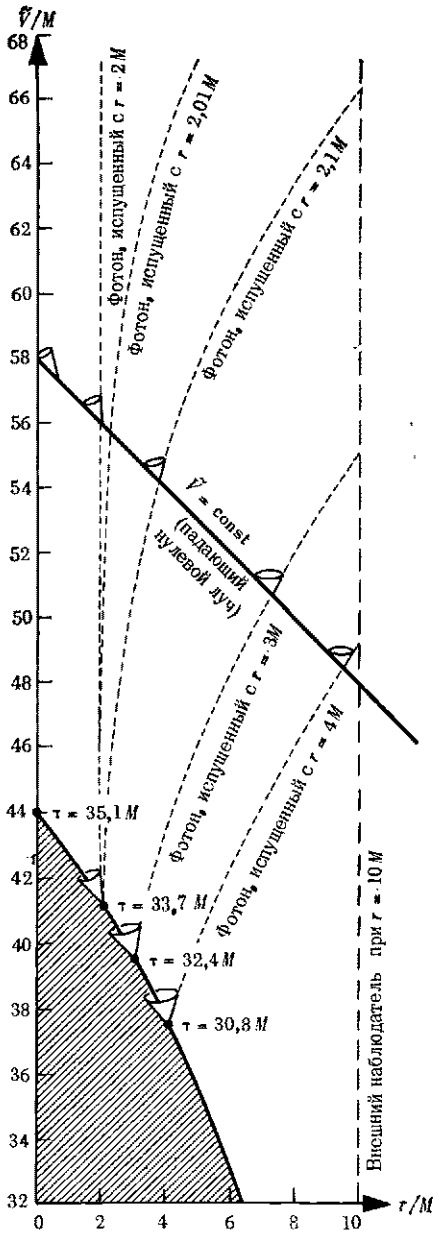
Заметим, что хотя в системах координат Шварцшильда и Эддингтона — Финкельштейна форма световых конусов различна при разных τ, в системе координат Крускала — Шекереса все световые конусы имеют одну и ту же форму. Это объясняется тем, что в u,v-плоскости световые лучи распространяются вдоль прямых линий, которые имеют наклон 45° ($dv = \pm du$), в то время как в плоскостях (r, t) и $(r, \tilde{V})$ свет распространяется вдоль искривленных линий.

Пространственно-временная диаграмма Крускала — Шекереса, показанная на рисунке, связана со шварцшильдовской диаграммой уравнениями (31.13) и сдвигом шварцшильдовского времени $t \to t + 42{,}8M$. Диаграмма Эддингтона — Финкельштейна связана со шварцшильдовской диаграммой соотношением $\tilde{V} = t + r^* = t + r + 2M \ln|r/2M - 1|$ (см. дополнение 31.2).

Из этих диаграмм становится очевидным, что свободный коллапс характеризуется постоянно уменьшающимся радиусом, который изменяется от $R = 10M$ до $R = 0$ за конечный и короткий промежуток собственного времени $\Delta\tau = 35{,}1M$. Точка $R = 0$ и целая область $r = 0$ вне звезды образуют физическую «сингулярность», в которой бесконечные приливные силы (согласно классической не квантовой теории гравитации) могут сжать и действительно сжимают вещество до бесконечной плотности (см. конец § 31.2, а также § 32.6).

На диаграмме Эддингтона — Финкельштейна изображены серии фотонов, испущенных радиально с поверхности коллапсирующей звезды; эти фотоны принимаются наблюдателем, расположенным на радиусе $r = R_i = 10M$. Наблюдатель в конце концов примет все фотоны, которые были испущены радиально вне гравитационного радиуса; но все фотоны, испущенные после того, как поверхность звезды пересекла гравитационный радиус, будут в конце концов затянуты в сингулярность $r = 0$, а любой фотон, испущенный радиально на самом гравитационном радиусе, останется навсегда на этом радиусе.

Несвободный коллапс похож на показанный здесь. Когда имеются градиенты давления, меняется лишь форма мировой линии поверхности звезды.



б Диаграмма Эддингтона — Финкельштейна

на фотоны, движущиеся по радиусу. Позднее эта проблема вновь изучалась многими исследователями (см., например, работы [56—58]). Важнейшие количественные результаты этих исследований заключаются в следующем. На поздних стадиях коллапса, когда, с точки зрения удаленного астронома, звезда приблизилась к своему гравитационному радиусу, астроном наблюдает экспоненциальное уменьшение ее полной светимости:

$$L \sim \exp\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{t}{2M}\right). \tag{32.5}$$

Одновременно с этим фотоны, движущиеся по радиальным траекториям, приходят к астроному с экспоненциально нарастающими красными смещениями

$$z = \Delta\lambda/\lambda \sim e^{t/4M}. \tag{32.6}$$

Однако на поздних стадиях коллапса главный вклад в общее свечение звезды вносят не фотоны, движущиеся вдоль радиальных геодезических из близких к гравитационному радиусу областей, а фотоны, которые остались на неустойчивой круговой орбите $r = 3M$ после прохождения через эту орбиту поверхности звезды (см. § 25.6 и дополнение 25.7). С течением времени эти фотоны постепенно покидают диффузную оболочку из захваченных на $r = 3M$ фотонов и летят к удаленному наблюдателю, имея, по измерениям этого наблюдателя, красное смещение $z \approx 2$. Следовательно, на поздних стадиях коллапса спектральные линии весьма сильно расширяются, но наибольшая яркость линий соответствует красному смещению $z \approx 2$.

Заметим, что характерное время, за которое светимость уменьшается, а красное смещение увеличивается в e раз, весьма мало:

$$\tau_{\text{хар}} = 2M \approx 1 \cdot 10^{-5}\,(M/M_\odot)\ \text{с} = \tag{32.7}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{время, за которое свет в плоском пространстве}\\ \text{проходит расстояние, равное гравитационному радиусу}\end{pmatrix}.$$

Здесь $M_\odot$ обозначает массу Солнца.

УПРАЖНЕНИЕ **32.2. Красное смещение в ходе коллапса**

а. Пусть радиопередатчик, расположенный на поверхности коллапсирующей звезды, испускает монохроматические волны с длиной волны $\lambda_{\text{исп}}$ и пусть удаленный наблюдатель, имеющий те же, что и передатчик, угловые координаты θ и ϕ, принимает эти волны. Покажите, что при больших значениях времени принимаемая длина волны изменяется по закону

$$\lambda_{\text{прин}}/\lambda_{\text{исп}} \sim e^{t/4M} \tag{32.8а}$$

[уравнение (32.6)], где t — собственное время удаленного наблюдателя.

2

УПРАЖНЕНИЕ

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. Для ее изучения не требуется знакомство с материалом, изложенным до сих пор в курсе 2, но сама эта часть необходима как подготовительный материал для изучения 1) той части гл. 33 (черные дыры), которая относится к курсу 2, и 2) гл. 34 (сингулярности и глобальные методы)

б. Используя кинетическую теорию для выходящих фотонов (закон сохранения плотности в фазовом пространстве, т. е. теорему Лиувилля, § 22.6), покажите, что поток энергии принимаемого излучения [эрг/(см^2·с)] изменяется по закону

$$F \sim e^{-t/M}. \tag{32.8б}$$

в. Предположим, что ядерные реакции в центре звезды порождают нейтрино с энергией $E_{\text{исп}}$ и эти нейтрино свободно летят наружу (поглощение нейтрино в звезде пренебрежимо мало). Покажите, что энергия каждого нейтрино, принимаемого удаленным наблюдателем, уменьшается при больших временах по закону

$$E_{\text{прин}}/E_{\text{исп}} \sim e^{-t/4M}. \tag{32.9а}$$

г. Покажите, что поток энергии нейтрино уменьшается при больших временах как

$$F \sim e^{-t/2M}. \tag{32.9б}$$

д. Объясните с помощью элементарных соображений, почему законы убывания для энергии (32.8а) и (32.9а) одинаковы, а законы убывания для потоков энергии (32.8б) и (32.9б) отличаются друг от друга.

е. Пусть коллапсирующая звезда испускает фотоны со своей поверхности с той же скоростью, что и черное тело:

$$\frac{dN}{d\tau} = \left(1{,}5\cdot 10^{11}\ \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{К}^3}\right) \times \begin{pmatrix}\text{площадь}\\ \text{поверхности}\\ \text{звезды}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{температура}\\ \text{поверхности}\end{pmatrix}^3.$$

Пусть удаленный наблюдатель подсчитывает фотоны, проходящие через сферу радиуса $r \gg M$, на которой он расположен. Пусть он начал свой подсчет в тот момент, когда увидел (посредством распространяющихся наружу по радиусу фотонов), что центр поверхности звезды проходит через радиус $r = 3M$. Покажите, что время, которое должны ждать наблюдатель и его коллеги, чтобы последний из всех когда-либо вышедших наружу фотонов достиг их, по порядку величины равно

$$t = (M/M_\odot)\,[8\cdot 10^{-4} + 5\cdot 10^{-5}\lg(T_{11}M/M_\odot)]\ \text{с}, \tag{32.9в}$$

где T_{11} — температура поверхности звезды в единицах 10^{11} К.

§ 32.4. КОЛЛАПС ЗВЕЗДЫ С ОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И РАВНЫМ НУЛЮ ДАВЛЕНИЕМ

Коллапс однородного «пылевого шара» из состояния покоя:

Если мы обратим внимание на внешнюю область коллапсирующей звезды и на точную мировую линию, которой следует ее поверхность в геометрии Шварцшильда, то сразу столкнемся с довольно сложной математикой. Самым простым для рассмотрения случаем является «звезда» с однородной плотностью и равным нулю давлением; в самом деле, только этот случай в настоящее время рассмотрен до конца. Первоначальное и вполне законченное исследование коллапса такого однородного «пылевого шара» изложено в классической работе Оппенгеймера и Снайдера [55]. Позднее другие исследователи возвращались к этой проблеме с несколько иных точек зрения, используя иные системы координат. Подход, изложенный здесь, разработан Беккедорфом и Мизнером [59].

Поскольку нет градиентов давления, которые могли бы отклонять движение частиц, расположенных на поверхности пылевого шара, они должны двигаться вдоль радиальных геодезических во внешней геометрии Шварцшильда. Если шар начинает сжиматься из состояния покоя с конечным радиусом $R = R_i$ в момент времени $t = 0$, то последующее движение его поверхности описывается уравнениями (31.10):

1) мировая линия поверхности шара во внешней системе координат Шварцшильда

$$R = (R_i/2)\,(1 + \cos\eta), \tag{32.10а}$$

$$t = 2M \ln\left|\frac{(R_i/2M-1)^{1/2}+\operatorname{tg}(\eta/2)}{(R_i/2M-1)^{1/2}-\operatorname{tg}(\eta/2)}\right| + 2M\,(R_i/2M-1)^{1/2}\,[\eta+(R_i/4M)\,(\eta+\sin\eta)]. \tag{32.10б}$$

Здесь R — шварцшильдовская радиальная координата (т. е. $4\pi R^2$ — площадь поверхности звезды) в момент шварцшильдовского времени t. Эта мировая линия изображена на фиг. 32.1 для $R_i = 10M$ в шварцшильдовских координатах, в координатах Крускала — Шекереса и в координатах Эддингтона — Финкельштейна. Собственное время, которое показывают часы на поверхности коллапсирующей звезды, дается выражением (31.10б):

$$\tau = (R_i^3/8M)^{1/2}\,(\eta + \sin\eta). \tag{32.10в}$$

Заметим, что коллапс начинается, когда параметр η равен нулю ($R = R_i$, $t = \tau = 0$), и заканчивается в сингулярности ($R = 0$, $\eta = \pi$). При этом длительность всего коллапса, измеренная по часам, установленным на любой из пробных частиц, падающих вместе с пылью, определяется интервалом собственного времени

$$\Delta\tau = \pi\,(R_i^3/8M)^{1/2}.$$

Весьма интересно то обстоятельство (хотя оно и объясняется случайным совпадением), что в ньютоновской теории для достижения бесконечной плотности при коллапсе, протекающем по

законам свободного падения, требуется в точности такой же интервал времени [см. уравнение (25.27′), фиг. 25.3 и приведенное там обсуждение].

Что же происходит внутри пылевого шара в процессе коллапса? Для пыли в отсутствие давления можно было бы рассмотреть целый ряд различных внутренних областей (упражнение 32.8). Но мы сосредоточим внимание здесь на простейшей из них: на внутренней области, которая является однородной и изотропной всюду, за исключением границы, т. е. на такой внутренней области, которая локально тождественна фридмановской космологической модели, заполненной пылью (дополнение 27.1). Должна ли фридмановская внутренняя область быть «открытой» ($k = -1$), «плоской» ($k = 0$) или «закрытой» ($k = +1$)? Подходит только закрытый вариант, поскольку мы уже потребовали [уравнение (32.10)], чтобы вначале звезда находилась в состоянии покоя (начальная скорость изменения плотности равна нулю; «момент максимального расширения»).

2) область внутри шара тождественна некоторой части закрытой фридмановской вселенной

Используя сопутствующие гиперсферические координаты χ, θ, ϕ для внутренней области звезды и помещая начало координат в центр звезды, мы можем записать линейный элемент в знакомой фридмановской форме

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)]. \tag{32.11}$$

Здесь $a(\tau)$ дается известными соотношениями для циклоиды

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\,a_m\,(1+\cos\eta), \\ \tau &= \tfrac{1}{2}\,a_m\,(\eta+\sin\eta), \end{aligned} \tag{32.12}$$

а плотность определяется выражением

$$\rho = (3a_m/8\pi)\,a^{-3} = (3/8\pi a_m^2)\left[\tfrac{1}{2}\,(1+\cos\eta)\right]^{-3} \tag{32.13}$$

[см. уравнения (1), (9), (4) и (5) дополнения 27.1, в которых η должно быть заменено на $\eta + \pi$].

В связи с этим внутренним решением возникает лишь одна трудность. В случае космологии решение было всюду однородным и изотропным. Здесь же однородность и изотропность нарушаются на поверхности звезды, расположенной при некотором одном и том же для всех τ значении радиуса

3) сшивание фридмановской внутренней области со шварцшильдовской внешней областью

$$\chi = \chi_0, \tag{32.14}$$

которое определяется как полярный угол на гиперсфере и является сопутствующей координатой (см. первый рисунок в дополнении 27.2). На этой гиперповерхности (т. е. на трехмерной мировой трубке, внутри которой заключены мировые линии

всех частиц вещества звезды) внутренняя фридмановская геометрия должна плавным образом переходить во внешнюю геометрию Шварцшильда. Если такой переход осуществить нельзя, то внутреннюю область коллапсирующей звезды нельзя описывать фридмановским линейным элементом (32.11). Примером случая, когда плавный переход невозможен, служит внутренняя область с однородной плотностью и с однородным, но не равным нулю давлением. В этом случае на поверхности звезды возник бы бесконечно большой градиент давления, приводящий к тому, что внешние слои звезды выбрасывались бы наружу, а внутрь по направлению к центру распространялась бы волна разряжения. Однородное распределение плотности и давления было бы сразу же нарушено.

Если давление равно нулю, то такой плавный переход возможен. Чтобы убедиться в этом хотя бы частично, рассмотрим самостоятельные и независимые предсказания, которые даются внутренним и внешним решениями относительно длины окружности на поверхности звезды $C = 2\pi R$ как функции собственного времени τ, измеряемого на поверхности. Внешнее шварцшильдовское решение дает соотношения для циклоиды

$$C = 2\pi R = 2\pi\,(R_i/2)\,(1 + \cos\eta),$$
$$\tau = (R_i^3/8M)^{1/2}\,(\eta + \sin\eta) \tag{32.15}$$

[уравнения (32.10)]. Внутреннее фридмановское решение предсказывает аналогичные соотношения для циклоиды

$$C = 2\pi R = 2\pi a \sin\chi_0 = 2\pi\left(\tfrac{1}{2}\,a_m \sin\chi_0\right)(1 + \cos\eta),$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\,a_m\,(\eta + \sin\eta). \tag{32.16}$$

Эти два предсказания полностью согласуются друг с другом для любого момента времени в том и только в том случае, если

$$R_i = a_m \sin\chi_0, \tag{32.17а}$$
$$M = \tfrac{1}{2}\,a_m \sin^3\chi_0. \tag{32.17б}$$

Более полная проверка сшивания решений дана в упражнении 32.4.

Чтобы составить себе более глубокое представление об этой идеализированной модели гравитационного коллапса, см. дополнение 32.1.

УПРАЖНЕНИЯ

32.3. Диаграммы погружения для коллапсирующей звезды и распространение фотонов

Проверьте подробно правильность характерных черт однородного коллапса, описанных в дополнении 32.1.

32.4. Сшивание фридмановской внутренней и шварцшильдовской внешней областей

Эйнштейновские уравнения поля удовлетворяются на поверхности звезды в том и только в том случае, если внутренняя и внешняя геометрии трехмерной мировой трубки поверхности одинаковы независимо от того, определяется ли она во внешней или же во внутренней области (доказательство и обсуждение этого утверждения даны в § 21.13). Убедитесь в том, что в рассмотренном выше случае коллапсирующей звезды внутренняя и внешняя геометрии сшиваются на границе между фридмановской внутренней и шварцшильдовской внешней областями. [*Указания*: а. Используйте в качестве координат на мировой трубке поверхности звезды координаты η, θ, ϕ и покажите, что внутренняя геометрия обладает одним и тем же линейным элементом

$$ds^2 = a^2(\eta)\,[-d\eta^2 + \sin^2\chi_0\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \qquad (32.18а)$$

независимо от того, определяется ли она в шварцшильдовской внешней области или же во фридмановской внутренней области. б. Покажите, что внешняя кривизна мировой трубки поверхности имеет одни и те же компоненты

$$K_{\eta\eta} = K_{\eta\theta} = K_{\eta\phi} = K_{\theta\phi} = 0,$$

$$K_{\theta\theta} = K_{\phi\phi}/\sin^2\theta = -a(\eta)\sin\chi_0\cos\chi_0 \qquad (32.18б)$$

как в шварцшильдовской внешней, так и во фридмановской внутренней областях.]

32.5. Коллапсирующие из бесконечности звезды

а. Чтобы получить модель звезды, коллапсирующей из состояния покоя с бесконечным начальным радиусом, составьте из обрезанной геометрии Шварцшильда и из обрезанной фридмановской «плоской» ($k = 0$) геометрии единую геометрию. [*Указание*: Мировая линия поверхности этой звезды в шварцшильдовской геометрии дается уравнениями (31.2).]

б. Аналогичным образом составьте из обрезанной шварцшильдовской геометрии и обрезанной фридмановской «открытой» ($k = -1$) вселенной одну геометрию с тем, чтобы получить в результате модель звезды, коллапсирующей из бесконечности с не равной нулю начальной скоростью сжатия.

Дополнение 32.1. ИДЕАЛИЗИРОВАННАЯ КОЛЛАПСИРУЮЩАЯ ЗВЕЗДА С ФРИДМАНОВСКОЙ ВНУТРЕННЕЙ И ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТЯМИ[1])

Начальное состояние

1. Возьмем фридмановскую вселенную радиуса $a = a_m$ в момент ее наибольшего расширения $\eta = 0$ и отсечем и отбросим область $\chi_0 < \chi \leqslant \pi$, где χ_0 — некоторый

[1]) Подтверждение приведенных здесь результатов см. в § 32.4 и в упражнениях 32.3 и 32.4.

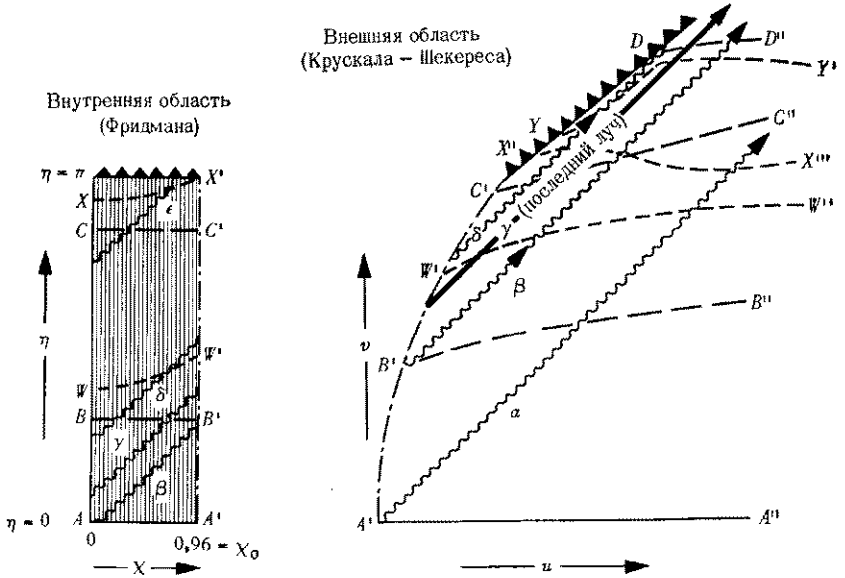
угол меньше $\pi/2$. 2. Возьмем шварцшильдовскую геометрию с массой $M = (a_m/2)\sin^3\chi_0$ в момент времени $t = 0$ и отсечем и отбросим область $r < R_i = a_m \sin\chi_0$. 3. Гладко склеим оставшиеся куски фридмановской и шварцшильдовской геометрий вдоль поверхностей отреза. Получившийся в результате объект будет представлять собой мгновенно статическую звезду с однородной плотностью $\rho_i = 3/(8\pi a_m^2)$, массой $M = (a_m/2)\sin^3\chi_0$ и радиусом $R_i = a_m \sin\chi_0$.

Последующая эволюция

Позволим этой звезде коллапсировать из начального состояния, подчиняясь эйнштейновским уравнениям поля. Внутренняя обрезанная фридмановская вселенная и внешняя обрезанная шварцшильдовская геометрия будут эволюционировать в точности так же, как если бы от них никогда ничего не отрезали и не составляли из них единую геометрию; в ходе этой эволюции гладкость сшивания внутренней и внешней областей не будет нарушаться!

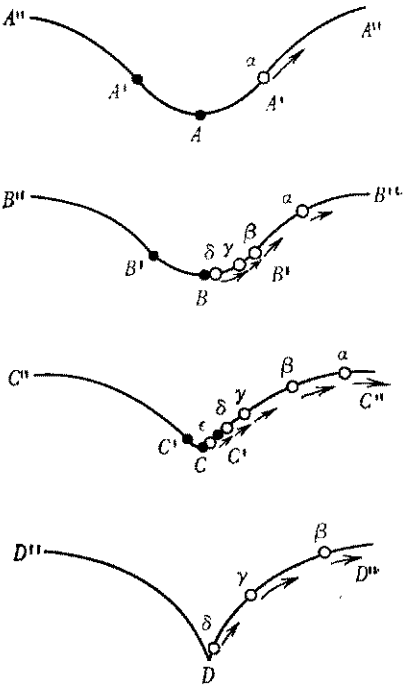
Детальная картина коллапса

Рассмотрим детальную картину коллапса, используя последовательности диаграмм погружения (истории $ABCD$ и $AWXY$) и используя фотоны, распространяющиеся по радиусам наружу (фотоны α, β, γ, δ, ε). Для рассматриваемого здесь примера выбраны следующие значения параметров: $\chi_0 = 0{,}96$ и $R_i/M = 2/\sin^2\chi_0 = 3$.



История коллапса, исследованная с помощью гиперповерхностей $ABCD$

1. Начальная конфигурация $A — A' — A''$, построенная путем обрезания и сшивания в моменты времени $\eta = t = 0$.
2. Каждая последующая конфигурация в качестве своей внутренней области имеет сечение постоянного фридмановского времени η.
3. Внутренняя область всегда остается сферической чашей с половинным углом χ_0, но с течением времени она сжимается от радиуса $R = R_i = a_m \sin \chi_0$ до $R = 0$.
4. Все вещество звезды одновременно сжимается до бесконечной плотности в тот момент, когда R достигает нулевого значения, и на внешней шварцшильдовской «воронке» в этот момент образуется сингулярность типа излома.
5. С течением времени этот излом стягивает принадлежащую воронке область $r < 2M$ с такой быстротой, что даже распространяющийся наружу фотон δ захватывается и уничтожается.

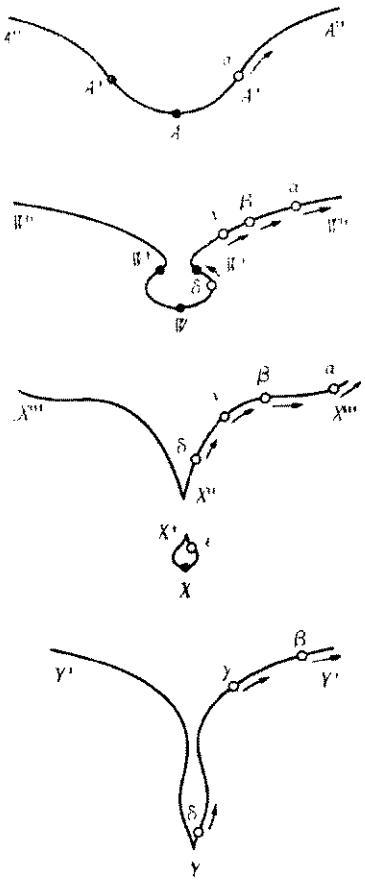


Чтобы эти диаграммы погружения стали двумерными, аналогичными показанным на фиг. 23.1, необходимо произвести вращение этих диаграмм вокруг вертикальной оси.

История, исследованная с помощью гиперповерхностей $AWXY$

1. Начальная конфигурация $A — A' — A''$, как и прежде, построена путем обрезания и сшивания при $\eta = t = 0$.
2. Последующие гиперповерхности сильно отличаются от гиперповерхности $\eta = \text{const}$.
3. С течением времени прямо на внешней стороне поверхности звезды в геометрии пространства-времени развивается горловина.
4. Горловина стягивается все сильнее и сильнее и, наконец, разрывается, после чего звезда становится полностью изолированной от остальной вселенной, а во внешней геометрии, где до этого была звезда, остается сингулярность типа излома.

5. Изолированная звезда в своей собственной малой изолированной вселенной продолжает сжиматься до тех пор, пока не достигнет бесконечной плотности; в это время во внешней вселенной начинает развиваться другой перешеек и возникающий излом быстро захватывает фотон δ.



Истории $ABCD$ и $AWXY$ сильно отличаются друг от друга. Это обстоятельство подчеркивает «многопалость времени» в общей теории относительности. Гиперповерхность, на которой исследуется геометрия, может в какой-то одной области по выбору группы исследователей эволюционировать быстрее, чем в других областях. Таким образом, ответ на вопрос, сколлапсирует ли первой та или другая область звезды или же коллапс завершается одновременно по всей звезде, зависит как от геометрии пространства-времени, так и от выбора сечения. Следовательно, группа исследователей по своему усмотрению выбирает определенные сечения, и, значит, исследователи в этом смысле сами оказывают влияние на то, какие пространственноподобные сечения предстанут перед ними в ходе исследований. Однако контролировать или изменять геометрию пространства-времени, в которой они производят эти сечения, они не могут. Пока массы исследователей пренебрежимо малы и они выступают лишь в роли пробных объектов они не могут оказывать никакого влияния на пространство-время. Последнее полностью определяется выбором начальных условий коллапса. Короче говоря, пространство-время четырехмерно, а сечения всего лишь трехмерны (а на приведенных здесь рисунках они двумерны и одномерны). Любая последовательность сечений позволяет увидеть лишь одну какую-то сторону всей истории. Чтобы увидеть полную картину, мы должны либо исследовать динамику геометрии, которая выявляется при варьировании выбора сечений, либо, как это обычно и делается, рассматривать геометрию пространства-времени в целом.

§ 32.5. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЙ КОЛЛАПС В ПРИСУТСТВИИ ВНУТРЕННИХ СИЛ ДАВЛЕНИЯ

Сферический коллапс с давлением качественно похож на коллапс без давления

Если рассматривается только внешнее гравитационное поле, то коллапс сферически симметричной звезды с давлением отличается от свободного коллапса лишь тем, что поверхность звезды в этих двух процессах движется по разным мировым линиям во внешней геометрии Шварцшильда. Поскольку внешняя геометрия

в обоих случаях одна и та же, *качественные аспекты свободного коллапса, описанные в последнем параграфе, могут быть без изменений перенесены на тот случай, когда внутренним давлением пренебрегать нельзя.*

Важный вопрос состоит в следующем: может ли большое внутреннее давление каким-то образом помешать коллапсирующей звезде сжаться до бесконечной плотности, при которой возникают бесконечные приливные силы? Из диаграммы Крускала — Шекереса, показанной на фиг. 32.1, *в*, становится очевидным, что если звезда сжалась под свой гравитационный радиус ($R < 2M$), то никакое внутреннее давление, каким бы сильным оно ни было, не может воспрепятствовать сжатию поверхности звезды в сингулярность. Поверхность должна двигаться вдоль времениподобной мировой линии, а все такие мировые линии внутри $r = 2M$ попадают в $r = 0$. Хотя мы не располагаем в настоящее время соответствующей теоремой, мы можем высказать разумное предположение, что если поверхность сферической конфигурации сжата в сингулярность $r = 0$, то и вся внутренняя область звезды также должна быть сжата в эту сингулярность.

Динамика внутренней области сферически симметричной коллапсирующей звезды с давлением исследована менее детально, чем динамика внешней шварцшильдовской области. Однако в самое последнее время благодаря проведенным машинным расчетам и аналитическим исследованиям мы существенно продвинулись в изучении динамики внутренней области (см. обзор [19]). В ходе этих расчетов и исследований не было обнаружено каких-либо принципиально новых (или по крайней мере неожиданных) особенностей коллапса помимо тех, которые имели место уже в простейшем случае свободного коллапса с однородной плотностью, рассмотренном в последнем параграфе.

32.6. Сферически симметричный коллапс в общем случае: метрика в сопутствующих координатах

УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрим неоднородную звезду с давлением, которая испытывает сферически симметричный коллапс. Одной сферической симметрии достаточно, чтобы обеспечить существование шварцшильдовской системы координат (t, r, θ, ϕ) как во внешней, так и во внутренней областях звезды [см. уравнение (32.2) и предыдущее обсуждение]. Припишем каждой сферической оболочке в звезде некоторое значение параметра a, указывающее, сколько барионов содержится внутри этой оболочки. Тогда $r(a, t)$ есть мировая линия оболочки с меткой a. Выражение для этих мировых линий можно обратить, чтобы получить $a(t, r)$, т. е. число барионов внутри радиуса r в момент времени t. Покажите, что существует новая временная координата $\tilde{t}(t, r)$, такая, что линейный элемент (32.2), переписанный в координатах $(\tilde{t}, a, \theta, \phi)$, имеет

УПРАЖНЕНИЯ следующий вид:

$$ds^2 = -e^{2\widetilde{\Phi}}\,d\widetilde{t}^2 + \left[\frac{(\partial r/\partial a)_{\widetilde{t}}\,da}{\Gamma}\right]^2 + r^2\,d\Omega^2, \tag{32.19а}$$

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}(\widetilde{t}, a), \quad r = r(\widetilde{t}, a), \quad \Gamma = \Gamma(\widetilde{t}, a). \tag{32.19б}$$

Это «сопутствующие синхронизированные координаты» для внутренней области звезды.

32.7. Адиабатический сферически симметричный коллапс: уравнения эволюции [60]

Внутреннюю область коллапсирующей звезды будем описывать метрикой (32.19) в сопутствующих синхронизированных координатах, плотностью числа барионов n, полной плотностью массы-энергии ρ и давлением p. Поскольку вещество покоится относительно выбранной системы координат, 4-скорость газообразного вещества звезды

$$\mathbf{u} = e^{-\widetilde{\Phi}}\partial/\partial\widetilde{t}. \tag{32.20}$$

Производную по собственному времени в сопутствующей веществу системе отсчета обозначим точкой сверху, например

$$\dot{n} \equiv \mathbf{u}\,[n] = e^{-\widetilde{\Phi}}\,(\partial n/\partial\widetilde{t})_a,$$

а частную производную по числу барионов обозначим штрихом, например

$$n' \equiv (\partial n/\partial a)_{\widetilde{t}}.$$

Обозначим через U скорость изменения величины $(1/2\pi) \times$ (длина окружности оболочки), измеряемой человеком, который движется вместе с данной оболочкой:

$$U \equiv \dot{r}; \tag{32.21а}$$

обозначим через $m(\widetilde{t}, a)$ «полную массу-энергию», заключенную внутри оболочки с меткой a в момент времени t:

$$m(\widetilde{t}, a) \equiv \int_0^a 4\pi r^2 \rho\,(\widetilde{t}, a)\,r'\,da \tag{32.21б}$$

(см. дополнение 23.1, где приведено обсуждение такого способа локализации массы-энергии). Допустим, что коллапс является адиабатическим (отсутствует поток энергии между соседними оболочками; тензор энергии-импульса полностью совпадает с тензором энергии-импульса идеальной жидкости).

а. Покажите, что уравнения коллапса [закон сохранения числа барионов (22.3), локальный закон сохранения энергии (22.11а), уравнения Эйлера (22.13) и эйнштейновские уравнения поля (упражнение 14.16)] могут быть сведены к следующим восьми

уравнениям для восьми функций $\widetilde{\Phi}$, Γ, r, n, ρ, p, U, m:

$$\dot{r} = U \quad \text{(динамическое уравнение для } r\text{)}, \tag{32.22а}$$

$$\frac{(nr^2)^{\cdot}}{nr^2} = -\frac{U'}{r'} \quad \text{(динамическое уравнение для } n\text{)}, \tag{32.22б}$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = \frac{\dot{n}}{n} \quad \text{всюду, за исключением фронта ударной волны, где адиабатичность нарушается (динамическое уравнение для } \rho\text{)}, \tag{32.22в}$$

$$\dot{U} = -\frac{\Gamma^2}{\rho + p}\frac{p'}{r'} - \frac{m + 4\pi r^3 p}{r^2} \quad \text{(динамическое уравнение для } U\text{)}, \tag{32.22г}$$

$$p = p(n, \rho) \quad \text{(уравнение состояния)}, \tag{32.22д}$$

$$\widetilde{\Phi}' = -p'/(\rho + p), \quad \widetilde{\Phi} = 0 \text{ на поверхности звезды (уравнение источника для } \widetilde{\Phi}\text{)}, \tag{32.22е}$$

$$m' = 4\pi r^2 \rho r', \quad m = 0 \text{ при } a = 0 \quad \text{(уравнение источника для } m\text{)}, \tag{32.22ж}$$

$$\Gamma = \operatorname{sign}(r')\,(1 + U^2 - 2m/r)^{1/2} \quad \text{(алгебраическое уравнение для } \Gamma\text{)}. \tag{32.22з}$$

б. Приведенные выше уравнения записаны в форме, удобной для численных расчетов. (Численные решения и ударные волны см. в работе [61].) При аналитических исследованиях часто полезно заменить (32.22б) на

$$n = \Gamma/(4\pi r^2 r'), \tag{32.22б'}$$

а (32.22г) — на

$$\dot{m} = -4\pi r^2 p U. \tag{32.22г'}$$

Выведите эти уравнения.

в. Объясните, почему уравнения (32.22ж) и (32.22г') подтверждают сделанные в дополнении 23.1 замечания относительно локализации энергии.

32.8. Аналитические решения для коллапса без давления [62, 63]

Покажите, что общее решение уравнений (32.22) в случае равного нулю давления может быть получено следующим образом:

а. Из уравнения (32.22г') определите массу, заключенную внутри оболочки с меткой a, $m(a)$; при $p = 0$ величина $m(a)$ не будет зависеть от времени $\tilde{t}$.

УПРАЖНЕНИЯ

б. Предположите, что пылевые частицы имеют массы μ, зависящие от радиуса, $\mu(a)$, так что

$$\rho = \mu n. \tag{32.23а}$$

в. Вычислите Γ по формуле

$$\Gamma = m'/\mu; \tag{32.23б}$$

Γ не будет зависеть от $\tilde{t}$.

г. Чтобы получить последующее решение для изменения $r(\tilde{t}, a)$, определите начальное распределение длины окружности $2\pi r$ как функцию a и решите динамическое уравнение

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}}\right)^2 - \frac{2m(a)}{r} = \Gamma^2(a) - 1. \tag{32.23в}$$

Заметим, что это уравнение по форме совпадает с соответствующим уравнением в ньютоновской теории.

д. Вычислите остальные интересующие нас величины из алгебраических уравнений

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + (r'\,da/\Gamma)^2 + r^2\,d\Omega^2, \tag{32.23г}$$

$$\rho = \mu n = m'/(4\pi r^2 r'), \tag{32.23д}$$

$$\tilde{\Phi} = 0, \quad U = \partial r/\partial \tilde{t}. \tag{32.23е}$$

[*Замечание*: Это решение допускает пересечение следующих друг за другом оболочек, в результате чего возникает поверхность бесконечной плотности ($r' \to 0$, где $m' \neq 0$). Это объясняется отсутствием давления, нарастание которого привело бы к прекращению процесса пересечения оболочек. Когда происходит такое пересечение, в системе координат возникает особенность (a больше не растет монотонно наружу), но пространство-время по-прежнему ведет себя хорошо. Поверхность бесконечной плотности 1) создает пренебрежимо малые приливные силы, действующие на близлежащие пылевые частицы, и 2) подобно поверхностным слоям (см. § 21.13), поверхность бесконечной плотности является идеализацией и конечное давление приводит к тому, что она размазывается до конечной плотности.]

32.9. Коллапс с однородной плотностью

Воспроизведите решение Фридмана — Шварцшильда для коллапса с однородной плотностью и равным нулю давлением, придавая величинам $m(a)$ и $\mu(a)$, которые фигурируют в упражнении 32.8, подходящую для этого случая форму. Для этого допустите, что во внутренней области звезды пылевые частицы обладают не равными нулю массами покоя, $\mu = \text{const} \neq 0$, а во внешней области их масса покоя $\mu = 0$ («воображаемые пылевые частицы в вакууме»). Сведите результирующую метрику (32.23г) к метрике Фридмана внутри звезды и к метрике Новикова для шварцшильдовской геометрии вне звезды [уравнение (31.12)].

§ 32.6. СУДЬБА ЧЕЛОВЕКА, ПАДАЮЩЕГО В СИНГУЛЯРНОСТЬ $r = 0$

Действие приливных сил на тело человека, падающего в сингулярность $r = 0$

Рассмотрим вопрос о том, что́ происходит с экспериментатором-астрофизиком, который стоит на поверхности свободно сжимающейся звезды, когда она коллапсирует к $R = 0$.

В ходе коллапса к $R = 0$ различные части тела астрофизика испытывают разные гравитационные силы. Его ноги, находящиеся на поверхности звезды, притягиваются к центру нарастающей до бесконечности гравитационной силой, в то время как его голова, находящаяся на большем расстоянии от центра, ускоряется вниз несколько меньшей силой. Разность этих двух ускорений (приливная сила) в ходе коллапса все более нарастает, становясь в конце концов бесконечной, когда R достигает нуля. Тело астрофизика не может выдержать такие огромные силы; оно испытывает беспредельно нарастающее растяжение между головой и ногами.

Но это не все. Одновременно с этим растяжением в направлении голова — ноги гравитационное поле тянет астрофизика в такие области пространства-времени, где площадь сферы $4\pi r^2$ беспрестанно уменьшается. Чтобы осуществить это уменьшение площади, приливные гравитационные силы должны одновременно с растяжением в направлении голова — ноги сжимать астрофизика со всех сторон. Сжатие площади сферы является на самом деле более сильным эффектом, чем продольное растяжение; поэтому в пределе $R \to 0$ астрофизик будет сдавлен до нулевого объема и вытянут на неопределенную длину.

Гибель астрофизика происходит в три стадии: 1) ранняя стадия, когда его тело успешно сопротивляется приливным силам, 2) промежуточная стадия, когда оно постепенно уступает превосходящей силе, и 3) заключительная стадия, когда оно уже окончательно раздавлено.

Стадия 1: тело сопротивляется деформации, возникают упругие напряжения

На ранней стадии приливные силы можно исследовать с помощью уравнения геодезического отклонения, выраженного в ортогональной системе отсчета астрофизика $\omega^{\hat\tau}$, $\omega^{\hat\rho}$, $\omega^{\hat\theta}$, $\omega^{\hat\phi}$ (см. § 31.2). В этой системе отсчета неисчезающие компоненты тензора кривизны Римана даются выражениями (31.6):

$$R_{\hat\tau\hat\rho\hat\tau\hat\rho} = -2M/r^3, \quad R_{\hat\tau\hat\theta\hat\tau\hat\theta} = R_{\hat\tau\hat\phi\hat\tau\hat\phi} = M/r^3,$$
$$R_{\hat\theta\hat\phi\hat\theta\hat\phi} = 2M/r^3, \quad R_{\hat\rho\hat\theta\hat\rho\hat\theta} = R_{\hat\rho\hat\phi\hat\rho\hat\phi} = -M/r^3. \tag{32.24a}$$

Уравнение геодезического отклонения утверждает, что две *свободно движущиеся* частицы, мгновенно покоящиеся в локально инерциальной системе отсчета астрофизика и разделенные 3-вектором

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^{\hat j}\,\mathbf{e}_{\hat j},$$

должны ускоряться в разные стороны с относительным ускорением, которое дается соотношением

$$D^2\xi^{\hat{j}}/d\tau^2 = -R^{\hat{j}}_{\hat{\tau}\hat{k}\hat{\tau}}\xi^{\hat{k}} = -R_{\hat{j}\hat{\tau}\hat{k}\hat{\tau}}\xi^{\hat{k}} = -R_{\hat{\tau}\hat{j}\hat{\tau}\hat{k}}\xi^{\hat{k}}.$$

Используя компоненты (32.24а) тензора кривизны, мы видим, что

$$\begin{aligned} D^2\xi^{\hat{\rho}}/d\tau^2 &= +(2M/r^3)\,\xi^{\hat{\rho}}, \\ D^2\xi^{\hat{\theta}}/d\tau^2 &= -(M/r^3)\xi^{\hat{\theta}}, \\ D^2\xi^{\hat{\phi}}/d\tau^2 &= -(M/r^3)\xi^{\hat{\phi}}. \end{aligned} \tag{32.24б}$$

Прежде чем применить эти уравнения к телу астрофизика, идеализируем нашу задачу и будем рассматривать тело (для простоты) в виде прямоугольного бруска массой $\mu = 75$ кг, длиной $\ell \approx 1{,}8$ м в направлении $\mathbf{e}_{\hat{\rho}}$, шириной и толщиной $w \approx 0{,}2$ м в направлениях $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$. Затем вычислим напряжения, возникающие в такой идеализированной модели, которые препятствуют движению частиц тела вдоль расходящихся (и сходящихся) геодезических.

Из формы уравнений (32.24) с очевидностью следует, что главные оси тензора напряжений совпадают с $\mathbf{e}_{\hat{\rho}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ (т. е. в базисе $\mathbf{e}_{\hat{\rho}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ тензор напряжений диагонален). Продольную компоненту напряжения в центре масс астрофизика можно оценить следующим образом. Элемент объема рассматриваемого тела с массой $d\mu$, расположенный на высоте h от центра масс (расстояние h измеряется вдоль направления $\mathbf{e}_{\hat{\rho}}$), если бы ему позволили двигаться свободно, обладал бы ускорением $a = (2M/r^3)\,h$ в направлении от центра масс. Чтобы не дать элементу объема ускоряться относительно центра масс, мускулы астрофизика должны создавать усилие

$$dF = a\,d\mu = (2M/r^3)\,h\,d\mu.$$

Эта сила дает вклад в напряжение, действующее перпендикулярно горизонтальной плоскости (плоскость $\mathbf{e}_{\hat{\theta}} \wedge \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$), проходящей через центр масс. Полная сила, действующая перпендикулярно этой плоскости, есть сумма сил, действующих на все элементарные массы, лежащие выше этой плоскости (она равна также сумме сил, действующих на элементарные массы, расположенные ниже этой плоскости):

$$F = \int\limits_{\substack{\text{область} \\ \text{над плоскостью}}} a\,d\mu = \int\limits_0^{\ell/2} \left(\frac{2Mh}{r^3}\right)\left(\frac{\mu}{\ell w^2}\right)(w^2\,dh) = \frac{1}{4}\,\frac{\mu M\ell}{r^3}.$$

Напряжение есть сила, деленная на площадь поперечного сечения w^2, причем это отношение берется со знаком минус, поскольк-

ку рассматривается натяжение, а не давление:

$$T_{\hat{\rho}\hat{\rho}} = -\frac{1}{4}\frac{\mu M \ell}{w^2 r^3} \approx -1{,}1\cdot 10^{15}\frac{M/M_\odot}{(r/1\text{ км})^3}\frac{\text{дин}}{\text{см}^2}. \qquad (32.25\text{а})$$

Аналогично для компонент напряжения в направлениях $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ в центре масс имеем

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{2}\frac{\mu M}{\ell r^3} \approx 0{,}7\cdot 10^{13}\frac{M/M_\odot}{(r/1\text{ км})^3}\frac{\text{дин}}{\text{см}^2}. \qquad (32.25\text{б})$$

(Напомним, что давление в одну атмосферу равно $1{,}0\cdot 10^6$ дин/см^2.)

Человеческое тело не может выдержать натяжения или давления, превосходящего 100 атм $\approx 10^8$ дин/см^2; при этом оно обязательно будет разрушено. Следовательно, астрофизик, расположенный на свободно падающей поверхности звезды с массой, равной массе Солнца, будет убит приливными силами при радиусе звезды $R \sim 200$ км $\gg 2M \approx 3$ км.

Стадия 2: тело перестает сопротивляться, человек умирает

К тому времени, когда размеры звезды станут много меньше ее гравитационного радиуса, барионы, содержащиеся в теле астрофизика, будут двигаться по геодезическим; его мускулы и кости совершенно перестанут противодействовать гравитационным силам. На этой заключительной стадии коллапса времениподобные геодезические представляют собой кривые, вдоль которых шварцшильдовская «временна́я» координата t почти постоянна [ср. с сужением световых конусов вблизи $r = 0$ на фиг. 32.1, а также с уравнением (32.2) в пределе $r \ll 2M$]. Ноги астрофизика касаются поверхности звезды при одном значении t, скажем $t = t_f$, в то время как его голова движется вдоль кривой, на которой $t = t_h > t_f$. Следовательно, длина тела астрофизика растет согласно формуле

Стадия 3: тело сдавлено и одновременно растянуто

$$\ell_{\text{астрофиз}} = [g_{tt}(R)]^{1/2}[t_h - t_f] = [2M/R]^{1/2}[t_h - t_f] \sim$$
$$\sim R^{-1/2} \sim (\tau_{\text{коллапс}} - \tau)^{-1/3}. \qquad (32.26\text{а})$$

Здесь $\tau = \left[-\int^R |g_{rr}|^{1/2}\,dr + \text{const}\right]$ — собственное время, каким его измерил бы астрофизик, будь он жив, а $\tau_{\text{коллапс}}$ — момент времени, когда он попадет в $r = 0$. К тому же гравитационное поле вынуждает барионы тела астрофизика падать вдоль мировых линий, для которых θ и ϕ постоянны в течение заключительной стадии коллапса. Следовательно, площадь поперечного сечения тела уменьшается по закону

$$\mathcal{A}_{\text{астрофиз}} = [g_{\theta\theta}(R)\,g_{\phi\phi}(R)]^{1/2}\,\Delta\theta\Delta\phi \sim R^2 \sim (\tau_{\text{коллапс}} - \tau)^{4/3}. \qquad (32.26\text{б})$$

Объединяя уравнения (32.26а) и (32.26б), мы видим, что объем тела астрофизика уменьшается в течение последних мгновений коллапса следующим образом:

$$\mathcal{V}_{\text{астрофиз}} = \ell_{\text{астрофиз}}\mathcal{A}_{\text{астрофиз}} \sim R^{3/2} \sim (\tau_{\text{коллапс}} - \tau). \qquad (32.26\text{в})$$

Сжатие вещества до бесконечной плотности бесконечными гравитационными приливными силами может иметь место не только на поверхности коллапсирующей звезды, но также в любой точке на сингулярности $r = 0$ вне поверхности звезды. Следовательно, любой безрассудный специалист по ракетной технике, рискнувший попасть под гравитационный радиус $r = 2M$ внешнего гравитационного поля, обречен на гибель.

Дальнейшее обсуждение пространственно-временны́х сингулярностей и возможности того, что квантовые гравитационные эффекты заставят нас пересмотреть предсказания классической теории гравитации, связанные с сингулярностями, приведено в § 34.6 и в гл. 44.

§ 32.7. ОБЩИЙ ОБЗОР ПРОБЛЕМЫ РЕАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО КОЛЛАПСА

Обзор сферического коллапса

Неустойчивость, направленный внутрь взрыв (имплозия), горизонт и сингулярность — вот узловые моменты сферического коллапса любой звезды.

Неустойчивость. Израсходовав ядерное горючее и медленно сжимаясь к центру, звезда начинает вдавливать электроны или фотоны, благодаря которым в ней поддерживается давление, в атомные ядра; такой процесс приводит к тому, что уравнение состояния становится менее жестким, а это в свою очередь вызывает неустойчивость (подробности см., например, в § 10.15 и 11.4 книги Зельдовича и Новикова [64]).

Направленный внутрь взрыв (имплозия). За доли секунды неустойчивость перерастает в направленный внутрь взрыв. В случае реальных распределений плотности ядро звезды быстро сжимается к собственному центру, а внешняя оболочка движется вслед за ядром (см., например, машинные расчеты [61, 65—68]).

Горизонт. В идеализированном сферически симметричном случае поверхность звезды сжимается под свой гравитационный радиус («горизонт»; прекращение связи с внешним миром; точка, из которой нет возврата). С точки зрения наблюдателя на поверхности звезды это случится по истечении конечного короткого промежутка собственного времени. С точки зрения внешнего наблюдателя, чтобы достичь горизонта, звезде требуется бесконечное время, хотя звезда и становится черной экспоненциально быстро [время падения светимости в e раз порядка $M \sim 10^{-5}\,(M/M_\odot)$ с]. В результате получается «черная дыра», граница которой представляет собой горизонт (гравитационный радиус) и из внутренней области которой невозможно передать какую-либо информацию во внешнюю область.

Сингулярность. С точки зрения наблюдателя внутри звезды за короткий промежуток собственного времени $\Delta\tau \sim M \sim 10^{-5}\,(M/M_\odot)$ с после прохождения через горизонт достигается

сингулярность (нулевой радиус, бесконечная плотность, бесконечные гравитационные приливные силы).

Краткая сводка сведений о реальном несферическом коллапсе

Имеет ли такая картина коллапса — неустойчивость, имплозия, горизонт и сингулярность — какое-либо отношение к реальным звездам? Изменится ли качественно картина под влиянием таких усложнений, как вращение, несферичность, магнитные поля, потоки нейтрино? Нет, для малых начальных отклонений от сферической симметрии этого не случится. Методы теории возмущений, описанные в дополнении 32.2 и упражнении 32.10, показывают, что *реальный почти сферически симметричный коллапс, так же как идеализированный случай, характеризуется неустойчивостью, имплозией, возникновением горизонта*; Пенроуз ([69], см. § 34.6) доказал, что затем обязательно следует какая-то сингулярность.

Коллапс, сильно отличающийся от сферического, изучен, конечно, хуже. Тем не менее ряд детальных расчетов и точных теорем позволяет с достаточной уверенностью сделать следующие два вывода: 1) *горизонты (вероятно) образуются в том и только в том случае, когда масса M заключена в такой области, что ЛЮБАЯ окружность, проведенная в ЛЮБОМ направлении, имеет длину* $\mathscr{C} \leqslant 4\pi M$ (дополнение 32.3); 2) *внешнее гравитационное поле горизонта (черной дыры) после того, как исчезнут гравитационные волны и всякого рода «пыль», почти наверняка будет полем Керра — Ньюмана, которое является обобщением геометрии Шварцшильда (гл. 33). Если это так, то внешнее поле однозначно определяется массой, зарядом и моментом импульса, которые «утонули в дыре»*. (Эта почти доказанная теорема имеет другое название, часто употребляемое в разговорах: «Черная дыра не имеет волос».)

1) горизонт

2) черная дыра

Область внутри горизонта, а также то, что происходит в заключительный момент коллапса (если таковой существует), в настоящее время изучены очень плохо. Обзор различных возможностей дан в гл. 34. Благодаря теоремам Пенроуза, Хоукинга и Героча можно с уверенностью говорить о наличии в конце коллапса сингулярности. Но никто не знает, какая доля вещества коллапсирующей звезды и ее физических полей пройдет через эту сингулярность — все, часть или ничего.

3) сингулярность

32.10. Теорема Прайса для скалярного поля [1])

УПРАЖНЕНИЯ

Коллапсирующая сферическая звезда с произвольным несферическим «распределением скалярного заряда» создает внешнее скалярное поле Ф. Вакуумное уравнение поля для Ф имеет вид $\Box \Phi = \Phi_{;\alpha}{}^{;\alpha} = 0$. Обратным влиянием энергии-импульса поля на геометрию пространства-времени пренебрегаем.

[1]) Этот вопрос более подробно рассмотрен в работах [70—72].

УПРАЖНЕНИЯ

а. Разложите внешнее поле на скалярные сферические гармоники, используя для внешней геометрии Шварцшильда шварцшильдовские координаты

$$\Phi = \sum_{\ell} \frac{1}{r} \Psi_{\ell}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \tag{32.27а}$$

Покажите, что вакуумное уравнение поля сводится к следующему уравнению:

$$-\Psi_{\ell, tt} + \Psi_{\ell, r^* r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\Psi_{\ell}, \tag{32.27б}$$

где r^* — «черепашья координата», рассмотренная в § 25.5 и на фиг. 25.4:

$$r^* = r + 2M \ln (r/2M - 1). \tag{32.27в}$$

Заметим, что уравнение (32.27б) представляет собой одномерное волновое уравнение в плоском пространстве с эффективным потенциалом

$$V_{\text{эфф}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right). \tag{32.27г}$$

Часть этого эффективного потенциала $[\ell(\ell+1)/r^2]$ является «центробежным барьером», а другая часть $[2M/r]$ обусловлена кривизной пространства-времени. Заметим, что этот эффективный потенциал для скалярных волн похож на эффективный потенциал для частиц и фотонов, движущихся в геометрии Шварцшильда:

$$(\tilde{V}^2)_{\text{частиц}} = (1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2),$$

$$(B^{-2})_{\text{фотонов}} = (1 - 2M/r)/r^{-2}$$

(дополнения 25.6 и 25.7). Потенциал для скалярных волн, так же как и потенциал для фотонов, положителен при всех $r > 2M$. Он возрастает от нуля при $r = 2M$ до максимума барьера, а затем снова падает до нуля при $r = \infty$.

б. Покажите, что *физически допустимых статических скалярно-волновых возмущений шварцшильдовской черной дыры не существует*. [Точнее покажите, что все статические решения уравнения (32.27б) обращаются в бесконечность либо на горизонте ($r = 2M$, $r^* = -\infty$), либо на бесконечном радиусе.] Это означает, что черная дыра, образованная в процессе коллапса, должна каким-то образом избавляться от внешнего скалярного поля звезды прежде, чем она приходит в застывшее состояние.

в. Общее решение волнового уравнения (32.27б) может быть представлено в виде фурье-разложения. Покажите, что для волн, распространяющихся наружу от горизонта («волны, распространяющиеся направо»), которые частично проходят на бесконеч-

ность, а частично отражаются, общее решение имеет вид

$$\Psi_\ell(t, r^*) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) R_k^\ell(r^*) e^{-ikt}\, dk, \tag{32.28а}$$

где

$$d^2R_k^\ell/dr^{*2} = [-k^2 + V_{\text{эфф}}(r)] R_k^\ell, \tag{32.28б}$$

$$R_k^\ell = e^{ikr^*} + \Gamma_k^{(R)} e^{-ikr^*} \quad \text{при} \quad r^* \to -\infty,$$

$$R_k^\ell = T_k^{(R)} e^{ikr^*} \quad \text{при} \quad r^* \to \infty. \tag{32.28в}$$

Покажите, что «коэффициенты отражения и прохождения для волн, распространяющихся направо», $\Gamma_k^{(R)}$ и $T_k^{(R)}$ имеют следующие асимптотики при $|k| \ll 1/M$ (малые волновые числа, большие длины волн):

$$\Gamma_k^{(R)} = -1 + \alpha 2Mik, \qquad T_k^{(R)} = \frac{\beta}{(2\ell-1)!!}(2Mik)^{\ell+1}, \tag{32.28г}$$

в пределе $k \to 0$ получается полное отражение и полное погашение в результате интерференции; подробнее см. в дополнении 32.2

в пределе $k \to 0$ нет прохождения волны на бесконечность; см. дополнение 32.2

где α и β — константы порядка единицы. Проведите аналогичное исследование для волн, падающих на шварцшильдовскую черную дыру извне («волны, распространяющиеся налево»).

г. Покажите, что при коллапсе к горизонту мировая линия поверхности звезды в координатах (t, r^*) описывается соотношением

$$r^* = R^*(t) \equiv -t - R_0^* \exp(-t/2M) + \text{const}, \tag{32.29а}$$

где R_0^* выражается через 4-ускорение a поверхности ($a > 0$, если 4-ускорение направлено от центра) следующим образом:

$$R_0^* = (8M/e)\left\{1 + 16Ma\left[Ma + \left(M^2a^2 + \frac{1}{8}\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{32.29б}$$

Итак, оказывается, что мировая линия поверхности становится нулевой вблизи горизонта ($t + r^* \equiv \tilde{V} = \text{const}$); конечно, это обусловлено особенностью системы координат в этом месте. Покажите далее следующее: чтобы скорость изменения скалярного поля Ψ_ℓ, измеренная на поверхности звезды, была конечной при

УПРАЖНЕНИЯ

приближении к горизонту ($t \to \infty$, $r^* \to -\infty$, $\tilde{U} \to \infty$), скалярное поле на поверхности звезды ($\tilde{V} = \text{const}$) должно изменяться по закону

$$\Psi_\ell = Q_{\ell 0} + Q_{\ell 1} e^{-\tilde{U}/4M}, \quad \tilde{U} \equiv t - r^*. \tag{32.29в}$$

Заметим, что $Q_{\ell 0}$ есть «предельное значение» скалярного поля на поверхности звезды. Эту величину можно рассматривать как выходящую волну с нулевым волновым числом (бесконечной длиной волны), и, следовательно, *она полностью отражается на эффективном потенциале, испытывая полное погашение* [см. уравнение (32.28г), а также дополнение 32.2]. *Вывод.* Все мультипольные компоненты скалярного поля затухают на бесконечном r^* при $t \to \infty$. (Теорема Прайса для скалярного поля.) Более полное исследование, включающее скорости затухания мультиполей, приведено в работах [70—72].

32.11. «Константы» Ньюмана — Пенроуза [1])

Уилер [76] показал, что уравнения Максвелла для ℓ-мультиполя электромагнитного поля в геометрии Шварцшильда могут быть сведены к волному уравнению

$$-\Psi_{\ell,\,tt} + \Psi_{\ell,\,r^*r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Psi_\ell \tag{32.30}$$

[электромагнитный аналог уравнения (32.27б)]. После того как это уравнение решено, компоненты электромагнитного поля могут быть получены, если на $\Psi_\ell(t, r^*)\, Y_{\ell m}(0, \phi)$ подействовать определенными дифференциальными операторами.

а. Покажите, что общее решение электромагнитного волнового уравнения (32.30) в случае дипольных полей ($\ell = 1$) при заданных граничных условиях на выходящую волну при $r^* \to \infty$ имеет вид

$$\Psi_1 = f_0(\tilde{U}) + \frac{f_1(\tilde{U})}{r} + \frac{f_2(\tilde{U})}{r^2} + \ldots, \tag{32.31а}$$

где

$$\tilde{U} = t - r^* — \text{«запаздывающее время»},$$

$$f_1' = f_0, \quad f_2' = 0, \quad \ldots \quad f_n' = -\frac{(n+1)(n-2)}{2n} f_{n-1} + (n-2) M f_{n-2}. \tag{32.31б}$$

Если пространство-время плоское ($M = 0$), это решение принимает вид

$$\Psi_1 = f_1'(\tilde{U}) + f_1(\tilde{U})/r. \tag{32.31в}$$

[В выражении для Ψ_1 можно вынести за скобки $1/r$, так как поле излучения $f_1'(\tilde{U})$ спадает как $1/r$, см. скалярно-волновую функцию

[1]) Более подробно этот вопрос изложен в работах [73—75].

(32.27а).] Члены $f_2(\tilde{U})/r^2 + \ldots$, отсутствующие в случае плоского пространства-времени, относятся к обратному рассеянию распространяющейся наружу волны на кривизне пространства-времени. Их иногда называют волновыми «хвостами».

б. Покажите, что в самом общем случае статическое дипольное поле имеет вид (32.31а), где

$$(f_0)_{\text{статич}} = 0, \quad (f_1)_{\text{статич}} \equiv D = (\text{дипольный момент}),$$
$$(f_2)_{\text{статич}} = \frac{3}{2} MD, \ldots . \tag{32.32}$$

в. Рассмотрите звезду (не черную дыру!) с дипольным полем, которое в начальный момент является статическим. Пусть в момент $t = 0$ дипольный момент звезды скачком меняется до нового статического значения D'. Уравнения (32.31) требуют, чтобы f_2 сохранялось («*константа*» *Ньюмана — Пенроуза* [77]). Следовательно, f_2 *всегда будет иметь значение* $^3/_2\, MD$, *соответствующее прежнему дипольному моменту, и никогда не изменится до* $^3/_2\, MD'$. В этом и состоит проявление хвоста тех волн, которые генерируются резким изменением дипольного момента. Чтобы лучше понять этот эффект, связанный с хвостом, и обнаружить существенную ошибку в приведенном выше результате, получите решение (32.31) для запаздывающего времени $\tilde{U} > 0$, используя следующие допущения:

1) при $\tilde{U} < 0$ поле имеет статический вид (32.32),
2) при $\tilde{U} > 0$ $f_1 = D'$. (32.33)

Представьте ответ в следующем виде:

$$\Psi_1 = \frac{D'}{r} + \frac{^3/_2 MD}{r^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2M(D'-D)(-1)^{n+1}(n+1)\tilde{U}^{n-2}}{(2r)^n} +$$
$$+ O\left(\frac{M^2}{r^3}, \frac{M^2\tilde{U}}{r^4}\right). \tag{32.34}$$

(Отброшенные члены малы по сравнению с оставленными при любых $\tilde{U}/r$, если $r \gg M$.) Очевидно, пока ряд сходится, «константа» Ньюмана — Пенроуза (коэффициент при $1/r^2$) «помнит» старое значение D и является сохраняющейся величиной, как и утверждалось выше. Покажите, что ряд, однако, расходится при $\tilde{U} > 2r$, т. е. он расходится внутри сферы, которая расширяется наружу с асимптотической скоростью, равной $^1/_3$ скорости света. Таким образом, «*константа*» *Ньюмана — Пенроуза хорошо определена и сохраняется лишь вне конуса, который похож на световой, но соответствует скорости, равной* $^1/_3$ *скорости света* («$^1/_3$-*световой конус*»).

УПРАЖНЕНИЯ

г. Просуммируйте ряд (32.34), чтобы получить решение, справедливое даже при $\tilde{U} > 2r$:

$$\Psi = \underbrace{\frac{D'}{r} + \frac{3}{2}\frac{MD'}{r^2}}_{\text{новое статическое решение}} \underbrace{- \frac{2M(D'-D)}{r}\frac{(\tilde{U}+3r)}{(\tilde{U}+2r)^2}}_{\text{«хвостовой член»}} + O\left(\frac{M^2}{r^3}\right) = \qquad 1259$$

$$= \begin{cases} \text{ряду (32.34) при } \tilde{U} < 2r \text{ (в области сходимости ряда),} \\ \dfrac{D'}{r} + \dfrac{3}{2}\dfrac{MD'}{r^2} + O\left(\dfrac{M}{\tilde{U}r}, \dfrac{M^2}{r^3}\right) \text{ при } \tilde{U} \gg r \gg M. \end{cases} \qquad (32.35)$$

Исходя из этого результата, сделайте вывод, что *для фиксированного r в достаточно поздние моменты времени электромагнитное поле становится асимптотически статическим, а «константа» Ньюмана — Пенроуза принимает новое значение $^3/_2MD'$, соответствующее новому дипольному моменту.*

Дополнение 32.2. КОЛЛАПС С МАЛЫМИ НЕСФЕРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1])

А. Возмущения плотности

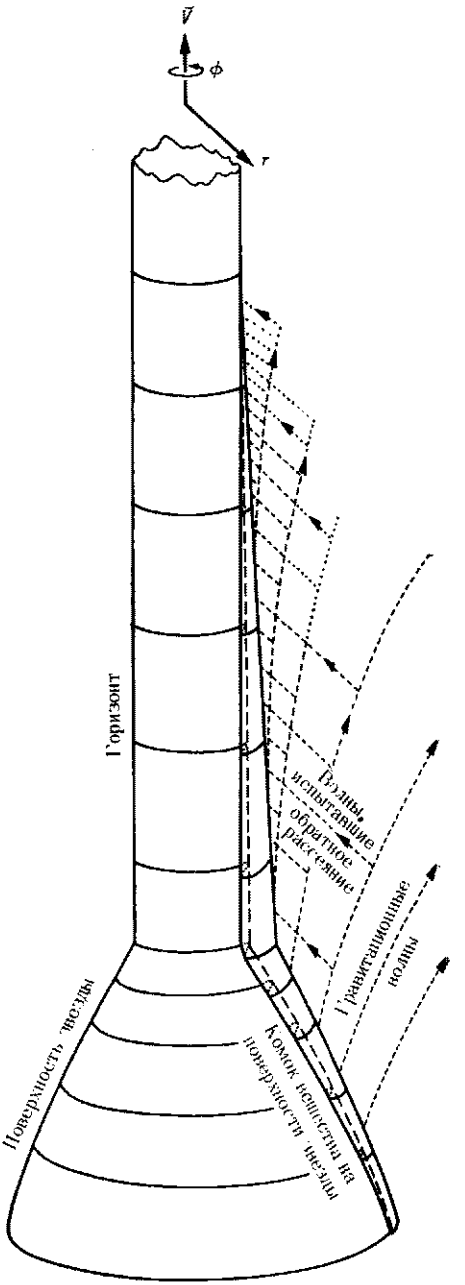
1. В распределении плотности звезды в момент, когда она начинает коллапсировать, имеется небольшой «комок», нарушающий сферическую симметрию.
2. В процессе коллапса комок все больше и больше растет (неустойчивость коллапса относительно малых возмущений — явление, хорошо известное в ньютоновской теории, см., например, [79, 80]).
3. Растущий комок излучает гравитационные волны.
4. Волны с малой длиной волны ($\lambda \ll M$), испущенные вблизи горизонта ($r - 2M \lesssim M$), частично распространяются на бесконечность, а частично испытывают обратное рассеяние на «фоновой» шварцшильдовской кривизне пространства-времени. Волны, испытавшие обратное рассеяние, распространяются к горизонту (поверхности черной дыры, гравитационному радиусу), который образован коллапсирующей звездой.
5. Волны с большой длиной волны ($\lambda \gg M$), испущенные вблизи горизонта ($r - 2M \lesssim M$), испытывают полное обратное рассеяние на кривизне пространства-времени; они никогда не выйдут за пределы области, ограниченной радиу-

---

[1]) Основано на детальных расчетах Прайса [70, 71, 78]. (Впервые коллапс с малыми несферическими возмущениями рассмотрен в работе [492]; добавления см. в работе [493], о магнитном поле см. [508, 509]. В этих работах получены важные выводы о том, что предельное поле определяется только массой звезды и моментом импульса, но в них не рассматривается детальный процесс излучения, как это сделано в работах Прайса.— *Прим. ред.*)

сом $r \sim 3M$; распространение длинных волн обрывается «в дыре».

6. Продолжает ли на звезде существовать этот комок, когда она погружается под гравитационный радиус, и образует ли звезда в таком случае искаженный (комковатый) горизонт? Расчеты показывают, что так оно и есть.
7. Но внешний наблюдатель может узнать о существовании «предельного комка» только посредством исследования искажения (квадрупольного момента) гравитационного поля. Это предельное искажение поля не может распространяться наружу с бесконечной скоростью (мгновенного «действия на расстоянии» в природе не существует). Это искажение в виде гравитационных волн с почти бесконечной длиной волны (распространяясь от самого горизонта до любого внешнего радиуса, волны испытывают бесконечное красное смещение) распространяется наружу со скоростью света. Искажение предельного поля, как и любая другая волна с большой длиной волны, при $r \leqslant 3M$ испытывает полное обратное рассеяние на кривизне пространства-времени; оно не может достичь внешнего наблюдателя. Внешний наблюдатель никогда не узнает о существовании предельного комка. *Предельное внешнее поле представляет собой совершенно сферическую, не имеющую комков шварцшильдовскую геометрию!*
8. Даже в той области, где происходит обратное рассеяние ($2M < r \leqslant 3M$), предельное внешнее поле не имеет комков. Испытавшие обратное рассеяние волны, которые несут информацию о существовании предельного комка, полностью погашаются при интерференции с выходящими наружу волнами, которые несут ту же информацию. В результате всякое искажение внешнего поля и горизонта исчезает!
9. Предельная черная дыра есть шварцшильдовская черная дыра!



Изображение коллапса в сжимающейся системе координат Эддингтона — Финкельштейна.

Б. Возмущения момента импульса

1. Когда звезда начинает коллапсировать, она обладает малым, ненулевым собственным моментом импульса («спином») $\boldsymbol{S}$.
2. В процессе коллапса величина $\boldsymbol{S}$ сохраняется (если не учитывать пренебрежимо малого изменения за счет уноса момента импульса волнами; это изменение пропорционально квадрату амплитуды волны, т. е. квадрату амплитуды возмущений в звезде, а значит, $\boldsymbol{S}^2$.)
3. Следовательно, внешнее поле всегда и везде несет на себе «отпечаток» момента импульса $\boldsymbol{S}$ (по поводу отпечатков см. гл. 19). Нет необходимости в том, чтобы этот отпечаток из области, близкой к горизонту, распространялся наружу. Более того, он не мог бы так распространяться, поскольку имеет место закон сохранения $\boldsymbol{S}$ (отсутствие дипольных гравитационных волн, см. § 36.1 и 36.10).
4. Таким образом, предельное внешнее поле является полем недеформированной, медленно вращающейся черной дыры:

$$ds^2 = \underbrace{-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2\,d\Omega^2}_{\text{шварцшильдовская геометрия}}\underbrace{-\left(\frac{4S\sin\theta}{r^2}\right)(r\sin\theta\,d\phi)\,dt}_{\substack{\text{вращательный отпечаток,}\\ \text{см. упражнение 26.1,}\\ \text{а также гл. 19}}}.$$

Здесь полярная ось ориентирована вдоль $\boldsymbol{S}$.

В. Возмущения электромагнитного поля

1. Звезда обладает магнитным полем, которое создается токами внутри звезды, электрическим полем, обусловленным произвольным распределением заряда внутри звезды, и электромагнитным излучением, испускаемым горячим веществом звезды. Для простоты положим $\boldsymbol{S} = 0$.
2. Эволюция внешнего электромагнитного поля напоминает эволюцию внешнего гравитационного поля. Удаленный наблюдатель никогда не сможет ничего узнать о «предельных» значениях изменяющихся величин (магнитного дипольного момента, электрического дипольного момента, квадрупольных моментов...). Предельные значения этих величин стремятся распространяться от горизонта наружу; их несут электромагнитные волны с почти бесконечной длиной волны. Но они не могут выйти наружу: кривизна пространства-времени отражает их обратно к черной дыре, и они полностью погашаются при суперпозиции со своими двойниками, распространяющимися наружу, что приводит к нулевому предельному полю.
3. В противоположность всем другим величинам, которые изменяются во времени, электрический монопольный момент (полный поток электрического поля, равный полному электрическому заряду, умноженному на 4π) сохраняется. Он никогда не меняется, начиная с момента, предшествовавшего коллапсу, и кончая статической стадией черной дыры.
4. Следовательно, предельное внешнее электромагнитное поле представляет собой сферически симметричное кулоновское поле $\boldsymbol{E} = (Q/r^2)\,\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\boldsymbol{B} = 0$, измеряемое

неподвижным наблюдателем (r, θ, ϕ — константы); предельная геометрия пространства-времени является геометрией Рейснера — Нордстрема (заряженная черная дыра, см. упражнения 31.8 и 32.1):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r + Q^2/r^2} + r^2\, d\Omega^2.$$

Г. Обобщение; теорема Прайса

1. Пусть звезда создает «поле с нулевой массой покоя и целочисленным спином». [«Нулевая масса покоя» относится к квантованным частицам, связанным с классическим полем. На классическом языке это означает, что поле подчиняется кулоновскому закону, спадая на больших расстояниях как $1/r$. Спин также является свойством квантованных частиц; классически его можно проще всего представить как величину, описывающую симметрии монохроматической плоской волны относительно вращений вокруг оси, направленной вдоль распространения волны, см. § 35.6. Скалярное поле имеет спин, равный нулю, электромагнитное поле обладает спином, равным единице, эйнштейновское гравитационное поле имеет спин, равный двум, ... Из этих полей лишь о гравитационном ($s = 2$) и электромагнитном ($s = 1$) полях известно, что они существуют в реальной Вселенной. См., например, работы [81—84], где приводится более глубокое обсуждение этого вопроса.]
2. Пусть поле со спином s является настолько слабым, что его тензор энергии-импульса лишь очень слабо возмущает внешнюю шварцшильдовскую геометрию звезды.
3. Разложим внешнее поле по сферическим гармоникам (скалярным сферическим гармоникам для $s = 0$, векторным сферическим гармоникам для $s = 1$ и тензорным сферическим гармоникам для $s \geqslant 2$) и каждой сферической гармонике, как обычно, припишем определенное целое число ℓ ($\ell = 0$ для монополя, $\ell = 1$ для диполя, $\ell = 2$ для квадруполя и т. д.).
4. Все мультипольные поля с $\ell < s$ в ходе коллапса сохраняются (теорема из классической теории излучения). Скалярное поле ($s = 0$) не сохраняется. В электромагнитном поле ($s = 1$) сохраняется лишь монопольная часть (электрическое кулоновское поле и исчезающе малое магнитное кулоновское поле). В гравитационном поле ($s = 2$) сохраняется монопольная часть (отпечаток, равный массе), а также дипольные части (отпечатки которых измеряют угловой момент и обычный гравитационный дипольный момент, который обращается в нуль, если за начало системы координат выбрать центр массы звезды).
5. Излучение возможно при $\ell \geqslant s$ и только при $\ell \geqslant s$ (скалярные волны могут иметь любую мультипольность, электромагнитные волны должны быть дипольными или обладать более высокой мультипольностью, гравитационные волны — квадрупольными или обладать более высокой мультипольностью, см. § 36.2).
6. Теорема Прайса утверждает, что в случае почти сферического коллапса звезды, при котором образуется черная дыра, все, что может излучаться (все мультиполи с $\ell \geqslant s$), полностью излучается — частично «на бесконечность», частично «внутрь дыры» («что допустимо, то и обязательно»). Предельное поле полностью характеризуется сохраняющимися величинами (мультипольными моментами с $\ell < s$).
7. Доказательство теоремы Прайса для скалярного поля см. в упражнении 32.10.

Д. Обобщение на случай неклассических полей

Такое обобщение для случая нейтринного поля дано в работах Хартля [85, 86] и Тейтельбома [87, 88], а для случая пионного поля — в работах Бекенштейна [89, 90] и Тейтельбома [91].

Дополнение 32.3. ОДНОМЕРНЫЙ И ДВУМЕРНЫЙ КОЛЛАПС

А. Постановка вопроса

Должно ли вещество, для того чтобы образовать черную дыру (горизонт, из-под которого ничто не может выйти), быть сильно компактным во всех трех пространственных измерениях, так что все длины окружностей $\mathscr{C} \leqslant 4\pi M$ (квазисферическая компактность), или же достаточно компактности лишь в одном или двух измерениях?

Б. Ответ для одного измерения

Рассмотрим в качестве примера, который легко обобщить, гравитационный коллапс пылевого сфероида (давление равно нулю). Допустим, что в начальный момент в мгновенном состоянии покоя сфероид можно считать чисто ньютоновским ($r \gg 2M$), и пусть он слегка сплюснут у полюсов. Согласно ньютоновской теории, любой однородный невращающийся пылевой сфероид в ходе коллапса остается однородным, но если его деформировать, то деформации в ходе коллапса нарастают. (Подробности см., например, в работе [80].) Следовательно, интересующий нас сфероид схлопывается, образуя «блин» с бесконечной плотностью, но конечной массой на единицу площади поверхности. В конце этого процесса кинетическая энергия пылевых частиц и их потенциальная энергия по порядку величин равны

$$\frac{1}{2}v^2 \approx \frac{M}{(\mathscr{C}/2\pi)},$$

где M — масса сфероида, а $\mathscr{C}$ — длина окружности «блина».

Следовательно, пока $\mathscr{C}/2\pi \gg 2M$, характерные скорости коллапса остаются много меньше скорости света, а гравитационная энергия много меньше, чем масса-энергия покоя. Это означает, что при $\mathscr{C}/2\pi \gg 2M$ ньютоновское рассмотрение является отличным приближением к общей теории относительности для всего процесса вплоть до последнего момента, когда образуется «блин». Таким образом, *горизонт образоваться не может*, гравитационные волны почти не излучаются, и вся история процесса в целом является чисто ньютоновской и крайне проста. Однако, поскольку момент образования «блина» не является сингулярностью пространства-времени (см. замечания в конце упражнения 32.8), эволюция может после этого продолжаться; по мере того как $\mathscr{C}$ сжимается, становясь меньше $4\pi M$, эволюция сильно усложняется и принимает ярко выраженный релятивистский характер (см. «сценарий коллапса, погони и стремительного погружения» на фиг. 24.3).

В. Ответ для двумерного случая

Рассмотрим в качестве примера, обобщить который, правда, не так просто, гравитационный коллапс вытянутого пылевого сфероида, в начальный момент чисто ньютоновского. Такой сфероид коллапсирует, образуя при этом тонкую «нить» или «веретено» (см. [80]). Предположим, что, достигнув нитеобразного состояния, сфероид продолжает оставаться ньютоновским. В таком случае он имеет длину ℓ, массу на единицу длины $\lambda = M/\ell \ll 1$ и быстро сжимающийся экваториальный радиус $R \ll \ell$. Впоследствии каждая отдельная часть нити коллапсирует по радиусу так, как если бы она была частью бесконечного цилиндра. (Мы не учитываем неустойчивости нити относительно разделения на отдельные «бусинки», см., например, [79, 92].) Только когда нить становится крайне тонкой, $R \leqslant R_{\text{кр}} \sim \ell \exp(-1/4\lambda)$, скорость радиального коллапса приближается к скорости света, а гравитационная энергия — к энергии-массе покоя. На этой стадии релятивистские отклонения от ньютоновского коллапса начинают играть важную роль. Торн [72] и Морган и Торн [93] провели исследование релятивистских эффектов, используя в качестве идеализированной модели бесконечный цилиндр. Результаты сильно отличаются как от сферического случая, так и от случая блина. Коллапсирующий цилиндр излучает большой поток гравитационных волн, но они не могут остановить коллапс. *Коллапс доходит до нитеобразной сингулярности, но никакого горизонта не образуется (нет черной дыры!).*

Г. Возражение против такого ответа, ответ на возражение и гипотеза

Кто-нибудь может возразить, заметив, что, как в случае блина, так и в случае цилиндра, а особенно в случае блина, коллапс может быть остановлен и не достигнет конечной точки. По мере того как толщина блина стремится к нулю, вертикальное гравитационное притяжение остается конечным, в то время как градиент давления, обусловленный любым конечным давлением, стремится к бесконечности. Таким образом, давление останавливает коллапс. Впоследствии край блина сжимается до релятивистского режима $\mathscr{C}/2\pi \leqslant 2M$. При коллапсе цилиндра, согласно ньютоновской теории, если давление и плотность связаны соотношением $p \sim \rho^\gamma$, гравитационное ускорение a_g и ускорение, обусловленное препятствующей коллапсу силой давления, a_p изменяются по законам

$$a_g = -2\lambda/R, \quad a_p \sim \rho^{-1}(P/R) \sim \rho^{\gamma-1}/R.$$

Следовательно, при $\gamma > 1$ (наиболее реалистичный случай) давление останавливает коллапс, а при $\gamma < 1$ — нет. Справедливо ли это утверждение и после того, как коллапс вступит в релятивистскую область, никто пока не знает.

На самом деле способность давления останавливать коллапс не имеет значения в вопросе о черных дырах и горизонтах. Действительно, важным является следующее: *как при коллапсе сплюснутого сфероида, когда в результате коллапса длина окружности $\mathscr{C} \gg 4\pi M$, так и при коллапсе вытянутого сфероида, когда в результате коллапса длина нити $\ell \gg 2M$, не образуется горизонта.* Это обстоятельство в совокупности с неизбежностью возникновения горизонта в случае почти сферического коллапса (дополнение 32.2) приводит к следующей гипотезе, высказанной Торном [72]: *черные дыры, обладающие горизонтом, образуются в том и только в том случае, когда масса M ограничена в такой области, что длина окружности в любом направлении удовлетворяет неравенству $\mathscr{C} \leqslant 4\pi M$.* (Как и большинство гипотез, она весьма расплывчата, так что оставляет место для множества различных математических формулировок!)

33. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ [1]

Если бы диаметр светящейся звезды с той же плотностью,
что и Земля, в двести пятьдесят раз
превосходил диаметр Солнца, то вследствие
притяжения звезды ни один из испущенных ею лучей
не смог бы дойти до нас;
следовательно, не исключено,
что самые большие из светящихся тел
по этой причине являются невидимыми.

ЛАПЛАС [94]

§ 33.1. ПОЧЕМУ «ЧЕРНАЯ ДЫРА»?

Диалог, объясняющий, почему черные дыры заслуживают свое название

Сагредус. Что значит весь этот разговор о «черных дырах»? Когда внешний наблюдатель следит за коллапсом звезды, он видит, как она со все нарастающей скоростью коллапсирует до тех пор, пока коллапс не вступит в релятивистскую стадию. Тогда кажется, что звезда замедляется и превращается в «застывшую» как раз на внешней стороне горизонта (снаружи гравитационного радиуса). Как бы долго ни ждал наблюдатель, он никогда не увидит, что произойдет в дальнейшем со звездой. Как же можно дать название «черная дыра» такому застывшему объекту, который никогда не исчезает из поля зрения внешнего наблюдателя?

Сальватиус. Давайте расчленим название «черная дыра». Рассмотрим сначала черноту. Безусловно, ничто не может быть чернее, чем черная дыра. Большое красное смещение, из-за которого звезда кажется застывшей, также заставляет ее темнеть и становиться черной. В приближении континуума, когда дискретность фотонов не учитывается, интенсивность принимаемого удаленным наблюдателем излучения падает экспоненциально со временем $I \sim \exp(-t/3\sqrt{3}M)$; время, за которое интенсивность уменьшается в e раз, крайне мало:

$$\tau = 3\sqrt{3}M = (2{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{с})\,(M/M_{\odot}).$$

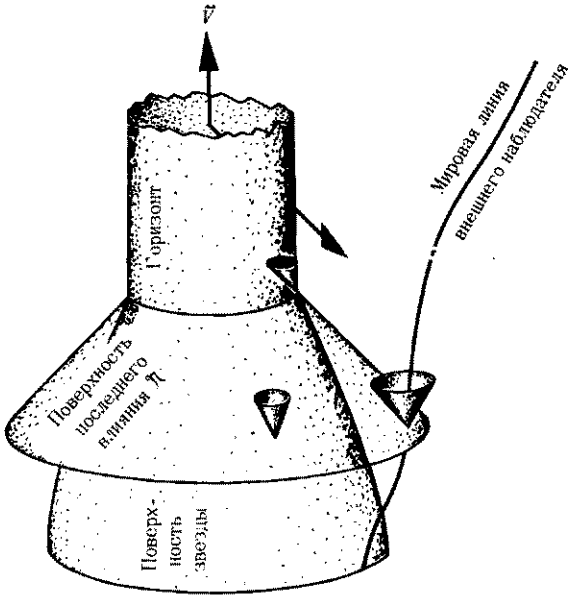
За доли секунды звезда становится по существу черной. Дискретность фотонов делает ее еще чернее. Число фотонов, ис-

[1]) Основы «физики черных дыр» более подробно изложены в книге [95].

пущенных до того, как звезда пересечет свой горизонт, конечно, а это значит, что экспоненциальное уменьшение интенсивности не может продолжаться вечно. В конце концов — лишь через 10^{-3} $(M/M_\odot)$ с после того момента, когда звезда начала тускнеть [см. упражнение (32.2)],— последний из всех фотонов, выходящих наружу, достигнет удаленного наблюдателя. После этого из звезды ничего больше не выходит. Звезда теперь не просто «по существу черная», она является уже *абсолютно черной*.

Сагредус. Согласен. Но меня интересует слово «дыра», а не слово «черная». Как можно считать, что название «дыра» выбрано удачно, если объект, к которому это название относится, навечно повис прямо над своим горизонтом. Действительно, отсутствие света делает объект невидимым. Но разве нельзя в любой момент увидеть его, если осветить его поверхность яркой вспышкой света? И разве нельзя в любой момент подлететь к его поверхности на космическом корабле и собрать некоторое количество барионов звезды? В конце концов, находясь вне звезды, мы можем видеть, что барионам на поверхности звезды никогда, никогда, никогда не удастся упасть внутрь горизонта!

Сальватиус. Ваш довод *звучит* убедительно. Чтобы проверить его справедливость, исследуем коллапс сферически симметричной системы с помощью диаграммы Эддингтона — Финкельштейна для сжимающейся системы координат (фиг. 33.1). Пусть группа внешних наблюдателей освещает своими фонарями поверхность звезды, как вы только что предложили. Пусть поверхность звезды покрыта серебром, так что она отражает обратно весь падающий на нее свет. Сначала (в самом низу фиг. 33.1, изображающей пространство-время) пучок света, распространяющийся к звезде, без каких-либо осложнений достигает ее поверхности и отражается обратно по направлению к источнику света. Но имеется критическая точка — сжимающаяся радиальная нулевая поверхность $\mathcal{N}$, за которой отражение невозможно. Фотоны, испущенные внутрь вдоль $\mathcal{N}$, достигают звезды в тот момент, когда ее поверхность пересекает горизонт. После отражения эти фотоны летят «назад» вдоль горизонта, оставаясь все время на одном и том же радиусе $r = 2M$. Другие фотоны, испущенные внутрь после прохождения фонаря через $\mathcal{N}$, достигают поверхности звезды и отражаются от нее лишь после того, как звезда попадает под свой горизонт. Такие фотоны никогда не смогут вернуться к тому фонарю, из которого они были испущены. Попав однажды под горизонт, они никогда не смогут оттуда выбраться. Таким образом, полное число вернувшихся фотонов является конечным и подчиняется тому же закону почернения, что и светимость, присущая самой звезде. Более того, *если наблюдатели не включили свои фонари*



ФИГ. 33.1.
Сферический гравитационный коллапс в сжимающихся координатах Эддингтона — Финкельштейна. «Поверхность последнего влияния» $\mathcal{N}$ представляет собой сжимающуюся нулевую поверхность, пересечение которой с горизонтом совпадает с пересечением горизонта поверхностью коллапсирующей звезды. После того как внешний наблюдатель, двигаясь вперед во времени, пересек поверхность последнего влияния, он уже не может взаимодействовать со звездой или оказать на нее какое-либо влияние прежде, чем поверхность звезды уйдет под горизонт. Поэтому поверхность последнего влияния можно представлять себе как «место рождения» черной дыры. До пересечения этой поверхности внешний наблюдатель может сказать, что с помощью фонаря он исследует форму коллапсирующей звезды; после прохождения через эту поверхность он может считать, что посылаемые им сигналы исследуют уже черную дыру. Дальнейшее обсуждение этого вопроса см. в тексте.

до того, как они сами пересекли нулевую поверхность $\mathcal{N}$, *то они никогда не смогут получить обратно ни одного отраженного фотона*! Очевидно, фонари не помогут увидеть «застывшую звезду».

Сагредус. Я не могу не согласиться с логичностью вашего доказательства. Тем не менее визуальное наблюдение — не единственный способ взаимодействовать с застывшей звездой. Как я уже предлагал, можно устремиться вниз на космическом корабле и захватить некоторое число барионов с поверхности. Можно также позволить веществу упасть по радиусу на застывшую звезду. Когда это вещество ударится о поверхность звезды, огромная кинетическая энергия превратится в тепло и выйдет наружу в виде излучения.

Сальватиус. На первый взгляд кажется, что это могло бы произойти. Но обратимся вновь к изучению фиг. 33.1. Никакой космический корабль, устремившийся вниз, никакое вещество не может двигаться быстрее, чем луч света. Таким образом, если решение лететь вниз принято после того, как корабль пересек поверхность $\mathscr{N}$, то космический корабль не сможет достичь звезды раньше, чем она упадет под горизонт; ни ракета, ни пилот не смогут коснуться звезды, захватить барионы с ее поверхности и вернуться, чтобы поведать нам о своих приключениях. Точно так же падающее вещество, движение которого происходит по отношению к $\mathscr{N}^+$ в будущем, никогда не сможет удариться о поверхность звезды прежде, чем она пересечет горизонт. Поверхность $\mathscr{N}^+$ на самом деле является «поверхностью последнего влияния». Если кто-то или что-то пересекает поверхность $\mathscr{N}^+$, он или оно не имеет никакой возможности когда-либо и как-то влиять на звезду или взаимодействовать с ней прежде, чем звезда упадет под горизонт. Таким образом, *с точки зрения причинности или «взаимодействия» коллапсирующая звезда на поверхности $\mathscr{N}^+$ превращается в дыру в пространстве.* Сначала эта дыра не является черной. Вследствие конечности скорости света излучение коллапсирующей звезды в течение некоторого времени после достижения $\mathscr{N}$ еще выходит, точно так же как излучение Большого взрыва горячей Вселенной доходит до нас и сегодня. Но если наблюдатель, расположенный на радиусе $r \gg 2M$, подождет в течение времени $2r$ после прохождения через $\mathscr{N}$ (столько времени нужно для того, чтобы поверхность $\mathscr{N}^+$ достигла горизонта и лучи света, испущенные на радиусе $R \sim 3M$, вернулись к наблюдателю), то он увидит, что недавно возникшая дыра начинает превращаться в черную; затем по прошествии времени $\Delta t \sim (10^{-3}\text{ с})\ (M/M_\odot)$ дыра станет совершенно черной.

Сагредус. Вы убедили меня. Для всех практических целей выражение «черная дыра» прекрасно описывает объект. Другие названия, такие, как «застывшая звезда» и «сколлапсировавшая звезда», которые встречались в физической литературе до 1969 г., подчеркивают те аспекты явления, которые связаны с оптическим обманом. Нужно не обращать внимания на звезду, породившую черную дыру, поскольку нет способа взаимодействовать со звездой, находясь вне поверхности последнего влияния. Звезда не имеет никакого отношения к физике и астрофизике последующих явлений. Только горизонт и его внешняя геометрия пространства-времени имеют отношение к будущему. Давайте договоримся называть горизонт «поверхностью черной дыры», а ее внешнюю геометрию «гравитационным полем черной дыры».

Сальватиус. Согласен.

§ 33.2. ГРАВИТАЦИОННОЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Коллапс электрически нейтральной звезды, обладающей сферической симметрией, приводит к появлению сферической черной дыры с внешним гравитационным полем, которое описывается шварцшильдовским линейным элементом

$$ds^2 = -(1-2M/r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2). \quad (33.1)$$

Поверхность черной дыры (т. е. горизонт) расположена при $r = 2M$ (на гравитационном радиусе). Лишь область на поверхности черной дыры и вне ее при $r \geqslant 2M$ связана с внешними наблюдателями. События, происходящие внутри горизонта, никогда не смогут повлиять на внешнюю область.

Структура черной дыры однозначно определяется ее массой M, зарядом Q и собственным моментом импульса S

Гравитационный коллапс реальной звезды (несферический коллапс с малым, но отличным от нуля зарядом того или иного знака) приводит к черной дыре, которая несколько отличается от простой шварцшильдовской дыры. Для коллапса с малым зарядом и малыми отклонениями от симметрии вычисления в рамках теории возмущений (дополнение 32.2) предсказывают, что предельное внешнее поле черной дыры полностью определяется массой M, зарядом Q и собственным моментом импульса S коллапсирующей звезды. Для сильно релятивистского коллапса с большой асимметрией и со сколь угодно большим зарядом предельная черная дыра (если она образовалась) также однозначно определяется значениями M, Q и S. Это утверждение в 1972 г. кажется достаточно обоснованным, если исходить из ряда мощных теорем, описанных в дополнении 33.1.

Эвристическое объяснение M-Q-S-однозначности

Почему M, Q и S должны полностью определять предельное внешнее поле черной дыры, можно объяснить следующим образом. Из всех величин, характеризующих любой изолированный источник гравитационного и электромагнитного полей, только M, Q и S обладают (и определяются) *однозначными сохраняющимися отпечатками* на внешние поля источника на больших расстояниях [1]) (сохраняющиеся интегралы Гаусса для потоков, см. дополнение 19.1 и § 20.2). Когда звезда коллапсирует, образуя черную дыру, ее внешние поля на больших расстояниях поддерживают неизменными отпечатки, которые на них накладываются величинами M, Q и S. Фактически M, Q и S накладывают сильные ограничения, или связи, на форму полей. Вначале внешние поля подчиняются и другим требованиям, которые накладываются распределениями массы, момента, натяжений, зарядов и токов внутри звезды. Но в конечном итоге звезда стремительно

[1]) Иначе говоря, по внешнему полю всегда можно однозначно восстановить сохраняющиеся значения величин M, Q и S.— *Прим. перев.*

пересекает горизонт, обособляясь в смысле причинности от внешней вселенной. (Невозможность распространения длинных волн через искривленное пространство-время играет решающую роль в этом обособлении черной дыры от остальной вселенной; см. дополнение 32.2.) Таким образом, только сохраняющиеся отпечатки величин M, Q и S продолжают фиксировать внешние поля. Поэтому внешние поля быстро принимают те равновесные формы, которые однозначно определяются данными M, Q и S. Конечно, процесс установления равновесия сопровождается динамическими изменениями полей и связанными с этими изменениями потоками гравитационных и электромагнитных волн. Уходящие волны, конечно, уносят с собой массу и момент импульса (но не заряд), так что M и S изменяются. При этом внешние поля должны подстраиваться к новым значениям M и S. Но этот процесс быстро сходится, приводя к черной дыре с определенными предельными значениями M, Q и S и с внешними полями, однозначно определяемыми этими значениями.

Задача вычисления внешних полей по заданным M, Q и S, когда отпечатки этих величин на внешние поля тоже заданы, аналогична задаче Плато — вычислению формы мыльной пленки, натянутой на проволоку заданной формы [1]). Форму мыльной пленки вычисляют путем поиска поверхности с минимальной площадью, закрепленной на этой изогнутой проволоке. Условие минимума площади приводит к дифференциальному уравнению, описывающему форму мыльной пленки, которое необходимо решить, удовлетворяя требованиям, налагаемым формой проволоки.

Вариационный принцип, применяемый к структуре черной дыры

Чтобы вычислить внешние поля черной дыры, можно найти экстремум «интеграла действия» $\int (\mathcal{R} + \mathcal{L}) \sqrt{-g}\, d^4x$ для взаимодействующих гравитационного и электромагнитного полей (см. гл. 21) при условии, что отпечатки величин M, Q и S на радиальной бесконечности фиксированы; другим условием является существование физически несингулярного горизонта (на горизонте нет бесконечной кривизны!). Поиск экстремума действия эквивалентен совместному решению связанных уравнений Эйнштейна — Максвелла при выполнении условий, налагаемых величинами M, Q и S и существованием горизонта. Вывод этого решения и доказательство его единственности слишком сложны и здесь не приводятся. (Литература указана в дополнении 33.1.) Оказывается, что решением является *геометрия Керра — Ньюмана* и связанное с этой геометрией электромагнитное поле [2]).

---

[1]) О задаче Плато см. [96, 97] или [98] (стр. 157).

[2]) Незаряженный вариант ($Q = 0$) впервые был найден Керром [99] как решение уравнений поля Эйнштейна в вакууме. Обобщение на случай, когда имеется заряд, было получено Ньюманом и др. [100] как решение уравнений поля Эйнштейна — Максвелла. Связь этих решений с черными дырами была обнаружена позднее; см. дополнение 33.1.

Детальная структура черной дыры:

Записанная в координатах Бойера — Линдквиста [101] t, r, θ, ϕ (которые являются обобщением шварцшильдовских координат), геометрия Керра — Ньюмана имеет следующий вид:

1) метрика («геометрия Керра — Ньюмана»)

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}[dt - a\sin^2\theta\, d\phi]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\,d\phi - a\,dt]^2 + \\ + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \tag{33.2}$$

где

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \tag{33.3а}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{33.3б}$$

$$a \equiv S/M \equiv \text{удельный момент импульса.} \tag{33.4}$$

Соответствующий тензор электромагнитного поля, записанный в 2-форме (напомним, что $\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \equiv \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta - \mathbf{d}x^\beta \otimes \mathbf{d}x^\alpha$), есть

2) электромагнитное поле

$$\mathbf{F} = Q\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)\,\mathbf{d}r \wedge [\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi] + \\ + 2Q\rho^{-4}ar\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{d}\theta \wedge [(r^2+a^2)\,\mathbf{d}\phi - a\,\mathbf{d}t]. \tag{33.5}$$

Выражения (33.2) для метрики и (33.5) для электромагнитного поля настолько громоздки, что производят устрашающее впечатление. Поэтому, прежде чем приступить к детальным вычислениям, полезно добиться качественного понимания этих выражений и следствий из них. В дополнениях 33.2—33.4 развивается такой качественный подход; в этих дополнениях приводится без доказательства обзор наиболее важных особенностей геометрии Керра — Ньюмана, а также обзор физики и астрофизики черных дыр. Остальная часть этой главы относится к курсу 2 и посвящена обоснованию и выводу некоторых результатов, приведенных в дополнениях 33.2—33.4.

Дополнение 33.1. У ЧЕРНОЙ ДЫРЫ НЕТ «ВОЛОС»

Следующие ниже теоремы вплотную подводят нас к доказательству того, что *внешние гравитационное и электромагнитное поля стационарной черной дыры* (черной дыры, которая пришла в свое «предельное» состояние покоя) *однозначно определяются массой дыры M, ее зарядом Q и собственным моментом импульса S*, т. е. у черной дыры нет «волос» (нет других независимых характеристик). Детальный обзор имеется в работе Картера [102].

I. Стивен Хоукинг [103, 104]: Стационарная черная дыра должна иметь горизонт со сферической топологией, и она должна быть либо статической (момент импульса равен нулю), либо аксиально симметричной, либо и то и другое вместе.

II. Вернер Израэль [105, 106]: Любая *статическая* черная дыра с горизонтом, имеющим топологию сферы, создает внешние поля, которые однозначно определяются ее массой M и зарядом Q; более того, эти внешние поля представляют собой шварцшильдовское решение, если $Q = 0$, и решение Рейснера — Нордстрема (упражнения 31.8 и 32.1), если $Q \neq 0$ (оба решения представляют собой частные случаи решения Керра — Ньюмана, см. § 33.2) [1]).

III. Брандон Картер [107]: «Все незаряженные, стационарные, аксиально симметричные черные дыры с горизонтом, обладающим топологией сферы, разбиваются на отдельные семейства, причем между этими семействами нет непрерывного перехода. Черные дыры каждого семейства имеют внешние гравитационные поля, которые однозначно определяются двумя параметрами: массой M и моментом импульса S.» (*Примечание.* «Решения Керра», т. е. решения Керра — Ньюмана с $Q = 0$, образуют одно из таких семейств; весьма вероятно, что других семейств не существует, но к декабрю 1972 г. это не было доказано. Весьма вероятно также, что теорема Картера может быть распространена на случай, когда имеется заряд, но это пока не сделано.)

IV. Объединяя все три теоремы, приходим к следующим выводам:

а. Все стационарные черные дыры аксиально симметричны.

б. Все статические (невращающиеся) черные дыры однозначно характеризуются значениями M и Q и представляют собой решения Рейснера — Нордстрема.

в. Все незаряженные вращающиеся черные дыры разбиваются на отдельные несвязанные друг с другом семейства, причем каждая черная дыра в данном семействе однозначно характеризуется значениями M и S. Решения Керра образуют одно такое семейство. Не исключено, что других семейств не существует.

V. Замечания.

а. Все приведенные выше формулировки теорем являются до некоторой степени эвристическими. В каждой теореме делаются некоторые весьма формальные допущения о глобальных свойствах пространства-времени, которые здесь не приведены. Эти допущения кажутся физически разумными и безобидными, но может случится, что это не так.

б. Прогресс в области физики черных дыр происходит настолько быстро, что к моменту выхода в свет этой книги, возможно, будут существовать теоремы, более сильные, чем изложенные выше, и эти теоремы будут действительно доказывать, что «у черных дыр нет волос».

в. Методы «глобальной геометрии», которые используются для доказательства приведенных выше теорем и других схожих с ними теорем, описаны в гл. 34; более подробно это изложено в книге Хоукинга и Эллиса [108].

г. В работах Хартля [85, 86] и Тейтельбома [87, 88] показано, что черные дыры не могут создавать сил слабого взаимодействия, вызванных лептонами, попавшими в дыру. Аналогичные исследования, показывающие отсутствие сил сильного взаимодействия со стороны барионов, попавших в дыру, проведены в работах Бекенштейна [89, 90] и Тейтельбома [91].

---

[1]) Обзор проблемы дан в докладе Пресса [503]. О единственности внешнего поля вращающейся черной дыры см. [504].— *Прим. ред.*

Дополнение 33.2. ГЕОМЕТРИЯ КЕРРА — НЬЮМАНА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

I. Уравнения для метрики и электромагнитного поля

А. Параметры, входящие в уравнения:
M — масса, Q — заряд, $a \equiv S/M$ — удельный момент импульса; все эти величины измеряются обычным образом по отпечаткам, которые они накладывают на поля на больших расстояниях.

Б. Ограничения, налагаемые на параметры:
Геометрия Керра — Ньюмана обладает горизонтом и, следовательно, описывает черную дыру в том и только том случае, когда $M^2 \geqslant Q^2 + a^2$. Кажется весьма вероятным, что в любом коллапсирующем теле, в котором это ограничение нарушается, центробежные и (или) электромагнитные силы отталкивания остановят коллапс, прежде чем будет достигнут характерный размер $\sim M$; см. уравнение (33.56).

В. Предельные случаи:
$Q = 0$ — геометрия Керра [99];
$S = 0$ — геометрия Рейснера — Нордстрема и электромагнитное поле (упражнения 31.8 и 32.1);
$Q = S = 0$ — геометрия Шварцшильда;
$M^2 = Q^2 + a^2$ — «экстремальная геометрия Керра — Ньюмана».

Г. Координаты Бойера — Линдквиста [101] (обобщение шварцшильдовских координат t, r, θ, ϕ; черная дыра вращается в направлении ϕ):

$$ds^2 = -(\Delta/\rho^2)\,[dt - a\sin^2\theta\,d\phi]^2 + (\sin^2\theta/\rho^2)\,[(r^2+a^2)\,d\phi - a\,dt]^2 + (\rho^2/\Delta)\,dr^2 + \rho^2\,d\theta^2; \tag{1}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta\,; \tag{2}$$

$$\mathbf{F} = Q\rho^{-4}\,(r^2 - a^2\cos^2\theta)\,\mathbf{dr} \wedge [\mathbf{dt} - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi] + \\ + 2Q\rho^{-4}ar\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{d}\theta \wedge [(r^2+a^2)\,\mathbf{d}\phi - a\,\mathbf{dt}]. \tag{3}$$

Д. Координаты Керра (обобщение сжимающейся системы координат $\tilde{V}$, r, θ, $\tilde{\phi}$ Эддингтона — Финкельштейна; $(\tilde{V}, \theta, \tilde{\phi}) = \text{const}$ есть сжимающаяся «радиальная», нулевая геодезическая; черная дыра вращается в направлении $\tilde{\phi}$).

Связь с координатами Бойера — Линдквиста:

$$\mathbf{d}\tilde{V} = \mathbf{dt} + (r^2+a^2)\,(\mathbf{dr}/\Delta), \\ \mathbf{d}\tilde{\phi} = \mathbf{d}\phi + a\,(\mathbf{dr}/\Delta). \tag{4}$$

$$ds^2 = -[1 - \rho^{-2}\,(2Mr - Q^2)]\,d\tilde{V}^2 + 2\,dr\,d\tilde{V} + \rho^2\,d\theta^2 + \\ + \rho^{-2}\,(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta\,d\tilde{\phi}^2 - 2a\sin^2\theta\,d\tilde{\phi}\,dr - \\ - 2a\rho^{-2}\,(2Mr - Q^2)\sin^2\theta\,d\tilde{\phi}\,d\tilde{V}. \tag{5}$$

$$\mathbf{F} = Q\rho^{-4}\,[(r^2 - a^2\cos^2\theta)\,\mathbf{dr} \wedge \mathbf{d}\tilde{V} - 2a^2r\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\tilde{V} - \\ - a\sin^2\theta\,(r^2 - a^2\cos^2\theta)\,\mathbf{dr} \wedge \mathbf{d}\tilde{\phi} + 2ar\,(r^2+a^2)\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\tilde{\phi}]. \tag{6}$$

II. Свойства геометрии пространства-времени

А. Симметрии (§ 33.4):
Метрические коэффициенты в координатах Бойера — Линдквиста не зависят от t и ϕ, а в координатах Керра — от $\tilde{V}$ и $\tilde{\phi}$. Таким образом, геометрия пространства-времени является «независящей от времени» (стационарной) и аксиально симметричной. «Векторы Киллинга» (§ 25.2), связанные с этими двумя симметриями, суть $(\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi} = (\partial/\partial\tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}}$ и $(d/d\phi)_{t,r,\theta} = (\partial/\partial\tilde{\phi})_{\tilde{V},r,\theta}$.

Б. Увлечение инерциальных систем отсчета и предел статичности (§ 33.4):

1. «Увлечение инерциальных систем отсчета» моментом импульса черной дыры приводит к прецессии гироскопов относительно далеких звезд. По этой прецессии определяется и измеряется момент импульса черной дыры (см. § 19.2 и 19.3).
2. Чем ближе мы подходим к горизонту черной дыры, тем сильнее становится увлечение. Прежде чем мы достигнем горизонта, на поверхности, которая описывается выражением

$$r = r_0(\theta) \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2\cos^2\theta}\,, \tag{7}$$

увлечение становится столь сильным, что ни один наблюдатель не может оставаться неподвижным (т. е. быть «статическим») относительно далеких звезд. На этой поверхности (называемой *пределом статичности*) и внутри нее все наблюдатели с фиксированными r и θ должны двигаться по орбите вокруг черной дыры в том же направлении, в котором вращается сама дыра:

$$\Omega \equiv d\phi/dt > \frac{a\sin\theta - \sqrt{\Delta}}{(r^2+a^2)\sin\theta - \sqrt{\Delta}\, a\sin^2\theta}$$
$$(\geqslant 0 \text{ при } a = S/M > 0 \quad \text{и} \quad r \leqslant r_0).$$

Независимо от того, какую мощность развивают его реактивные двигатели, наблюдатель при фиксированных r и θ внутри предела статичности никогда не сможет остановить свое вращательное движение относительно далеких звезд.

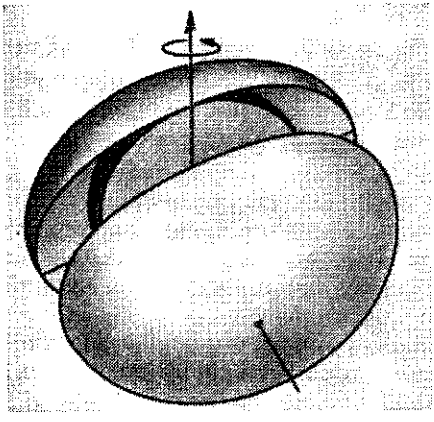
3. Математическое обоснование приведенного только что утверждения сводится к следующему. Мировая линия вида $(r, \theta, \phi) = \text{const}$ (тангенциальный вектор $\sim \partial/\partial t$ равен «вектору Киллинга в направлении времени») из времениподобной, какой она была вне предела статичности, превращается в пространственноподобную внутри предела статичности. Следовательно, ни на пределе статичности, ни внутри него никакой наблюдатель не может оставаться неподвижны .

В. Горизонт (§ 33.4):

1. Горизонт расположен на радиусе

$$r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}\,. \tag{8}$$

2. Как в случае шварцшильдовского горизонта невращающейся черной дыры, так и здесь частицы и фотоны могут падать внутрь, пересекая горизонт, но ни частица, ни фотон не могут выходить из-под горизонта.
3. Горизонт «генерируется» выходящими нулевыми геодезическими (мировыми линиями движущихся наружу фотонов).



Качественная картина горизонта, эргосферы и предела статичности (из работы [115]).

Г. Эргосфера (§ 33.4):

1. «Эргосферой» называется область пространства-времени, расположенная между горизонтом и пределом статичности. Она играет фундаментальную роль в физике черных дыр (дополнение 33.3, § 33.7).
2. Предел статичности и горизонт касаются друг друга в точках, где они пересекаются с осью вращения черной дыры ($\theta = 0, \pi$); всюду, за исключением этих точек, они отделены друг от друга, причем предел статичности всегда находится вне горизонта, если $a \neq 0$. При $a = 0$ (когда вращение отсутствует) предел статичности и горизонт совпадают; в этом случае отсутствует увлечение инерциальных систем отсчета, нет эргосферы.

Д. Сингулярность в координатах Бойера — Линдквиста:

1. В случае невращающейся черной дыры шварцшильдовские координаты становятся сингулярными на горизонте. Одно из проявлений этой сингулярности состоит в том, что для падения под горизонт частице или фотону требуется бесконечное координатное время: $t \to \infty$ при $r \to 2M$. Один из способов избавиться от этой сингулярности (способ Эддингтона — Финкельштейна) заключается в замене t на нулевую координату

$$\tilde{V} = t + r + 2M \ln | r/2M - 1 |,$$

отнесенную к падающим фотонам [$(\partial/\partial r)_{\tilde{V}, \theta, \phi}$ есть вектор, касательный мировым линиям фотонов].

2. В случае вращающейся черной дыры координаты Бойера — Линдквиста, которые являются обобщением шварцшильдовских координат, тоже сингулярны на горизонте. Чтобы упасть под горизонт, любой частице или фотону требуется бесконечное координатное время: $t \to \infty$ при $r \to r_+$. Но это не все. Увлечение инерциальных систем отсчета вблизи горизонта заставляет частицы и фотоны двигаться по орбите с $\Omega \equiv d\phi/dt > 0$. Следовательно, для падающей под горизонт частицы ($r \to r_+$) точно так же как $t \to \infty$, так и $\phi \to \infty$ (бесконечное закручивание мировых линий вокруг горизонта).
3. Чтобы избавиться от координатной сингулярности, необходимо в окрестности горизонта совершить бесконечное сжатие координатного времени и бесконечное раскручивание. Это достигается в координатах Керра заменой t на нулевую координату $\tilde{V}$ и ϕ — на раскрученную угловую координату $\tilde{\phi}$:

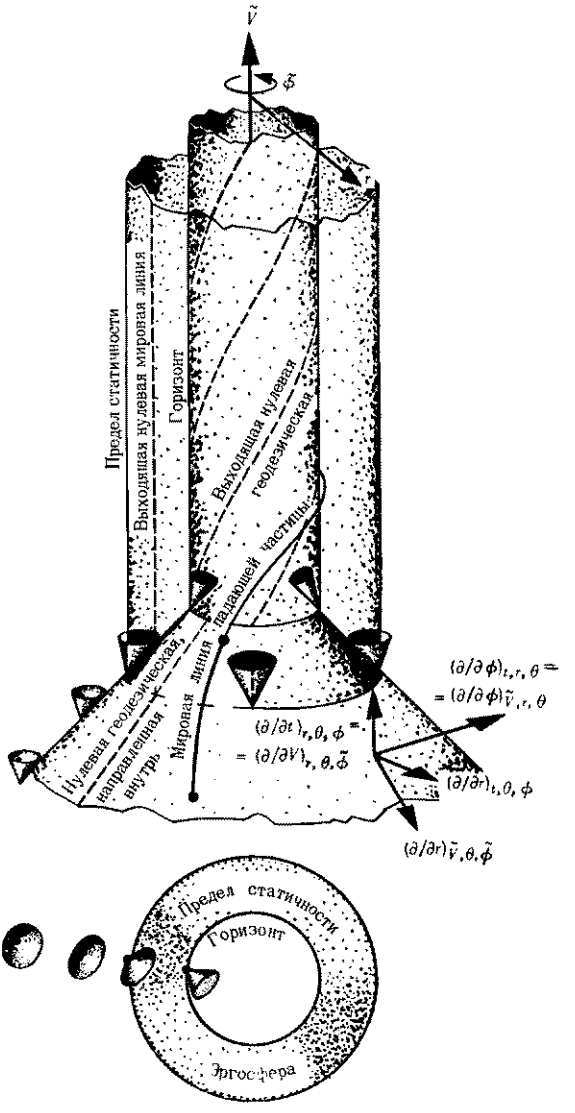
$$\mathbf{d}\tilde{V} = \mathbf{d}t + (r^2 + a^2)(\mathbf{d}r/\Delta),$$
$$\mathbf{d}\tilde{\phi} = \mathbf{d}\phi + a(\mathbf{d}r/\Delta).$$

Обе новые координаты связаны с мировыми линиями специально выбранного семейства падающих фотонов; $(\partial/\partial r)_{\tilde{V},\,\theta,\tilde{\phi}}$ является полем векторов, касательных мировым линиям фотонов этого семейства (сжимающаяся главная нулевая конгруэнция; § 33.6).

Е. Пространственно-временна́я диаграмма:

1. Пространственно - временна́я диаграмма в координатах Керра очень похожа на диаграмму Эддингтона — Финкельштейна для шварцшильдовской геометрии. И в том и другом случаях поверхности постоянного $\tilde{V}$ изображаются не горизонтальными плоскостями, а «направленными в прошлое световыми конусами» («поверхностями с наклоном 45°»), поскольку они образованы мировыми линиями движущихся внутрь фотонов. По этой же причине поверхности постоянного $\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r$ изображаются горизонтальными плоскостями.
2. Главные различия между диаграммами Керра и Эддингтона — Финкельштейна заключаются в следующем: а. Поскольку геометрия Керра — Ньюмана не является сферической, диаграмма Керра, на которой одна из вращательных степеней свободы не изображена, дает неполную информацию о геометрии. Диаграмму Керра, как правило, строят для экваториальной «плоскости» $\theta = \pi/2$. б. Точно так же как горизонт тянет световые конусы внутрь, так и увлечение инерциальных систем отсчета наклоняет световые конусы в направлении

Диаграмма Керра для экваториального сечения ($\theta = \pi/2$) пространства-времени «экстремальной керровской» черной дыры ($Q = 0$, $a = M$).



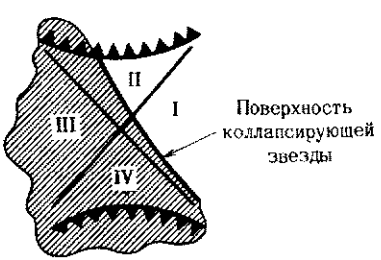
Вид сверху, показывающий зависимость формы светового конуса от радиуса.

увеличения $\tilde{\phi}$ при $a > 0$ и $r = \text{const}$. в. *Направленная внутрь* образующая светового конуса ($dr/d\tilde{V} = -\infty$) *не* повернута в сторону увеличения $\tilde{\varphi}$: в координатах Бойера — Линдквиста поворот с уменьшением r имел бы место вследствие «увлечения систем отсчета», но преобразование от координат Бойера — Линдквиста к координатам Керра раскручивает этот поворот.

3. Из формы световых конусов мы узнаем специфические свойства предела статичности и горизонта. На пределе статичности вертикальная мировая линия [r, θ, $\tilde{\varphi}$ постоянны, $(\partial/\partial\tilde{V})_{r,\,\theta,\,\tilde{\varphi}} = (\partial/\partial t)_{r,\,\theta,\,\varphi}$ — касательный вектор] лежит на световом конусе. На горизонте световые конусы целиком наклонены внутрь, если не считать одной линии касания. Заметим, что для линии касания имеет место соотношение $d\tilde{\varphi}/d\tilde{V} = a/(r_+^2 + a^2) \neq 0$. Выходящие нулевые геодезические, образующие горизонт, тоже закручиваются вокруг горизонта; это еще одно проявление увлечения инерциальных систем отсчета.
4. Диаграмма Керра, так же как и диаграмма Эддингтона — Финкельштейна, правильно и без сингулярностей описывает падение с пересечением горизонта.
5. [Термин «диаграмма Керра» является не совсем правильным. Керр никогда таких диаграмм не опубликовывал, хотя в настоящее время строят подобные диаграммы, используя систему координат Керра. Первым такую диаграмму построил Пенроуз; он же больше других использует подобные диаграммы (см., например, [109]). Но имя Пенроуза носят диаграммы нескольких других типов, поэтому возникла бы путаница, если бы все диаграммы были названы его именем.

Ж. Максимальное аналитическое продолжение геометрии Керра — Ньюмана:

1. Когда мы абстрагируемся от всех источников геометрии Шварцшильда (гл. 31), мы обнаруживаем, что эта геометрия описывает расширяющийся, а затем вновь сжимающийся мост, который соединяет две различные вселенные. Но к черным дырам имеет отношение лишь половина геометрии Шварцшильда (области I и II). Другая половина (области III и IV) полностью заменяется областью внутри звезды, коллапс которой приводит к черной дыре. Поскольку играет роль лишь часть геометрии Шварцшильда, сжимающаяся система координат Эддингтона — Финкельштейна, хорошо описывающая области I и II и плохо — области III и IV, вполне применима в физике черных дыр.



2. Аналогично, когда мы абстрагируемся от всех источников геометрии Керра — Ньюмана, мы обнаруживаем, что эта геометрия представляет такое большое и такое сложное пространственно-временное многообразие, какого нельзя было заранее ожидать. Это так называемое «максимальное аналитическое продолжение» геометрии Керра — Ньюмана было подробно исследовано Бойером и Линдквистом [101], а также Картером [110, 111]. Но к вопросу о черных дырах оно не имеет никакого отношения по двум причинам. Во-первых, большую часть многообразия

Керра — Ньюмана, продолженного внутрь, заменяет собой звезда, коллапс которой привел к образованию черной дыры; это происходит аналогично тому, что имеет место в случае геометрии Шварцшильда. Во-вторых, даже вне звезды геометрия Керра — Ньюмана не дает адекватного описания реальной геометрии в начальные моменты времени. На ранней стадии коллапса, когда звезда сжалась не достаточно сильно, еще имеются гравитационные мультипольные моменты, обусловленные возвышенностями, впадинами, турбулентностью или какими-то другими деталями, еще не попавшими в «мясорубку». Отличие геометрии от плоского многообразия проявляется 1) за счет члена, который изменяется на больших расстояниях как масса, деленная на расстояние, 2) за счет другого члена, который на больших расстояниях изменяется как момент импульса, деленный на квадрат расстояния и умноженный на сферическую гармонику, равную по порядку величины единице, но, кроме того, 3) за счет членов более высоких порядков, пропорциональных более высоким мультипольным моментам массы, умноженным на более высокие сферические гармоники. В обычном случае эти члены высоких порядков вначале отличаются от соответствующих математических выражений, даваемых геометрией Керра — Ньюмана, хотя с течением времени эти отклонения исчезают. В системе, обладающей сферической симметрией, подобных членов высоких порядков нет и не может быть. Поэтому внешняя геометрия в сферическом случае является по своему характеру шварцшильдовской на всех стадиях коллапса. Однако если система не обладает сферической симметрией, то внешняя геометрия вначале отличается по своему характеру от геометрии Керра — Ньюмана. *Только после того, как коллапс завершился* (в асимптотике $t \to \infty$), *и только в области, расположенной на самом горизонте и вне его, геометрия Керра — Ньюмана правильно описывает черную дыру.* Эта область несингулярным образом описывается координатами Керра и диаграммой Керра; только эта область изучается в настоящей книге.

З. Орбиты пробных частиц:

См. § 33.5—33.8 и дополнение 33.5.

III. Свойства электромагнитного поля (§ 33.3)

А. Вдали от черной дыры, где пространство-время почти плоское, в обычной сферической ортогональной системе координат ($\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = \mathbf{d}t$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = \mathbf{d}r$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi$) преобладающие компоненты электрического и магнитного полей имеют вид

$$E_{\hat{r}} = \frac{Q}{r^2}, \qquad B_{\hat{r}} = \frac{2Qa}{r^3}\cos\theta, \qquad B_{\hat{\theta}} = \frac{Qa}{r^3}\sin\theta.$$

Эти компоненты показывают, что Q — заряд черной дыры, $\mathscr{M} \equiv Qa$ — магнитный дипольный момент черной дыры.

Б. Заметим, что гиромагнитное отношение $\gamma \equiv$ (магнитный момент)/(момент импульса) равно Q/M = (заряд/масса) точно так же, как и для электрона!

В. Заметим, что значение магнитного момента, так же как и все другие свойства черной дыры, однозначно определяется массой, зарядом и момен-

том импульса дыры: $\mathcal{J} = QS/M$. Это является иллюстрацией теоремы (дополнение 33.1), гласящей, что у «черной дыры нет волос».

Г. Остальные электрические и магнитные моменты не равны нулю, но они однозначно определяются величинами M, S и Q.

Д. Вблизи черной дыры кривизна пространства-времени искажает электрическое и магнитное поля, создаваемые заряженной вращающейся черной дырой. Математическое описание этого искаженного поля см. в работе [112], а его графическое изображение — в работе [113].

Дополнение 33.3. АСТРОФИЗИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

Черные дыры должны участвовать во многих процессах во вселенной; по своему разнообразию эти процессы не уступают процессам с участием звезд. Проводя поиски наблюдаемых проявлений этих процессов, астрономы имеют прекрасную возможность открыть первую черную дыру уже в 70-х годах нашего столетия. В этом дополнении приводятся некоторые из возможных астрофизических процессов и даются ссылки на литературу.

I. Механизмы образования

А. «Прямой в изоляции». Массивная звезда ($M \geqslant 3M_\odot$) коллапсирует почти сферически, в результате получается ядро нейтронной звезды, которое слишком массивно, чтобы противостоять гравитации. Под действием гравитации ядро сжимается, образуя горизонт и черную дыру ([61, 114]; гл. 32 этой книги).

Б. «Косвенный в изоляции». «Сценарий коллапса, преследования и стремительного погружения», изображенный на фиг. 24.3 [115].

В. «Среди множества объектов». Звезды, собранные в плотное скопление (например, ядро Галактики), обмениваются энергией. Некоторые из них, получив энергию, движутся наружу в гало. Другие теряют энергию и образуют более компактное скопление. Такой процесс разделения непрерывно продолжается. Скопление становится настолько тесным, что происходят такие столкновения, при которых газ отрывается от звезд. Газ движется к центру гравитационной потенциальной ямы. Из него образуются новые звезды. Процесс продолжается. В конце концов столкновения звезд друг с другом становятся достаточно энергичными и достаточно неупругими для того, чтобы центральные части сталкивающихся звезд сливались в одно целое. Таким способом могут постепенно создаваться и эволюционировать сверхмассивные объекты. В итоге: 1) множество «маленьких» звезд может коллапсировать, образуя «маленькие» черные дыры ($M \sim M_\odot$); 2) одна или больше сверхмассивных звезд могут коллапсировать, образуя огромные черные дыры ($M \sim 10^4 M_\odot - 10^9\ M_\odot$); 3) весь конгломерат из звезд, газа и черных дыр может стать настолько плотным, что он коллапсирует, образуя одну гигантскую черную дыру ([116—120], см. также § 24.5, 24.6, 25.7 в томе 2 этой книги).

Г. «Первичные черные дыры». Начальные возмущения в распределении плотности расширяющейся вселенной могут привести к коллапсу, в резуль-

тате которого образуются «первичные черные дыры». Впоследствии эти черные дыры растут за счет аккреции излучения и вещества. К настоящему времени все такие дыры выросли бы до огромных объектов ($M \sim 10^{17}\ M_\odot$ [121]), но некоторые из них могли бы избежать этого роста и остаться весьма малыми, порядка 10^{-5} г [122] [1]).

II. Сколько черных дыр в нашей Галактике в настоящее время?

Прекрасный обзор на эту тему, а также о перспективах обнаружения черных дыр в ближайшем будущем сделал Пиблс [123]. Он утверждает, что «значительная часть вещества в диске нашей Галактики перешла (давным-давно) в такие звезды, которые способны коллапсировать до черных дыр... . Это указывает на то, что диск Галактики может содержать порядка 10^9 черных дыр».

III. «Живые» и «мертвые» черные дыры

А. Шварцшильдовская черная дыра «мертва» в том смысле, что из нее невозможно извлечь хоть какую-то часть ее массы-энергии. Один из аспектов этой «безжизненности»— тот факт, что шварцшильдовская черная дыра устойчива относительно малых возмущений, — является существенным 1) для отождествления черной дыры с предельным «основным состоянием» большой массы и 2) для утверждения, что общая теория относительности предсказывает возможность существования черных дыр. (Доказательство устойчивости см. в работе [124]. Проблема устойчивости была сформулирована Редже и Уилером [125], они же развили большинство необходимых методов; существенный вклад принадлежит также Зерилли [126].) Так, слабый импульс гравитационного (или какого-нибудь иного) излучения, падающего на шварцшильдовскую черную дыру, не вызовет превращения черной дыры в какой-то отличный от нее объект или переход в какое-то иное состояние.

Б. Черная дыра Керра — Ньюмана с вращением или с зарядом, или же и с тем и с другим, не является мертвой. Ту часть массы-энергии, которая является вкладом в полную массу-энергию вращения и электромагнитного поля, *можно* извлечь. (См. § 33.7 и 33.8, где изложены математические детали.) Таким образом, такие черные дыры являются «живыми»; они могут выбрасывать энергию в окружающее их пространство. С помощью подходящим образом устроенной внешней аппаратуры можно привести в действие взрывной механизм с экспоненциально нарастающим выделением энергии [127]. Но если возмущения накладываются на изолированную черную дыру, то выделение энергии всегда «сдерживается» и затухает, т. е. черная дыра Керра является стабильной в любом классическом контексте [128].

---

[1]) Об аккреции материи первичными черными дырами см. работу Карра и Хоукинга [499]. Открытие Хоукингом в 1974 г. процесса квантового «испарения» черных дыр показывает, что все первичные черные дыры с массой меньше $\sim 10^{35}$ г должны к настоящему времени полностью исчезнуть. См. об этом примечание редакторов на стр. 153. О возможности детектирования излучения от «испарения» первичных черных дыр см. работу Пейджа и Хоукинга [500]. — *Прим. ред.*

В. Большинство объектов (массивные звезды, ядра галактик, ...), которые могут коллапсировать с образованием черных дыр, обладают таким большим моментом импульса, что получающиеся из них дыры должны быть «очень живыми» (a почти равно M, S почти равно M^2) [129].

Г. Что касается заряда, то, наоборот, весьма вероятно (хотя далеко не достоверно), что ни одна черная дыра во Вселенной не имеет существенного электрического заряда, т. е. что у всех черных дыр $Q \ll M$. Черная дыра с $Q \sim M$ (скажем, $Q > 0$ для определенности) действовала бы на электроны с электростатической силой притяжения, а на протоны — с силой отталкивания, которая превосходила бы гравитационное притяжение дыры в

$$\frac{\text{электростатическая сила}}{\text{гравитационная сила}} = \frac{eQ}{\mu M} \sim \frac{e}{\mu} \sim 10^{20} \text{ раз.}$$

Здесь e — заряд, а μ — масса электрона (или протона). Скорее всего столь огромные силы электростатического притяжения и отталкивания затянут из внешней области в дыру столько заряда, что его окажется достаточно для нейтрализации заряда дыры.

Д. Из «процесса униполярной индукции» для нейтронных звезд [130] известно, что в некоторых случаях нейтрализации заряда можно избежать. Возможны или нет какие-нибудь процессы, препятствующие нейтрализации заряда в черных дырах, — этого к 1972 г. никто не знает.

IV. Взаимодействие черной дыры с окружающей средой

А. Гравитационное притяжение. Черная дыра оказывает гравитационное притяжение на окружающее ее вещество и звезды. На больших расстояниях $r \gg M$ это притяжение неотличимо от притяжения обычной звезды той же массы.

Б. Аккреция и испускание рентгеновских и γ-лучей. Окружающий черную дыру газ затягивается внутрь и нагревается за счет адиабатического сжатия, ударных волн, вязкости и т. д. Прежде чем газ достигнет горизонта, он может становиться таким горячим, что будет излучать большой поток рентгеновского и, может быть, даже γ-излучения. Таким образом, аккрецируемое вещество превращает черную дыру в ярко светящееся «белое» тело (обзор литературы см. в работе [131]). Аккреция вещества из невращающегося газового облака стремится уменьшить момент импульса черной дыры (преимущественная аккреция частиц с «отрицательным» моментом импульса [132, 133]). Но газ, окружающий дыру, вероятнее всего, вращается в том же направлении, что и сама черная дыра, и тем самым поддерживает $S \sim M^2$ (точнее $S \approx 0{,}998\ M^2$ [134]).

В. Сгусток вещества («астероид», «планета» или звезда), падающий в черную дыру, должен в процессе падения испускать импульс гравитационного излучения. Полная излученная энергия $E \sim 0{,}01\mu$ (μ/M), где μ — масса падающего объекта (фиг. 36.2) [135, 136].

Г. Объект на устойчивой круговой орбите вокруг черной дыры вследствие потери энергии на гравитационное излучение должен медленно по спирали падать вниз до тех пор, пока он не достигнет наиболее сильно связанной

устойчивой круговой орбиты. После этого он должен быстро упасть на дыру, испустив гравитационные волны в виде «всплеска последнего вздоха». Полная энергия, излученная в течение медленного падения по спирали, равна энергии связи на последней устойчивой орбите:

$$E_{\text{излуч}} = \mu - E_{\text{посл. орб}} = \begin{cases} 0{,}0572\mu \text{ для шварцшильдовской дыры,} \\ 0{,}4235\mu \text{ для керровской дыры с } S = M^2,\ Q = 0. \end{cases}$$

Здесь μ — масса покоя захваченного объекта (дополнение 33.5). Полная энергия, заключенная во всплеске последнего вздоха, есть $E \sim 0{,}01\mu(\mu/M)$, если $\mu \ll M$ (фиг. 36.2).

Д. Падая в черную дыру, вещество может возбудить колебания внешней геометрии пространства-времени вокруг черной дыры. Колебания превращаются постепенно в гравитационные волны; последние частично уходят на бесконечность, частично захватываются черной дырой [137, 138]. Эти колебания аналогичны «зарождающемуся гравитационному геону» [139, 140] — разница состоит лишь в том, что в случае осциллирующей черной дыры энергия колебаний удерживается в одном месте фоновой геометрией Керра (она мешает энергии колебаний мгновенно распространяться во все стороны), в то время как геон удерживается от распада кривизной, создаваемой «энергией колебаний».

Е. Посредством неньютоновского гравитационного взаимодействия в индукционной (т. е. не в волновой) зоне черная дыра постепенно превращает свой момент импульса в другие не аксиально симметричные распределения вещества и полей в окрестности дыры [104, 141—143].

Ж. Звезда и планета, падающие на большую черную дыру, будут разорваны на части гравитационными приливными силами. Если такой разрыв происходит вблизи горизонта, но вне его, то возможен выброс капли звездного вещества, которая с релятивистской скоростью уходит на бесконечность («эффект тюбика с зубной пастой»). Более того, выходящая на бесконечность струя может уносить из эргосферы дыры значительное количество вращательной энергии, т. е. дыра может выбросить такую струю, что сумма массы покоя и кинетической энергии последней превышает массу первоначально падающего объекта ([144], § 33.7 и 33.8).

З. Силовые линии магнитного поля заряженной черной дыры могут быть вморожены в окружающую плазму, могут закручиваться по мере вращения черной дыры; они могут также сотрясать, дергать и возбуждать плазму.

V. Соударения между черными дырами

А. Две черные дыры могут соударяться и сливаться в одну; но разорвать одну черную дыру на несколько черных дыр невозможно [104] (упражнение 34.4).

Б. При соударении и слиянии двух черных дыр площадь поверхности результирующей черной дыры должна превышать сумму площадей поверхности двух первоначальных черных дыр («второй закон динамики черных дыр» [103, 122], дополнение 33.4, § 34.5). Это ограничение налагает верхний предел на количество гравитационного излучения, испущенного при соударении. Например, если все три дыры являются шварцшильдовскими

и две первоначальные дыры имеют равные массы $M/2$, то

$$4\pi (2M_{\text{конечн}})^2 \geqslant 4\pi [2(M/2)]^2 + 4\pi [2(M/2)]^2, \quad M_{\text{конечн}} \geqslant M/\sqrt{2},$$

так что излученная энергия

$$E_{\text{излуч}} \leqslant M - M/\sqrt{2} = 0{,}293M.$$

VI. Где и как искать черную дыру (подробный обзор см. в работе [123])

А. Когда она образуется, по всплеску или всплескам гравитационного излучения, испускаемым в процессе формирования черной дыры (фиг. 24.3).

Б. В двойной системе компонента, являющаяся черной дырой, невидима, но вследствие аккреции она может испускать рентгеновское и γ-излучение; видимая компонента обнаруживает доплеровские смещения, из которых можно почерпнуть информацию о невидимой компоненте [145—149]. Скорость видимой компоненты и период дают информацию о массе невидимой компоненты. Если эта масса в четыре и более раз превышает солнечную, то невидимая компонента не может быть обычной звездой, поскольку обычная звезда с такой массой имела бы светимость, в $(4)^3 = 64$ раза превышающую светимость Солнца. Она не может быть ни белым карликом, ни нейтронной звездой, так как оба эти объекта, будучи столь массивными, мгновенно коллапсировали бы, превратившись в черную дыру. Поэтому весьма заманчиво, хотя и не всегда необходимо [147], отождествить невидимый объект с черной дырой.

В. [Не следует ожидать, однако, сколько-нибудь существенного проявления черной дырой в двойной системе свойств гравитационной линзы; если возможности астрономов недостаточны для наблюдения темного диска Меркурия, имеющего диаметр 4800 км, когда он проходит между нами и огромной поверхностью Солнца, то совсем мало надежды наблюдать черную дыру, заслоняющую соседнюю звезду, так как эффективный радиус черной дыры всего ~ 3 км и она находится неизмеримо дальше от нас, чем Меркурий. Чтобы наблюдался существенный эффект, линза (черная дыра) должна находиться от фокусируемой звезды на обычном межзвездном расстоянии. Но в этом случае прицельный параметр фокусируемых лучей больше звездного радиуса, поэтому дыра в качестве линзы по своему действию ничем не отличается от обычной звезды. Более того, даже при наличии 10^9 черных дыр в Галактике лишь раз в год одна из них проходит непосредственно между Землей и более удаленной от нас звездой, когда можно наблюдать существенный эффект линзы [150]. Вероятность того, что именно в данную точку на небе и как раз в нужное время будет направлен достаточно сильный телескоп, ничтожно мала.]

Г. В центре шарового скопления, где может помещаться черная дыра, притягивающая обычные звезды в близкую к себе область, создавая тем самым пик в распределении яркости [123] [1]).

Д. В ядре какой-нибудь галактики, включая даже Млечный Путь, где может находиться одна огромная черная дыра ($M \sim 10^4 - 10^8 M_\odot$), образовавшаяся в результате более ранней активности галактического ядра. Такая

[1]) См. также Cameron A. G. W., Truran J., работа, цитируемая в книге [151].

дыра в ходе аккреции вещества будет излучать гравитационные, световые и радиоволны. Окружающая дыру пыль может превращать большую часть света в инфракрасное излучение. Черная дыра может также приводить к выбросам и другим видам активности ядра [119, 123, 144, 152] [1]).

ение 33.4. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР

ессы, связанные с черными дырами, которые описаны в дополнении 33.3, няются обычным законам физики: общей теории относительности, электро- ике Максвелла, гидродинамике, квантовой механике и другим законам и вещества и излучения. Исходя из этих обычных законов физики, можно ти определенные «принципы» или «ограничения», которым должны удовлет- ь все процессы, связанные с черными дырами. По своей плодотворности, ности и простоте эти принципы напоминают законы термодинамики и могут рировать с ними. Вот почему они получили аналогичное название «законы ики черных дыр» [2]). В этом дополнении сформулированы два закона дина- черных дыр и некоторые следствия из них. Два дополнительных закона, ые здесь не приводятся, были сформулированы Бардином, Картером и Хоу- м [153].

вый и второй законы динамики черных дыр

Первый закон.

1. Как и первый закон термодинамики, первый закон динамики черных дыр является обычным законом сохранения энергии, дополненным законами сохранения полного импульса, момента импульса и заряда. Эти законы сохранения подробно рассматриваются в дополнении 19.1 и в гл. 20.
2. Детализированный применительно к случаю, когда вещество падает на черную дыру и наружу уходят гравитационные волны, первый закон имеет вид, приведенный в конце дополнения 19.1.
3. Детализированный для случая падающего электрического заряда первый закон гласит: полный заряд черной дыры Q, измеренный по создаваемому этим зарядом электрическому потоку, изменяется на величину, равную полному заряду, упавшему на черную дыру:

$$\Delta Q = q_{\text{упавший внутрь}}.$$

Детализированный применительно к случаю, когда две черные дыры сталкиваются и сливаются в одну (пример в дополнении 33.3), первый закон гласит: а) Пусть $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — 4-импульсы двух черных дыр, измеряемые по гравитационному проявлению черных дыр, когда они настолько удалены друг от друга, что их взаимным влиянием можно пренебречь ($\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — 4-векторы в окружающем дыры асимптотически плоском пространстве-времени). Аналогично, пусть $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ — тензоры полных моментов импульса черных дыр (не векторы собственных моментов импульса!) относительно произвольно выбранного начала координат $\mathcal{O}_0$ в окружающем асимптотически плоском пространстве-времени (в $\mathbf{J}_1$

[1]) Последний обзор астрофизических процессов в окрестности черных дыр см. в рабо-]; там же имеется список литературы.— *Прим. ред.*
[2]) Israel W., частное сообщение, 1971 г.

и $\mathbf{J}_2$ входят как орбитальные, так и собственные моменты импульса, с дополнение 5.6). б) Пусть $\mathbf{P}_3$ и $\mathbf{J}_3$ являются аналогичными полным 4-и пульсом и полным моментом импульса предельной черной дыры, т. возникающей в результате слияния первых двух дыр. в) Пусть $\mathbf{P}_r$ и являются полным 4-импульсом и полным моментом импульса, излуче ными в виде гравитационных волн в процессе столкновения и слияни *Тогда*

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_r, \qquad \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_r.$$

(Замечание. Чтобы вычислить массу и собственный момент импуль предельной черной дыры, зная $\mathbf{P}_3$ и $\mathbf{J}_3$, последуем указанию в допол нии 5.6. Согласно этому указанию, мировая линия предельной чер дыры представляет собой ту мировую линию в асимптотически лорен вых координатах, на которой находится центр сферического на больш расстояниях поля этой дыры.)

Б. *Второй закон* (разработанный и использованный Хоукингом [103, 104 При падении чего угодно в черную дыру, при столкновении и слиянии и при столкновении и рассеянии нескольких черных дыр, а также при люб другом процессе, в котором так или иначе фигурируют черные дыры, *сум площадей поверхности участвующих в процессе черных дыр* [или квадрат «неприводимых масс» — см. формулу (3) ниже] *никогда не может уме шаться* (доказательство см. в § 34.5). В этом состоит второй закон динами черных дыр.

II. Обратимые и необратимые превращения; неприводимая масса [1])

А. Рассмотрим одиночную черную дыру Керра — Ньюмана, взаимодейству щую с окружающими ее полями и веществом. Площадь поверхности ды A в любой момент времени определяется ее массой M, зарядом Q и соб венным удельным моментом импульса $a \equiv S/M$:

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2) = 4\pi [(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2 + a^2]$$

(упражнение 33.12). Взаимодействие с веществом и полями может по-р ному изменять M, Q и a; масса M может даже уменьшаться, т. е. из черн дыры может извлекаться энергия! ([109], § 33.7). Но какими бы ни бы эти изменения, они никогда не могут привести к уменьшению площ поверхности A. Более того, если какое-то изменение M, Q и a когда-л привело к увеличению площади поверхности, то никакой процесс в бу щем не сможет вновь уменьшить ее до первоначального значения.

Б. Поэтому все процессы с участием черных дыр можно классифициров разбив их на две группы.

1. *Обратимые превращения*, которые изменяют M, Q или a или лю набор из этих величин, оставляя площадь поверхности фиксирован Такие процессы можно обратить, так что черная дыра придет в с первоначальное состояние.
2. *Необратимые превращения*, в ходе которых вместе с изменением M или a или любого набора из этих величин увеличивается и площ

[1]) Результаты, полученные Кристодулу и Руфини [154, 155] независимо и одновреме с открытием Хоукингом второго закона.

поверхности A. Такие превращения никогда нельзя обратить. Претерпев необратимое превращение, черная дыра уже никогда не может вернуться в свое первоначальное состояние.

Примеры обратимых и необратимых превращений, обусловленных падающими частицами, приведены в § 33.7 и 33.8.

Обратимое извлечение заряда и момента импульса из черной дыры (уменьшение Q и a при фиксированном A) с необходимостью уменьшает массу черной дыры (извлечение энергии!). К тому моменту, когда у черной дыры будет отнят весь заряд и весь момент импульса, ее масса уменьшится до предельного «неприводимого значения»

$$M_{\text{неприв}} = (A/16\pi)^{1/2} = \left(\begin{array}{c} \text{масса шварцшильдовской черной дыры} \\ \text{с площадью поверхности } A \end{array} \right). \qquad (2)$$

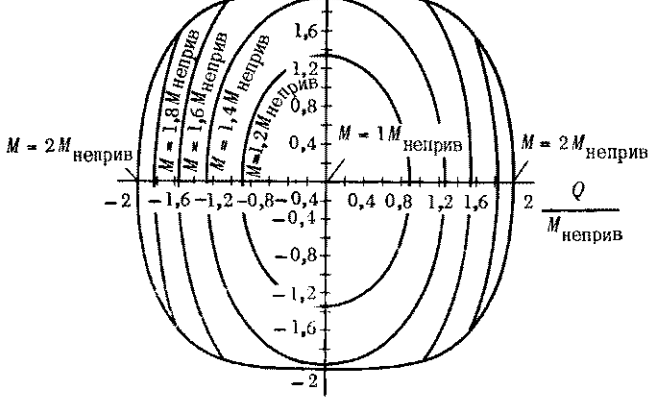
Первоначальная масса-энергия черной дыры (с зарядом Q и собственным моментом импульса S), выраженная через эту предельную неприводимую массу, определяется формулой

$$M^2 = \left(M_{\text{неприв}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{неприв}}} \right)^2 + \frac{S^2}{4M^2_{\text{неприв}}}. \qquad (3)$$

[Эту формулу, выведенную Кристодулу и Руфини, можно получить, комбинируя уравнения (1), (2), и $S = Ma$.]

Таким образом, *полную массу-энергию можно рассматривать как состоящую из неприводимой массы, электромагнитной массы-энергии и энергии вращения*. Но не следует думать, что эти вклады в полную массу-энергию складываются друг с другом линейно. Напротив, нужная комбинация этих величин [формула (3)] аналогична комбинации линейного импульса и массы покоя, определяющей энергию $E = m^2 + \boldsymbol{p}^2$.

Ниже показаны кривые постоянного $M/M_{\text{неприв}}$ в плоскости заряд — момент импульса. Черные дыры могут существовать только внутри изображенной области ($Q^2 + a^2 \leqslant M^2$). (Схема заимствована из работы Кристодулу [140].)



3. Поскольку неприводимая масса черной дыры пропорциональна корн квадратному из площади поверхности дыры, второй закон динамики можн сформулировать так:

В процессах, происходящих с черными дырами, сумма квадратов неприводимых масс всех участвующих в процессе черных дыр никогда не может уменьшаться.

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. Для подготовки к ней нео ходимо изучить ту часть гл. 32 (гравитационный коллапс), которая относит к курсу 2. Чтение остальной части главы намного облегчается, если читате знаком с гл. 25 (орбиты в геометрии Шварцшильда). Эта часть главы нео ходима как подготовительный материал для изучения гл. 34 (сингулярное и глобальные методы).

§ 33.3. МАССА, МОМЕНТ ИМПУЛЬСА, ЗАРЯД И МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ

Весьма поучительно проверить, что константы M, Q и a, котор появляются в уравнениях (33.2)—(33.5), выписанных для г метрии Керра — Ньюмана и электромагнитного поля в ней, д ствительно являются, как это утверждалось выше, массой, за дом и удельным моментом импульса черной дыры.

Метрика вдали от черной дыры: отпечатки массы и момента импульса

Масса и момент импульса определяются по их отпечатк (т. е. по их влиянию) на геометрию пространства-времени вда от черной дыры. Следовательно, для вычисления массы и моме импульса нужно разложить линейный элемент (33.2) в ряд степеням $1/r$ и исследовать главные члены:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt^2 - \left[\frac{4aM}{r}\sin^2\theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt\, d\phi + \\ + \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]. \qquad (3$$

Это исследование облегчается, если перейти к асимптотически ренцевым координатам $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$. $= r\cos\theta$; тогда

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} - O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt^2 = \left[\frac{4aM}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)\right](x\,dy - y\,dx) \\ + \left[\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right](dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (3$$

Непосредственное сравнение со «стандартной формой» мет [выражение (19.13)] вдали от стационарной вращающейся зв показывает, что 1) параметр M в самом деле является массой ной дыры, а 2) вектор собственного момента импульса черной д

$$= (aM)\,\partial/\partial z = (aM)\cdot\begin{pmatrix}\text{единичный вектор, направленный}\\ \text{вдоль полярной оси, в координатах}\\ \text{Бойера — Линдквиста}\end{pmatrix}. \tag{33.7}$$

д черной дыры, как и любого другого источника, опреде-
ся с помощью интеграла Гаусса для потока электрического
, взятого по замкнутой поверхности, окружающей черную
. Электрическое поле в асимптотически покоящейся системе
та черной дыры имеет ортогональные компоненты

Электромагнитное поле вдали от черной дыры

1) электрическое поле

$$\begin{aligned} E_{\hat r} &= E_r = F_{rt} = Q/r^2 + O(1/r^3),\\ E_{\hat\theta} &= E_\theta/r = F_{\theta t}/r = O(1/r^4),\\ E_{\hat\phi} &= E_\phi/r\sin\theta = F_{\theta t}/r\sin\theta = 0. \end{aligned} \tag{33.8}$$

вательно, электрическое поле является чисто радиальным,
еграл Гаусса для потока равен $4\pi Q$; это показывает, что Q
аряд черной дыры.
налогичное вычисление доминирующих компонентов магнит-
поля дает

2) магнитное поле

$$\begin{aligned} B_{\hat r} &= F_{\hat\theta\hat\phi} = \frac{F_{\theta\phi}}{r^2\sin\theta} = 2\,\frac{Qa}{r^3}\cos\theta + O\left(\frac{1}{r^4}\right),\\ B_{\hat\theta} &= F_{\hat\varphi\hat r} = \frac{F_{\varphi r}}{r\sin\theta} = \frac{Qa}{r^3}\sin\theta + O\left(\frac{1}{r^4}\right),\\ B_{\hat\phi} &= F_{\hat r\hat\theta} = \frac{F_{r\theta}}{r} = 0. \end{aligned} \tag{33.9}$$

ипольное магнитное поле, из которого немедленно получается
ие магнитного момента черной дыры

3) магнитный дипольный момент

$$= Qa = (Q/M)\,S = \underbrace{(\text{заряд/масса})}_{\text{«гиромагнитное отношение»}} \times (\text{момент импульса}). \tag{33.10}$$

ние черной дыры приводит как к магнитному моменту, так
есферическим искажениям гравитационного поля черной
(количественное обсуждение см. в работе [156]). Но эти
ения, так же как и магнитный момент, *не* могут быть опре-
ı независимым образом. Они однозначно определяются мас-
арядом и моментом импульса черной дыры.

Несферичность геометрии черной дыры

. СИММЕТРИИ И УВЛЕЧЕНИЕ
М ОТСЧЕТА

еме координат Бойера — Линдквиста метрические компо-
(33.2) черной дыры Керра — Ньюмана не зависят от вре-
координаты t и угловой координаты ϕ. Это означает (см.

§ 25.2), что

Векторы Киллинга геометрии Керра — Ньюмана

$$\xi_{(t)} \equiv (\partial/\partial t)_{r,\,\theta,\,\phi} \quad \text{и} \quad \xi_{(\phi)} \equiv (\partial/\partial\phi)_{t,\,r,\,\theta} \tag{33.1}$$

являются векторами Киллинга, связанными со стационарн (инвариантной по отношению к сдвигу во времени) и аксиаль симметричной черной дырой. Скалярные произведения этих ве торов Киллинга самих на себя и друг на друга равны

$$\xi_{(t)}\cdot\xi_{(t)} = g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right), \tag{33.1}$$

$$\xi_{(t)}\cdot\xi_{(\phi)} = g_{t\phi} = \frac{a\sin^2\theta\,(\Delta - r^2 - a^2)}{\rho^2} = -\frac{(2Mr - Q^2)\,a\sin^2\theta}{\rho^2}, \tag{33.1}$$

$$\xi_{(\phi)}\cdot\xi_{(\phi)} = g_{\phi\phi} = \frac{[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta}{\rho^2}. \tag{33.1}$$

Поскольку векторы Киллинга отражают свойства пространст времени, существующие независимо от каких бы то ни было сис координат, их скалярные произведения имеют смысл, также зависящий от конкретных координат. Оказывается (и это случайно, а обусловлено тщательным выбором нужных коор нат), что метрические компоненты g_{tt}, $g_{t\phi}$ и $g_{\phi\phi}$ Бойера — Ли квиста равны этим не зависящим от координат скалярным про ведениям. Следовательно, g_{tt}, $g_{t\phi}$ и $g_{\phi\phi}$ могут рассматриваться три скалярных поля, в которых содержится информация о сим триях пространства-времени. В отличие от этого метричес коэффициенты $g_{rr} = \rho^2/\Delta$ и $g_{\theta\theta} = \rho^2$ не несут никакой инфор ции об этих симметриях [1]). Само их существование и их числен значения зависят от специального выбора координат Бойера Линдквиста.

Стационарные наблюдатели

Любой наблюдатель, движущийся с постоянной угловой с ростью вдоль мировой линии с постоянными (r, θ), видит, геометрия пространства-времени вблизи него остается все вр неизменной. Следовательно, по отношению к локальной геомет такого наблюдателя можно рассматривать в качестве «стацио ного».

Статические наблюдатели

В том и только в том случае, если угловая скорость ра нулю, т. е. в том и только в том случае, если он движется вд мировой линии с постоянными (r, θ, ϕ), он будет к тому же и « тическим» наблюдателем относительно асимптотической ло цевой системы отсчета черной дыры (т. е. относительно «дале звезд»).

Угловая скорость и 4-скорость стационарного наблюдателя

Точное определение «угловой скорости относительно асим тической покоящейся системы отсчета», или просто «угл скорости», таково:

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\phi}{u^t} \tag{33.}$$

[1]) Это не совсем верно. Пространство-время Керра — Ньюмана, двух векторов Киллинга, обладает также «тензором Киллинга», ко тесно связан с координатами r и θ; см. [157], а также § 33.5.

см. упражнение 33.2). *4-скорость стационарного наблюдателя*, выраженная через Ω, векторы Киллинга и скалярные произведения векторов Киллинга, имеет вид

$$\mathbf{u} = u^t\,(\partial/\partial t + \Omega\partial/\partial\phi) = \frac{\xi_{(t)} + \Omega\xi_{(\phi)}}{|\xi_{(t)} + \Omega\xi_{(\phi)}|} =$$

$$= \frac{\xi_{(t)} + \Omega\xi_{(\phi)}}{(-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi})^{1/2}}. \qquad (33.13б)$$

Стационарный наблюдатель является статическим в том и только том случае, если Ω обращается в нуль.

Угловая скорость стационарных наблюдателей с заданными θ не может быть произвольной. Допустимы лишь те значения Ω, для которых 4-скорость $\mathbf{u}$ лежит внутри светового конуса будущего, т. е. для которых

$$(\xi_{(t)} + \Omega\xi_{(\phi)})^2 = g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi} < 0.$$

Таким образом, *угловые скорости стационарных наблюдателей подчиняются следующим ограничениям*:

Увлечение систем отсчета, предел статичности и эргосфера

$$\Omega_{\text{мин}} < \Omega < \Omega_{\text{макс}}, \qquad (33.14)$$

$$\Omega_{\text{мин}} = \omega - \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\phi\phi}}, \qquad (33.15а)$$

$$\Omega_{\text{макс}} = \omega + \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\phi\phi}}, \qquad (33.15б)$$

$$\omega = \frac{1}{2}\,(\Omega_{\text{мин}} + \Omega_{\text{макс}}) = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} = \frac{(2Mr - Q^2)\,a}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}. \qquad (33.16)$$

Предполагается также, что $S/M \equiv a > 0$. Следует отметить другие свойства этих предельных значений: 1. Вдали от черной дыры имеем $r\,\Omega_{\text{мин}} = -1$ и $r\,\Omega_{\text{макс}} = 1$, что соответствует световым пределам, которые налагаются скоростью света в плоском пространстве-времени. 2. С уменьшением радиуса $\Omega_{\text{мин}}$ увеличивается («увлечение инерциальных систем отсчета»). В конце концов, когда g_{tt} достигает нуля, т. е. при

$$r = r_0\,(\theta) = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2\cos^2\theta}, \qquad (33.17)$$

Ω становится равной нулю. На этой поверхности и внутри все стационарные наблюдатели должны обращаться вокруг черной дыры с положительной угловой скоростью. Следовательно, *статические наблюдатели существуют вне и только вне* $r = r_0\,(\theta)$. Поэтому $r = r_0\,(\theta)$ называется «пределом статичности» (дополнение 33.2). 3. Пересекая предел статичности и попадая в «эргосферу», мы видим, что диапазон допустимых угловых скоростей еще больше смещается в положительную сторону (еще более сильное «увлечение систем отсчета»). В то же время мы видим, что этот

диапазон становится все у́же, пока на горизонте

$$r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \qquad (33.1$$

предельные значения $\Omega_{\text{мин}}$ и $\Omega_{\text{макс}}$, в конце концов, не сольются, приняв одно и то же значение ($\omega = g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$). Следовательно, на горизонте не может быть стационарных наблюдателей. Все времениподобные мировые линии направлены внутрь. «Притяжения» со стороны черной дыры невозможно избежать.

Дополнительные особенности стационарных наблюдателей и «увлечения систем отсчета» исследуются в упражнениях.

УПРАЖНЕНИЯ

33.1. Керровское описание векторов Киллинга

а. Используйте закон преобразования от координат Бойера — Линдквиста к координатам Керра [уравнение (4) дополнения 33.5] и покажите, что

$$\xi_{(t)} \equiv (\partial/\partial t)_{r,\,\theta,\,\phi} = (\partial/\partial \tilde{V})_{r,\,\theta,\,\tilde{\varphi}}, \qquad (33.$$

$$\xi_{(\phi)} \equiv (\partial/\partial \phi)_{t,\,r,\,\theta} = (\partial/\partial \tilde{\phi})_{\tilde{V},\,r,\,\theta}. \qquad (33.1$$

Исследуя метрические компоненты, покажите в явном виде, что

$$g_{\tilde{V}\tilde{V}} = g_{tt}, \quad g_{\tilde{V}\tilde{\varphi}} = g_{t\phi}, \quad g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} = g_{\phi\phi} \qquad (33.1$$

в соответствии с уравнениями (33.19а) и (33.19б).

б. Покажите, что выраженная в керровских координатах угловая скорость стационарного наблюдателя (мировая линия которой r, θ — константы) имеет вид

$$\Omega \equiv d\phi/dt = d\tilde{\phi}/d\tilde{V} = u^{\tilde{\phi}}/u^{\tilde{V}},$$

так что рассмотрение стационарных наблюдателей в координатах Керра полностью идентично рассмотрению в координатах Бойера — Линдквиста. Различие между этими системами координат проявляется лишь в том случае, когда мы рассматриваем движение вдоль мировой линии с переменным r. Согласуйте это утверждение с тем фактом, что в обеих системах координат используются *одни и те же* координаты (r, θ), но различные временные и азимутальные координаты (t, ϕ вместо $\tilde{V}$, $\tilde{\phi}$).

33.2. Наблюдения угловой скорости

Наблюдатель, расположенный далеко от черной дыры и находящийся в состоянии покоя относительно асимптотической локальной системы отсчета дыры, видит (своими глазами), как частица движется по стационарной (негеодезической) орбите вблизи черной дыры. Пусть $\Omega = d\phi/dt$ есть угловая скорость, как это было определено и как обсуждалось выше. Удаленный наблюдатель использует свой секундомер для того, чтобы измерить время

обходимое частице для одного полного оборота вокруг черной дыры (один полный оборот относительно самого́ удаленного наблюдателя, т. е. относительно асимптотической лоренцевой системы отсчета дыры).

а. Покажите, что измеренное таким образом время оборота равно $2\pi/\Omega$. Следовательно, *можно считать, что* Ω *есть «угловая скорость частицы, измеренная с бесконечности».*

б. Пусть наблюдатель, движущийся вместе с частицей, измеряет время своего оборота относительно асимптотической лоренцевой системы отсчета, используя лишь свои собственные глаза и секундомер, который он взял с собой. Покажите, что измеренное им время одного оборота должно быть равно

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{\Omega}\underbrace{(-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi})^{1/2}}_{\text{«фактор красного смещения»}}. \qquad (33.20)$$

33.3. Локально невращающиеся наблюдатели [158]

а. Окружим черную дыру круглым («кольцевым») зеркалом, поместив его при фиксированных (r, θ). Пусть наблюдатель, расположенный при тех же (r, θ) и движущийся с угловой скоростью Ω, испускает вспышку света. Часть фотонов будет захвачена зеркалом и будет скользить вдоль его поверхности, двигаясь вокруг черной дыры в положительном по ϕ направлении. Другая часть фотонов также будет захвачена и будет скользить в отрицательном по ϕ направлении. Покажите, что наблюдатель примет вернувшиеся к нему фотоны в обоих направлениях одновременно в том и только в том случае, если его угловая скорость $\Omega = \omega(r, \theta)$ определяется выражением (33.16). Следовательно, в этом и только в этом случае наблюдатель может считать направления $+\phi$ и $-\phi$ эквивалентными с точки зрения локальной геометрии. Другими словами, в этом и только в этом случае наблюдатель является «невращающимся относительно локальной геометрии пространства-времени». Поэтому для наблюдателя, который движется с угловой скоростью $\Omega = \omega(r, \theta)$, весьма подходит название *локально невращающийся наблюдатель.*

б. С аксиальной симметрией связана величина $p_\phi \equiv \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}\,(\phi)$, сохраняющаяся при геодезическом движении. Для любой частицы, движется ли она по геодезической или нет, эта величина называется «проекцией момента импульса на ось вращения черной дыры» или просто «моментом импульса частицы» (см. ниже § 33.5). Покажите, что из всех наблюдателей с фиксированными (r, θ) только локально невращающийся наблюдатель имеет момент импульса, равный нулю. (*Примечание.* Бардин, Прессс и Теукольский [159] показали, что понятие «локально невращающегося наблюдателя» может служить мощным инструментом для исследования физических процессов вблизи черной дыры.)

ПРАЖНЕНИЯ

33.4. Ортогональные системы отсчета, связанные с локально невращающимися наблюдателями

а. Представим себе, что пространство-время заполнено мировыми линиями локально невращающихся наблюдателей и с каждым из этих наблюдателей связана собственная ортогональная система отсчета. Покажите, что пространственные ориентации этих систем отсчета могут быть выбраны так, что их базисные 1-формы будут иметь вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} &= |g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|^{1/2}\,\mathbf{d}t, \quad & \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} &= (g_{\phi\phi})^{1/2}(\mathbf{d}\phi-\omega\,\mathbf{d}t), \\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} &= (\rho/\Delta^{1/2})\,\mathbf{d}r, & \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} &= \rho\,\mathbf{d}\theta. \end{aligned} \tag{33.21}$$

Более конкретно, покажите, что эти 1-формы являются ортогональными и что в дуальном базисе

$\partial/\partial\hat{t} = \mathbf{u} \equiv$ 4-скорости локально невращающегося наблюдателя. (33.22)

Покажите, что $\mathbf{u} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}}$ является полем 1-форм ($\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = 0$; упражнение 4.4), свободным от вращения.

б. Иногда неправильно думают, что локально невращающийся наблюдатель является в некотором смысле локально инерциальным. Чтобы избавиться от этого ошибочного представления, убедитесь, что 1) 4-ускорение такого наблюдателя отлично от нуля:

$$\mathbf{a} = \Gamma_{\hat{j}\,\hat{t}\,\hat{t}}\,\mathbf{e}_{\hat{j}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}\ln|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|\,, \tag{33.23}$$

2) если такой наблюдатель имеет при себе гироскопы и если он сообщает центрам масс гироскопов нужные ускорения, то он видит, что гироскопы прецессируют относительно его ортогональной системы отсчета (33.21) с угловой скоростью

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^{\text{прецесс}} &= \Gamma_{\hat{\theta}\,\hat{\phi}\,\hat{t}}\,\mathbf{e}_{\hat{r}} + \Gamma_{\hat{\phi}\,\hat{r}\,\hat{t}}\,\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{g_{\phi\phi}^{1/2}}{|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|^{1/2}}\left[\frac{\omega_{,\theta}}{\rho}\,\mathbf{e}_{\hat{r}} - \frac{\Delta^{1/2}\omega_{,r}}{\rho}\,\mathbf{e}_{\hat{\theta}}\right]. \end{aligned} \tag{33.24}$$

[*Указание.* См. упражнение 19.2, уравнение (13.69) и относящееся к ним обсуждение. Коэффициенты связности легче всего вычисляются при использовании метода дифференциальных форм; см. § 14.6.]

33.5. Локальные световые конусы

Рассчитайте форму световых конусов, изображенных на диаграмме Керра для незаряженной ($Q = 0$) керровской черной дыры (часть II,E дополнения 33.2). В частности, введите новую временную координату

$$\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r, \tag{33.25}$$

УПРАЖНЕНИ

для которой сечения постоянного $\tilde{t}$ на диаграмме Керра являются горизонтальными поверхностями. На этой диаграмме по вертикали отложено $\tilde{t}$, по радиусу r и в азимутальном направлении $\tilde{\phi}$; при этом принимается, что $\theta = \pi/2$ («экваториальное сечение черной дыры»).

а. Покажите, что световой конус, исходящий из точки с заданными $\tilde{t}$, r, $\tilde{\phi}$, имеет следующую форму:

$$\frac{dr}{d\tilde{t}} = a\left(\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}}\right) - \frac{2M/r}{1+2M/r} \pm \sqrt{\frac{1}{(1+2M/r)^2} - \frac{r^2\,(d\tilde{\phi}/d\tilde{t})^2}{1+2M/r}}. \quad (33.26а)$$

б. Покажите, что световой конус пересекает поверхность постоянного радиуса вдоль кривых

$$dr/d\tilde{t} = 0, \quad d\tilde{\phi}/d\tilde{t} = \Omega_{\text{мин}} \text{ и } \Omega_{\text{макс}}, \quad (33.26б)$$

где $\Omega_{\text{мин}}$ и $\Omega_{\text{макс}}$ даются выражениями (33.15а), (33.15б) (минимально и максимально допустимые угловые скорости стационарных наблюдателей).

в. Покажите, что на пределе статичности $r = r_0$ $(\pi/2)$ световой конус касается кривой, вдоль которой r, θ, $\tilde{\phi}$ постоянны.

г. Покажите, что световой конус пересекает поверхности постоянного $\tilde{\phi}$ вдоль кривых

$$\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{dr}{d\tilde{t}} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{1-2M/r}{1+2M/r}. \quad (33.26в)$$

д. Покажите, что световой конус касается горизонта.

е. Нарисуйте форму световых конусов при разных значениях радиуса.

ж. Опишите качественно, как должен выглядеть световой конус вблизи горизонта в координатах Бойера — Линдквиста. (*Замечание.* Он будет выглядеть совершенно «ненормально», поскольку в этих координатах на горизонте имеется сингулярность.)

---

§ 33.5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ [111]

Пусть пробная частица с электрическим зарядом e и массой покоя μ движется во внешнем поле черной дыры. Если бы черная дыра не обладала зарядом, то пробная частица двигалась бы по геодезической (4-ускорение равно нулю). Но заряд создает электромагнитное поле, которое в свою очередь приводит к действующей на частицу силе Лоренца $\mu\mathbf{a} = e\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$. (Здесь $\mathbf{u}$ есть 4-скорость частицы, а $\mathbf{a} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ — ее 4-ускорение.)

Уравнение геодезической $\mathbf{a} = 0$ в случае отсутствия заряда эквивалентно уравнениям Гамильтона

$$dx^\mu/d\lambda = \partial\mathscr{H}/\partial p_\mu, \quad dp_\mu/d\lambda = -\partial\mathscr{H}/\partial x^\mu, \tag{33.27а}$$

где λ — аффинный параметр, нормированный таким образом, что

$$d/d\lambda = \mathbf{p} = \text{4-импульс}, \tag{33.27б}$$

и где

$$\mathscr{H} \equiv \text{«расширенный гамильтониан»} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \tag{33.27в}$$

(см. упражнение 25.2). Аналогично (см. упражнение 33.6) уравнение для силы Лоренца $\mu\mathbf{a} = e\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$ в заряженном случае эквивалентно уравнениям Гамильтона, записанным в координатах x^μ и «обобщенных импульсах» π_μ:

$$dx^\mu/d\lambda = \partial\mathscr{H}/\partial\pi_\mu, \quad d\pi_\mu/d\lambda = -\partial\mathscr{H}/\partial x^\mu. \tag{33.28а}$$

ширенный
мильтониан
я заряженной
обной частицы
произвольном
ектромагнитном
ле
искривленном
остранстве-
емени

Расширенный гамильтониан $\mathscr{H}$, выраженный через метрические коэффициенты в точке локализации частицы $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$, заряд частицы e и обобщенный импульс π_μ, имеет следующий вид:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu)(\pi_\nu - eA_\nu) \tag{33.28б}$$

(см. § 7.3 в книге [160], где приводится аналогичный расширенный гамильтониан в плоском пространстве-времени.)

Первое из уравнений Гамильтона для этого расширенного гамильтониана сводится к уравнению

$$p^\mu \equiv (\text{4-импульс}) \equiv dx^\mu/d\lambda = \pi^\mu - eA^\mu \tag{33.29а}$$

(π^μ выражено через p^μ, e и A^μ); второе из уравнений Гамильтона при комбинировании его с первым сводится к уравнению для силы Лоренца

$$dp^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = eF^{\mu\nu} p_\nu. \tag{33.29б}$$

p_ν, а не u_ν, поскольку $\lambda = \tau/\mu$

Для черной дыры Керра — Ньюмана векторный потенциал в координатах Бойера — Линдквиста может быть представлен в виде

торный
енциал
заряженной
ой дыры

$$\mathbf{A} = -\frac{Qr}{\rho^2} (\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi), \tag{33.30}$$

в чем можно убедиться, проверив, что

$$\mathbf{dA} = \frac{1}{2} (A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta})\, \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$$

сводится к фарадеевской 2-форме уравнения (33.5).

Есть полный смысл использовать весь этот формализм вместо того, чтобы прямо решать уравнение с силой Лоренца в его наиболее элементарном координатном варианте

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}=eF^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\lambda}.$$

«Интегралы движения» заряженной пробной частицы, движущейся вокруг заряженной черной дыры:

С помощью гамильтонова формализма можно сразу же найти два интеграла движения; элементарное уравнение с силой Лоренца такой возможности не дает. Дело в том, что компоненты A_μ вектора **A** [выражение (33.30)] и компоненты метрики $g^{\mu\nu}$ [обратные $g_{\mu\nu}$, которые даются в (33.2); см. (33.35)] не зависят от t и ϕ (стационарность и аксиальная симметрия как электромагнитного поля, так и геометрии пространства-времени). Следовательно, расширенный гамильтониан также не зависит от t и ϕ, и поэтому уравнение Гамильтона

$$d\pi_\alpha/d\lambda=-\partial\mathscr{H}/\partial x^\alpha$$

гарантирует, что π_t *и* π_ϕ *являются интегралами движения.*

1) «энергия на бесконечности»
2) «аксиальная» компонента момента импульса» L_z

Вдали от черной дыры, где вектор-потенциал исчезающе мал, а метрика принимает вид

$$ds^2=-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2),$$

интегралы движения становятся равными

$$\pi_t=p_t=-p^t=-\text{энергия},$$

$$\pi_\phi=p_\phi=rp^{\hat\phi}=\begin{pmatrix}\text{проекция момента импульса}\\ \text{на ось вращения дыры}\end{pmatrix}.$$

Поэтому для интегралов движения $-\pi_t$ и π_ϕ уместно принять следующие названия и обозначения:

$$E\equiv(\text{«энергия на бесконечности»})\equiv-\pi_t=-(p_t+eA_t), \quad (33.31а)$$

$$L_z\equiv\begin{pmatrix}\text{«аксиальная компонента момента импульса»},\\ \text{или просто «момент импульса»}\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\pi_\phi=p_\phi+eA_\phi. \quad (33.31б)$$

3) масса покоя μ

Третьим интегралом движения является масса покоя частицы

$$\mu=|\mathbf{p}|=(-g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^{1/2}. \quad (33.31в)$$

В общем случае для однозначного определения орбиты частицы в четырехмерном пространстве-времени необходимо знать четыре интеграла движения. Если бы черная дыра обладала дополнительной симметрией, например если бы она была сферически симметричной, а не просто аксиально симметричной, то тогда автоматически появился бы четвертый интеграл движения. Но в общем случае черные дыры не являются сферически симметричными.

поэтому движение пробной частицы вокруг черной дыры обладает лишь тремя *очевидными* интегралами движения. Весьма замечательно поэтому то обстоятельство, что, как оказалось, существует и четвертый интеграл. Это обнаружил Картер [111], который использовал методы Гамильтона — Якоби. К 1973 г. никто еще не дал убедительного геометрического объяснения, почему четвертый интеграл должен существовать, хотя намеки на такое объяснение можно найти в работах [157, 161].

$\mathcal{Q}$

Картеровский «четвертый интеграл движения», вывод которого приведен в упражнении 33.7, дается выражением

$$\mathcal{Q} = p_\theta^2 + \cos^2\theta\,[a^2(\mu^2 - E^2) + \sin^{-2}\theta L_z^2]. \qquad (33.31г)$$

Вместо $\mathcal{Q}$ часто используется интеграл движения

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{Q} + (L_z - aE)^2, \qquad (33.31д)$$

получаемый как комбинация $\mathcal{Q}$, L_z и E. В то время как $\mathcal{Q}$ может быть отрицательно, $\mathcal{K}$ всегда положительно:

$$\mathcal{K} = p_\theta^2 + (L_z - aE\sin^2\theta)^2/\sin^2\theta + a^2\mu^2\cos^2\theta$$

$\geqslant 0$ всюду,

$= 0$ только в случае фотона ($\mu = 0$), движущегося вдоль полярной оси ($\theta = 0,\ \pi$).

Комбинируя уравнения (33.31) с метрическими коэффициентами (33.2) и с компонентами векторного потенциала (33.30), легко выразить контравариантные компоненты 4-импульса пробной частицы $p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ через константы E, L_z, μ, $\mathcal{Q}$. В результате получаем

внения
жения для
яженных
бных частиц

$$\rho^2 d\theta/d\lambda = \sqrt{\Theta}, \qquad (33.32а)$$

$$\rho^2 dr/d\lambda = \sqrt{R}, \qquad (33.32б)$$

$$\rho^2 d\phi/d\lambda = -(aE - L_z/\sin^2\theta) + (a/\Delta)P, \qquad (33.32в)$$

$$\rho^2 dt/d\lambda = -a(aE\sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}P. \qquad (33.32г)$$

Здесь $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$, согласно определению в (33.3б), а функции Θ, R, P определяются следующим образом:

$$\Theta = \mathcal{Q} - \cos^2\theta\,[a^2(\mu^2 - E^2) + L_z^2/\sin^2\theta], \qquad (33.33а)$$

$$P = E(r^2 + a^2) - L_z a - eQr, \qquad (33.33б)$$

$$R = P^2 - \Delta\,[\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + \mathcal{Q}]. \qquad (33.33в)$$

При работе с координатами Керра (чтобы избежать координатной сингулярности на горизонте), уравнения (33.32в) и (33.32г) нужно заменить уравнениями

$$\rho^2 d\tilde{V}/d\lambda = -a(aE\sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}(\sqrt{R} + P), \qquad (33.32в')$$

$$\rho^2 d\tilde{\phi}/d\lambda = -(aE - L_z/\sin^2\theta) + a\Delta^{-1}(\sqrt{R} + P). \qquad (33.32г')$$

[Эти уравнения следуют из (33.32) и из преобразования между двумя координатными системами — см. уравнение (4) в дополнении 33.2.] В приведенных выше уравнениях знаки перед $\sqrt{R}$ и $\sqrt{\Theta}$ могут быть выбраны независимо, но, выбрав однажды эти знаки, мы должны использовать их повсюду согласованно.

Различные применения этих уравнений движения будут играть главную роль в остальной части этой главы.

33.6. Расширенный гамильтониан для движения заряженной частицы

УПРАЖНЕНИ

Покажите, что уравнения Гамильтона (33.28а) для гамильтониана (33.28б) сводятся к уравнению (33.29а) для обобщенного импульса и к уравнению с силой Лоренца (33.29б). [*Указание.* Используйте соотношение $(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma})_{,\mu} = 0$.]

33.7. Вывод уравнений движения Гамильтона — Якоби [111]

Выведите уравнения движения первого порядка (33.32) для заряженной частицы, движущейся во внешнем поле черной дыры Керра — Ньюмана. Воспользуйтесь методом Гамильтона — Якоби (дополнения 25.3 и 25.4 в томе 2 этой книги; см. также гл. 9 книги Голдстейна [160]) в такой последовательности:

а. Везде в расширенном гамильтониане $\mathscr{H}$ уравнения (33.28б) замените обобщенный импульс π_α на градиент функции Гамильтона — Якоби $\partial S/\partial x^\alpha$.

б. Выпишите уравнения Гамильтона — Якоби [обобщение уравнения (2) в дополнении 25.4] в следующей форме:

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \mathscr{H}\left[x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\beta}\right] = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - eA_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} - eA_\beta\right). \quad (33.34а)$$

в. Покажите, что метрические компоненты $g^{\alpha\beta}$ для черной дыры Керра — Ньюмана в координатах Бойера — Линдквиста даются выражением

$$\mathfrak{g} \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = -\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial\phi}\right]^2 + \\ + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi} + a\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial t}\right]^2 + \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2. \quad (33.35)$$

г. Воспользуйтесь метрическими компонентами и компонентами векторного потенциала (33.30), чтобы привести уравнение Гамильтона — Якоби (33.34а) к такому конкретному виду:

$$-\frac{\partial S}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial S}{\partial t} + a\frac{\partial S}{\partial\phi} - eQr\right]^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial S}{\partial\phi} + a\sin^2\theta\frac{\partial S}{\partial t}\right]^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2. \quad (33.34б)$$

ПРАЖНЕНИЯ

д. Решите это уравнение Гамильтона — Якоби методом разделения переменных. [*Указание.* Поскольку в уравнении нет явной зависимости от λ, ϕ или t, решение можно искать в виде

$$S = \frac{1}{2}\mu^2\lambda - Et + L_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \qquad (33.36а)$$

Здесь значения «постоянных интегрирования» получаются из соотношений $\partial S/\partial\lambda = -\mathscr{H}$, $\partial S/\partial t = \pi_t$, $\partial S/\partial\phi = \pi_\phi$. Подставив этот выбранный вид решения в (33.35) и разрешив уравнение относительно $S_r(r)$ и $S_\theta(\theta)$, получите

$$S_r = \int \Delta^{-1}\sqrt{R}\,dr, \quad S_\theta = \int \sqrt{\Theta}\,d\theta, \qquad (33.36б)$$

где $R(r)$ и $\Theta(\theta)$ — функции, определенные в (33.33). Заметим, что константа $\mathscr{Q}$ возникает при таком методе естественным образом как «константа разделения переменных». Константа $\mathscr{Q}$ была обнаружена Картером именно этим способом, следуя предложению Мизнера искать аналогии с константой интегрирования в случае ньютоновских дипольных полей (см. [162], стр. 209).]

е. Последовательно приравнивая $\partial S/\partial[\mathscr{Q} + (L_z - aE)^2]$, $\partial S/\partial\mu^2$, $\partial S/\partial E$ и $\partial S/\partial L_z$ нулю, получите следующие уравнения, описывающие орбиты пробных частиц:

$$\int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int^{r} \frac{dr}{\sqrt{R}}, \qquad (33.37а)$$

$$\lambda = \int^{\theta} \frac{a^2\cos^2\theta}{\sqrt{\Theta}}\,d\theta + \int^{r} \frac{r^2}{\sqrt{R}}\,dr, \qquad (33.37б)$$

$$t = \int^{\theta} \frac{-a(aE\sin^2\theta - L_z)}{\sqrt{\Theta}}\,d\theta + \int^{r} \frac{(r^2+a^2)P}{\Delta\sqrt{R}}\,dr, \qquad (33.37в)$$

$$\phi = \int^{\theta} \frac{-(aE\sin^2\theta - L_z)}{\sin^2\theta\sqrt{\Theta}}\,d\theta + \int^{r} \frac{aP}{\Delta\sqrt{R}}\,dr. \qquad (33.37г)$$

ж. Дифференцируя и комбинируя эти уравнения, получите уравнения движения (33.32), приведенные в тексте.

з. Выведите выражения (33.31) для E, L_z, μ и $\mathscr{Q}$, полагая $\partial S/\partial x^\alpha = \pi_\alpha = p_\alpha + eA_\alpha$.

---

§ 33.6. ГЛАВНЫЕ НУЛЕВЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

лавные
улевые
онгруэнции
ия геометрии
остранства-
емени
рной дыры

Два специальных семейства *фотонных* траекторий особенно гармонично «вписываются» в геометрию Керра — Ньюмана. Эти семейства называются *главными нулевыми конгруэнциями* данной геометрии (слово «конгруэнция» означает «семейство кривых, заполняющих пространство»). Эти конгруэнции являются реше-

ниями уравнений движения для пробных частиц (33.32), для которых

$$\mu = 0 \text{ (нулевая масса покоя; фотон)}, \tag{33.38а}$$

$$e = 0 \text{ (нулевой заряд фотона)}, \tag{33.38б}$$

$$L_z = aE\sin^2\theta \begin{pmatrix} \text{значение } L_z, \text{ которое является} \\ \text{допустимым, только если} \\ d\theta/d\lambda \text{ равно нулю} \end{pmatrix}, \tag{33.38в}$$

$$\mathcal{Q} = -(L_z - aE)^2 = -a^2E^2\cos^4\theta. \tag{33.38г}$$

Для этих значений интегралов движения уравнения движения (33.32) принимают вид

$$k^\theta \equiv d\theta/d\lambda = 0, \tag{33.39а}$$

$$k^r \equiv dr/d\lambda = \pm E \begin{pmatrix} + \text{для выходящих фотонов,} \\ - \text{для фотонов, движущихся внутрь),} \end{pmatrix} \tag{33.39б}$$

$$k^\phi \equiv d\phi/d\lambda = aE/\Delta, \tag{33.39в}$$

$$k^t \equiv dt/d\lambda = (r^2 + a^2)E/\Delta. \tag{33.39г}$$

Значение главных нулевых конгруэнций

В каком смысле эти фотонные траектории более интересны, чем другие? 1. Они так вписываются в кривизну пространства-времени, что если $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ есть конформный тензор Вейля, а ${}^*C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}$ — дуальный ему тензор, то

$$C_{\alpha\beta\gamma[\delta}k_{\varepsilon]}k^\beta k^\gamma = 0, \quad {}^*C_{\alpha\beta\gamma[\delta}k_{\varepsilon]}k^\beta k^\gamma = 0. \tag{33.40}$$

(Эти соотношения означают, что геометрия Керра — Ньюмана относится к «типу D по Петрову — Пирани», а эти фотонные траектории являются «дважды вырожденными главными нулевыми конгруэнциями». Подробности, касающиеся значения этих выражений и их применений, см., например, в [25], § 8, или [163], или в работах Петрова [164, 165] и Пирани [166].) 2. Подходящей заменой координат (упражнение 33.8) метрику Керра — Ньюмана можно привести к виду

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + 2Hk_\alpha k_\beta)\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{33.41}$$

где H — скалярное поле, а k_α — компоненты волнового вектора для одной из главных нулевых конгруэнций (любой из двух, но не двух сразу!). (Именно благодаря этому свойству метрики Керра — Ньюмана она и была первоначально открыта [99]. Более детально метрики такой формы рассмотрены в работе [167].) 3. В координатах Керра (дополнение 33.2) главная нулевая конгруэнция, направленная внутрь, есть

$$r = -E\lambda, \quad \theta = \text{const}, \quad \tilde{\phi} = \text{const}, \quad \tilde{V} = \text{const}. \tag{33.42а}$$

λ — произвольный нормировочный множитель; от него можно избавиться, если переопределить λ

На диаграмме Керра в дополнении 33.2 эти мировые линии фотонов, направленные внутрь, являются генераторами конической поверхности $\widetilde{V} = \text{const}$. 4. Фотон, мировая линия которого принадлежит главной нулевой конгруэнции, направленной наружу, и только такой фотон может вечно оставаться на горизонте (упражнение 33.9). Такие мировые линии фотонов являются «генераторами» горизонта (штриховые спиральные кривые на диаграмме Керра в дополнении 33.2). Их угловая скорость

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\widetilde{\phi}}{d\widetilde{V}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2M^2 - Q^2 + 2M\,(M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2}}. \qquad (33.42б)$$

УПРАЖНЕНИЯ

33.8. Координаты Керра — Шилда

а. Покажите, что в координатах Керра направленная внутрь нулевая конгруэнция (33.39) имеет форму (33.42а). Покажите также, что после замены аффинного параметра на новый $\lambda_{\text{нов}} = \lambda_{\text{стар}}$ E ковариантные компоненты волнового вектора равны

$$k_r^{(\text{внутрь})} = 0,\ k_\theta^{(\text{внутрь})} = 0,\ k_{\widetilde{\phi}}^{(\text{внутрь})} = a\sin^2\theta,\ k_{\widetilde{V}}^{(\text{внутрь})} = -1. \qquad (33.43)$$

б. Введите новые координаты $\widetilde{t}, x, y, z$, определяемые соотношениями

$$x + iy = (r + ia)\,e^{i\widetilde{\phi}}\sin\theta,\quad z = r\cos\theta,\quad \widetilde{t} = \widetilde{V} - r, \qquad (33.44а)$$

и покажите, что в этой «системе координат Керра — Шилда» метрика имеет вид

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + 2Hk_\alpha^{(\text{внутрь})}k_\beta^{(\text{внутрь})})\,dx^\alpha dx^\beta, \qquad (33.44б)$$

где

$$H = \frac{Mr - \frac{1}{2}Q^2}{r^2 + a^2\,(z/r)^2}, \qquad (33.44в)$$

$$k_\alpha^{(\text{внутрь})}\,dx^\alpha = -\frac{r\,(x\,dx + y\,dy) - a\,(x\,dy - y\,dx)}{r^2 + a^2} - \frac{z\,dz}{r} - d\widetilde{t}. \qquad (33.44г)$$

Аналогичные координаты, в которых метрика принимает форму

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + 2Hk_\alpha^{(\text{наружу})}k_\beta^{(\text{наружу})})\,dx^\alpha dx^\beta,$$

получаются преобразованием координат, которое приведено, например, в работе [101].

33.9. Нулевые генераторы горизонта

а. Покажите, что в координатах Керра нулевая конгруэнция, направленная наружу, описывается касательным вектором

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=0,\quad \frac{dr}{d\lambda}=E,\quad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda}=2a\frac{E}{\Delta},\quad \frac{d\tilde{V}}{d\lambda}=2(r^2+a^2)\frac{E}{\Delta}. \tag{33.45}$$

б. На горизонте ($\Delta = 0$) компоненты этого волнового вектора становятся сингулярными, но не из-за сингулярности в системе координат (поведение координат вполне нормально), а из-за неудачной нормировки аффинного параметра. Пусть Δ_0 есть константа, определенная для каждой направленной наружу геодезической, как значение величины Δ для события, когда геодезическая пересекает поверхность $\tilde{V} = 0$. Перенормируйте затем аффинный параметр для каждой геодезической следующим образом:

$$\lambda_{\text{нов}} = (E/\Delta_0)\,\lambda_{\text{стар}}. \tag{33.46}$$

Покажите, что получающиеся в результате волновые векторы

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=0,\quad \frac{dr}{d\lambda}=\Delta_0,\quad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda}=2a\frac{\Delta_0}{\Delta},\quad \frac{d\tilde{V}}{d\lambda}=2(r^2+a^2)\frac{\Delta_0}{\Delta} \tag{33.45'}$$

при приближении к горизонту имеют нормальное поведение; покажите также, что на горизонте геодезические принимают форму

$$\theta=\text{const},\quad r=r_+=\text{const},\quad \tilde{\phi}=2a\lambda,\quad \tilde{V}=2(r_+^2+a^2)\lambda. \tag{33.47}$$

в. Покажите, что из всех траекторий пробных частиц только эти траектории остаются на горизонте сколь угодно долго. (*Указание.* Исследуйте световой конус.)

---

§ 33.7. ЭНЕРГИЯ, ЗАКЛЮЧЕННАЯ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ, И ИЗВЛЕЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ ИЗ ЧЕРНЫХ ДЫР [109]

Когда какой-либо объект падает на черную дыру, он изменяет ее массу, заряд и собственный момент импульса (первый закон динамики черных дыр, дополнение 33.4). Когда падающий объект является достаточно большим, его падение приводит к сильному гравитационному и электромагнитному излучению. Расчет испущенного излучения, а также энергии и момента импульса, которые им уносятся, является необходимой предпосылкой любого расчета предельного состояния черной дыры; такой расчет представляет собой невероятно сложную задачу. Но если объект

Когда малый объект падает в большую черную дыру:

1) излученная энергия пренебрежимо мала по сравнению с массой покоя объекта

очень мал (размер объекта много меньше размера горизонта, масса объекта много меньше массы дыры) и его заряд также очень мал, то можно пренебречь излучением объекта при каждом обороте вокруг черной дыры. Например, для гравитационного излучения имеем

$$\frac{\text{энергия, испущенная за оборот}}{\text{масса покоя объекта}} \sim \frac{\text{масса покоя объекта}}{\text{масса дыры}} \tag{33.48}$$

(см. § 36.5, а также [159]). Поскольку излучение пренебрежимо мало, обратное действие излучения также пренебрежимо мало, и с большой точностью можно считать, что объект движется по геодезической для пробной частицы. В этом случае первый закон динамики черных дыр применяется просто и непосредственно.

2) масса, заряд и момент импульса черной дыры меняются на $\Delta M = E$, $\Delta Q = e$, $\Delta S = L_z$

Рассмотрим сначала малый объект, который падает издалека прямо на черную дыру. Согласно первому закону, это приводит к следующим изменениям массы, заряда и момента импульса черной дыры:

$$\Delta M = E = (\text{«энергия падающего объекта на бесконечности»}), \tag{33.49а}$$

$$\Delta Q = e = (\text{заряд падающего объекта}), \tag{33.49б}$$

$$\Delta S \equiv \Delta |\mathbf{S}| = L_z = \begin{pmatrix}\text{составляющая момента импульса}\\ \text{падающего объекта вдоль оси}\\ \text{вращения черной дыры}\end{pmatrix}. \tag{33.49в}$$

Падающий объект изменит также направление $\mathbf{S}$. В асимптотической лоренцевой системе отсчета первоначальной черной дыры начальный вектор момента импульса направлен по оси z:

$$(S_z)_{\text{нач}} = S, \quad (S_x)_{\text{нач}} = 0, \quad (S_y)_{\text{нач}} = 0.$$

Следовательно, только z-составляющая момента импульса падающего объекта может приводить к существенному изменению величины $\mathbf{S}$. Но x- и y-составляющие L_x и L_y могут изменять направление $\mathbf{S}$. Если скорость объекта на бесконечности пренебрежимо мала, то вызванные этим объектом изменения таковы (упражнение 33.10):

$$\Delta S_x = L_x = -(\sin\phi_\infty)\sqrt{\Theta} - (\operatorname{ctg}\theta_\infty \cos\phi_\infty) L_z, \tag{33.49г}$$

$$\Delta S_y = L_y = (\cos\phi_\infty)\sqrt{\Theta} - (\operatorname{ctg}\theta_\infty \sin\phi_\infty) L_z, \tag{33.49д}$$

$$\Delta (S_x^2 + S_y^2)^{1/2} = \sqrt{\mathcal{C}} = (L^2 - L_z^2)^{1/2}. \tag{33.49е}$$

Здесь индекс ∞ означает, что величина берется в далекой от черной дыры точке орбиты («на бесконечности»)

Рассмотрим далее более сложный процесс, на который впервые обратил внимание Пенроуз [109]. 1. Бросим извне на черную дыру малый объект A с энергией на бесконечности E_A, зарядом e_A и аксиальной составляющей момента импульса L_{zA}. 2. Допустим.

что этот объект, упав достаточно глубоко, взрывается вблизи горизонта, разваливаясь на две части B и C, каждая из которых сразу же после взрыва движется по новой траектории для пробных частиц с новыми интегралами движения e_B и e_C, E_B и E_C, L_{zB} и L_{zC}. 3. Устроим взрыв так, чтобы объект B падал вниз на черную дыру и захватывался ею, а объект C уходил обратно на бесконечность. Как изменятся масса, заряд и момент импульса черной дыры? Согласно первому закону динамики черных дыр,

$$\Delta M = \left(\begin{array}{l}\text{полная энергия, которая, по мнению}\\ \text{далеких наблюдателей, прошла мимо}\\ \text{них к черной дыре, минус полная}\\ \text{энергия, которая, как они видят,}\\ \text{появилась вновь}\end{array}\right) = E_A - E_C.$$

Аналогично $\Delta Q = e_A - e_C$ и $\Delta S = L_{zA} - L_{zC}$. Эти изменения проще выразить через интегралы движения объекта B, падающего на черную дыру, что не является неожиданным. Взглянем на взрыв «$A \to B + C$» с точки зрения расположенной вблизи черной дыры локальной лоренцевой системы отсчета, начало которой совпадает с событием взрыва. Рассматриваемый в этой системе отсчета взрыв должен удовлетворять физическим законам специальной теории относительности (принцип эквивалентности!). В частности, он должен подчиняться закону сохранения заряда

$$e_A = e_B + e_C \tag{33.50а}$$

и закону сохранения полного 4-импульса

$$(\mathbf{p}_A)_{\text{непосредственно перед взрывом}} = (\mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C)_{\text{сразу после взрыва}}.$$

Более того, согласно закону сохранения 4-импульса $\mathbf{p}$ и заряда e, обобщенный импульс $\mathbf{n} \equiv \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ также сохраняется:

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{p}_A - e_A\mathbf{A} = \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C - (e_B + e_C)\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_B + \mathbf{n}_C.$$

Следовательно, сохраняются составляющие обобщенного импульса вдоль векторов $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial\phi$:

$$E_A \equiv -\pi_{tA} = -\pi_{tB} - \pi_{tC} = E_B + E_C, \tag{33.50б}$$

$$L_{zA} \equiv \pi_{\phi B} + \pi_{\phi C} = L_{zB} + L_{zC} \tag{33.50в}$$

(законы сохранения «энергии на бесконечности» и «аксиальной составляющей момента импульса» при взрыве). Комбинируя эти законы сохранения с выражениями

$$\Delta M = E_A - E_C,\ \Delta Q = e_A - e_C \text{ и } \Delta S = L_{zA} - L_{zC},$$

получаем

$$\Delta M = E_B,\ \Delta Q = e_B,\ \Delta S = L_{zB}. \tag{33.51}$$

Другими словами, этот результат означает следующее: изменения массы, заряда и момента импульса равны соответственно «энергии на бесконечности», заряду, «аксиальной составляющей момента

импульса», которые объект B несет вниз, пересекая горизонт, и это справедливо, *несмотря на то*, что мировая линия B может заканчиваться на такой траектории пробной частицы, которая не уходит на радиальную бесконечность!

Изменения величин M, Q, S в произвольных безызлучательных процессах

Непосредственным выводом из приведенного мысленного эксперимента является следующее обобщение: *В любом сложном процессе, который включает падение, столкновение и взрыв отдельных частиц вещества при условии, что гравитационное излучение последних пренебрежимо мало, полные изменения массы, заряда и момента импульса черной дыры равны*

$$\Delta M = \left(\begin{array}{l}\text{сумма значений энергии на бесконечности } E \\ \text{для всех объектов, пересекающих горизонт,} \\ \text{взятых для каждого объекта в момент пере-} \\ \text{сечения горизонта}\end{array}\right), \quad (33.52\text{а})$$

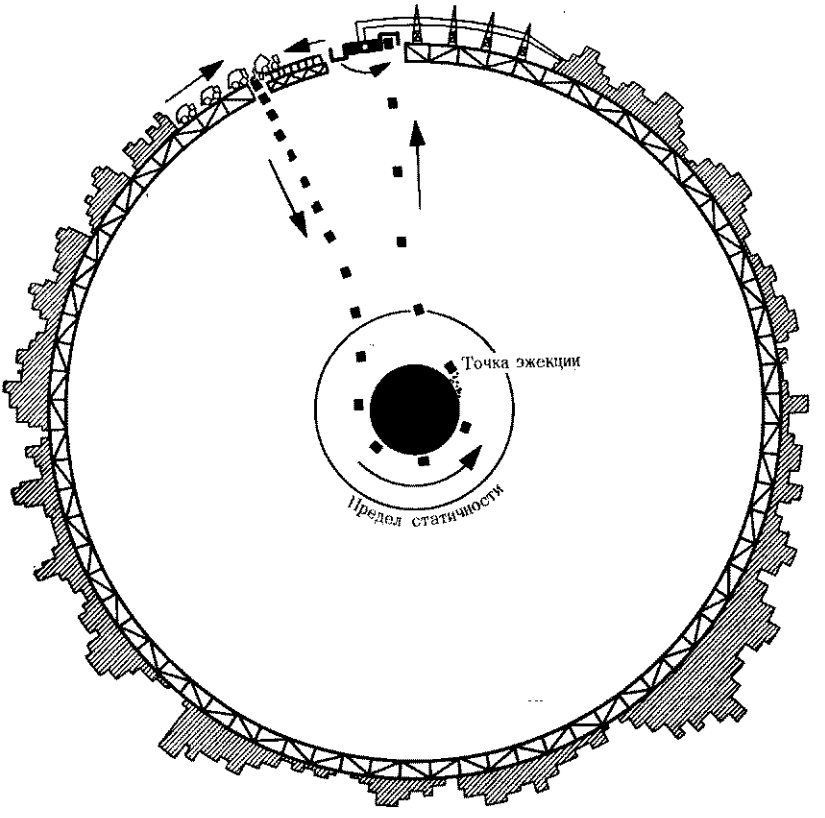
$$\Delta Q = \left(\begin{array}{l}\text{аналогичная сумма зарядов } e \text{ для всех} \\ \text{объектов, пересекающих горизонт}\end{array}\right), \quad (33.52\text{б})$$

$$\Delta S = \left(\begin{array}{l}\text{аналогичная сумма аксиальных составляющих} \\ \text{момента импульса } L_z \text{ для всех объектов,} \\ \text{пересекающих горизонт}\end{array}\right), \quad (33.52\text{в})$$

В этом результате нет ничего удивительного. Это как раз тот результат, которого можно было ожидать, исходя из самых примитивных представлений. Но неожиданным является следующий вывод [109]: *Инжектируя тщательно выбранным способом вещество в черную дыру, можно уменьшать полную массу-энергию черной дыры, т. е. из черной дыры можно извлекать энергию.*

Извлечение энергии из черной дыры за счет процессов в эргосфере

В случае *незаряженного* падающего объекта ключом к пониманию механизма извлечения энергии служит понятие эргосферы (отсюда ее название, придуманное Руфини и Уилером [168], от греческого слова «εργον», что означает «работа»). Вне эргосферы вектор Киллинга $\xi_{(t)} \equiv \partial/\partial t$ является времениподобным, так же как и 4-импульс $\mathbf{p}$ каждой пробной частицы; следовательно, $E = -\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}$ обязательно будет положительно. Но внутри эргосферы (между горизонтом и пределом статичности) $\xi_{(t)}$ является пространственноподобным, поэтому при определенном выборе времениподобного вектора импульса (что соответствует определенным орбитам незаряженных пробных частиц) $E = -\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}$ будет отрицательно, в то время как для других векторов E остается положительным. Орбиты с отрицательным E целиком лежат внутри эргосферы. Следовательно, чтобы инжектировать в черную дыру незаряженный объект с отрицательным E и посредством этого извлекать из нее энергию, необходимо каждый раз изменять E от положительного значения до отрицательного, а значит, необходимо изменять также и орбиту после того, как она проникнет в эргосферу. В принципе, конечно, это нетрудно, а может быть окажется нетрудным и практически, см. фиг. 33.2.



ФИГ. 33.2.

Высокоразвитая цивилизация соорудила вокруг черной дыры жесткую несущую конструкцию и построила на этом каркасе гигантский город. Каждый день грузовики привозят из города миллион тонн мусора на мусорную свалку. На этой свалке мусор сгребается в контейнеры, которые затем один за другим бросаются по направлению к центру черной дыры. Увлечение инерциальных систем отсчета захватывает каждый контейнер на круговую орбиту, являющуюся закручивающейся вблизи горизонта спиралью. Когда контейнер достигает определенной «точки эжекции», он выбрасывает свой груз мусора на орбиту с отрицательной энергией на бесконечности $E_{\text{мусор}} < 0$. В то время как мусор летит в дыру, изменяя ее полную массу-энергию на $\Delta M = E_{\text{выброш. мусор}} < 0$, контейнер, испытав в точке выброса отдачу, улетает обратно с большей энергией, чем та, которую он имел при падении:

$$E_{\text{конт. обратно}} = E_{\text{конт.+мусор, падение}} - E_{\text{выброш. мусор}} > E_{\text{конт.+мусор, падение}}.$$

Контейнер отдает свою огромную кинетическую энергию гигантскому маховику, маховик вращает генератор, последний вырабатывает электричество для города, в то время как контейнер возвращается на свалку за очередным грузом мусора. Полная электрическая энергия, производимая за каждый рейс контейнера туда и обратно, равна

$$\begin{aligned}(\text{энергия за рейс}) &= E_{\text{конт. обратно}} - (\text{масса покоя контейнера}) = \\ &= (E_{\text{конт.+мусор, падение}} - E_{\text{выброш. мусор}}) - (\text{масса покоя контейнера}) = \\ &= (\text{масса покоя контейнера} + \text{масса покоя мусора} - \Delta M) - (\text{масса покоя контейнера}) = (\text{масса покоя мусора}) + \\ &+ (\text{величина, на которую уменьшилась масса дыры, } -\Delta M).\end{aligned}$$

Таким образом, жители этого города могут использовать черную дыру не только для превращения всей массы покоя городского мусора в кинетическую энергию контейнера, а затем в электроэнергию, но они могут также превращать в электроэнергию часть массы самой черной дыры!

В случае заряженного объекта электромагнитные силы изменяют область, в которой существуют орбиты с отрицательной энергией на бесконечности. Если заряды объекта и черной дыры имеют противоположные знаки, то электромагнитные силы притягивают объект, придавая ему тем самым вблизи черной дыры бо́льшую кинетическую энергию, чем можно ожидать в отсутствие этих сил. Следовательно, $-\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}$ становится больше E:

$$E = -(\mathbf{p}-e\mathbf{A})\cdot\xi_{(t)} = -\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)} + \underbrace{eQr/\rho^2}_{\text{меньше 0, если } eQ<0}, \qquad (33.53)$$

«Эффективная эргосфера» для процессов с участием заряженных частиц

и орбиты с $E<0$ существуют в области несколько большей, чем эргосфера. Если же, наоборот, e и Q имеют один и тот же знак, то орбиты с $E<0$ ограничены областью меньшей, чем эргосфера. Область, в которой существуют орбиты с $E<0$ для заданных значений e, Q и массы покоя μ, называется *эффективной эргосферой*.

УПРАЖНЕНИЕ

33.10. Вектор момента импульса падающей частицы

Выведите уравнения (33.49г) — (33.49е) для компонент L_λ и L_η орбитального момента импульса частицы, падающей на черную дыру. Примите, что начальная скорость пренебрежимо мала, $E^2-\mu^2\approx 0$.

---

§ 33.8. ОБРАТИМЫЕ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ [154, 155]

Возьмем черную дыру с заданными массой M, зарядом Q и моментом импульса S. Инжектируя малые объекты, будем вызывать различные изменения величин M, Q и S. Можно ли, задавшись произвольными изменениями ΔM, ΔQ и ΔS, придумать процесс, при котором эти изменения достигаются? Или же имеются какие-то ограничения?

Второй закон динамики черных дыр (невозможность уменьшения площади поверхности черной дыры, дополнение 33.4; доказательство в § 34.5) налагает весьма жесткое ограничение.

Могут ли достигаться на самом деле все те значения, которые допустимы согласно этому ограничению, и можно ли получить это ограничение путем непосредственного изучения орбит пробных частиц?

Ответ является утвердительным; действительно, это ограничение было обнаружено Кристодулу [154] и Кристодулу и Руфи-

ни [155] при изучении орбит пробных частиц одновременно с открытием Хоукингом [103] второго закона динамики черных дыр и независимо от него.

Свойства орбит пробных частиц:

Чтобы, исходя из свойств орбит пробных частиц, получить ограничение, связанное с невозможностью уменьшения площади поверхности черной дыры, необходимо выяснить, какие значения энергии на бесконечности E допустимы при заданном положении (r, θ) вне черной дыры. Объединяя уравнения (33.32а) и (33.32б), можно выразить величину E через положение пробной частицы (r, θ), ее массу покоя μ, заряд e, аксиальную составляющую момента импульса L_z и импульсы частицы $p^r = dr/d\lambda$, $p^\theta = d\theta/d\lambda$ в направлениях r и θ:

1) E как функция $\mu, e, L_z, r, \theta, p^r$

$$\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma = 0, \quad E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \tag{33.54а}$$

где

$$\alpha = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta > 0 \text{ всюду вне горизонта}, \tag{33.54б}$$

$$\beta = (L_z a + eQr)(r^2 + a^2) - L_z a \Delta, \tag{33.54в}$$

$$\gamma = (L_z a + eQr)^2 - \Delta (L_z/\sin\theta)^2 - \mu^2 \Delta \rho^2 - \rho^4 [(p^r)^2 + \Delta (p^\theta)^2]. \tag{33.54г}$$

(Квадратный корень нужно взять с положительным знаком: $+\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$; он соответствует 4-импульсу, направленному в будущее, в то время как корень с отрицательным знаком соответствует 4-импульсу, направленному в прошлое, см. фиг. 33.3.)

2) эффективный потенциал

Следует отметить несколько характерных черт уравнения для энергии (33.54). 1. Для орбит в экваториальной «плоскости» $\theta = \pi/2$ и $p^\theta \equiv 0$ уравнение энергии дает эффективный потенциал радиального движения (дополнение 33.5). 2. Для орбит с отрицательными E должно быть $\beta < 0$ и $\gamma > 0$, что достигается только при $L_z a < 0$ и (или) $eQ < 0$. Следовательно, *массу черной дыры нельзя уменьшить, не уменьшив при этом ее заряд или момент импульса или и то и другое вместе.* 3. Для орбиты с заданными (r, θ) и с заданными e и L_z энергия E минимальна, если $p^r = p^\theta = \mu = 0$. Другими словами, *масса покоя и r- и θ-составляющие импульса всегда дают положительный вклад в E.*

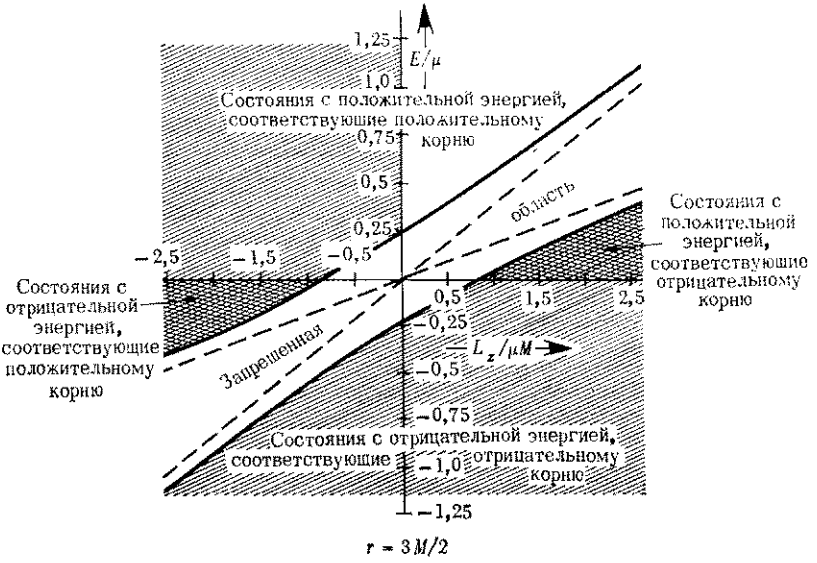
3) при отрицательной энергии $L_z a < 0$ и (или) $eQ < 0$

Инжектируя некоторый объект в черную дыру, создадим небольшие изменения ее массы, заряда и момента импульса

$$\delta M = E, \quad \delta Q = e, \quad \delta S = L_z.$$

Изменения свойств черной дыры, вызванные инжекцией частиц

В каком диапазоне может меняться M при заданных Q и S? Ясно, что δM может быть сделано сколь угодно большим, если массу покоя μ взять достаточно большой. Но существует нижний предел значений величины δM. Этот предел соответствует минимальному значению E для заданных e и L_z. Орбита, на которой достигается минимум величины E, пересекает горизонт (в противном случае никаких изменений M, Q и S не происходило бы!), так что E может быть определено на горизонте. На горизонте, так же как



ФИГ. 33.3.

Энергия на бесконечности E, допустимая для частицы с моментом импульса L_z и массой покоя μ, которая находится 1) в «экваториальной плоскости» $\theta = \pi/2$, 2) на радиусе $r = 3M/2$, 3) вблизи незаряженной ($Q = 0$) экстремальной ($S = M^2$) керровской черной дыры. Здесь E отложено в зависимости от L_z. Показаны множества состояний с положительным и отрицательным корнями. Энергия на бесконечности для состояний с положительным корнем дается уравнениями (33.54):

$$E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha};$$

векторы 4-импульса этих состояний лежат внутри светового конуса будущего. Энергия состояний с отрицательным корнем (принадлежащих дираковскому «вакууму с отрицательной энергией») дается выражением

$$E = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha};$$

векторы 4-импульса этих состояний лежат внутри светового конуса прошлого. В промежутке между этими двумя множествами орбит не существует (запрещенная область). На горизонте $r = M$ эта запрещенная область исчезает (в результате бесконечного красного смещения, которое испытывает локальный промежуток 2μ, получается нулевой промежуток на бесконечности) [140].

и всюду, минимум E достигается при $\mu = p^r = p^\theta = 0$. Подставляя эти значения, а также $r = r_+$ (так что $\Delta = 0$) в уравнения (33.54), находим

$$E_{\text{мин}} = \frac{L_z a + eQr_+}{r_+^2 + a^2}, \tag{33.55}$$

что соответствует следующим изменениям характеристик черной дыры:

1) предел для δM при заданных δQ и δS

$$\delta M \geqslant \frac{a\delta S + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2} \begin{pmatrix} \text{абсолютный минимум} \\ \text{величины } \delta M \text{ при} \\ \text{заданных } \delta S \text{ и } \delta Q \end{pmatrix}. \tag{33.56}$$

Отметим важное следствие [129]. Если начальная черная дыра является «экстремальной дырой Керра — Ньюмана» с $M^2 = a^2 + Q^2$, так что можно опасаться таких изменений, которые приводят к $M^2 < a^2 + Q^2$ и уничтожают горизонт, то подобные опасения являются необоснованными. Неравенство (33.56) требует (поскольку $r_+ = M$ и $S = Ma$)

$$M\delta M \geqslant a\delta a + Q\delta Q,$$

так что M^2 остается большей или равной $a^2 + Q^2$, и горизонт сохраняется.

2) горизонт сохраняется

Ограничение на изменение массы в самом общем случае (33.56) может быть переписано в иной форме [154, 155]:

$$\delta M_{\text{неприв}} \geqslant 0, \tag{33.57}$$

где

$$M_{\text{неприв}} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{r_+^2 + a^2} = \frac{1}{2}\left[\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}\right)^2 + a^2\right]^{1/2} \tag{33.58}$$

3) неприводимая масса

есть «неприводимая масса» черной дыры. Из неравенства (33.57) следует, что *никакое превращение черной дыры, вызванное инжекцией малых сгустков вещества, не может уменьшить неприводимую массу черной дыры*. Этот результат фактически представляет собой частный случай второго закона динамики черных дыр, поскольку площадь поверхности черной дыры

$$A = 16\pi M_{\text{неприв}}^2 \tag{33.59}$$

(упражнение 33.12).

Подставляя в уравнение (33.58) $a = S/M$ и решая это уравнение относительно M, получаем

$$M^2 = \left(M_{\text{неприв}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{неприв}}}\right)^2 + \frac{S^2}{4M_{\text{неприв}}^2}. \tag{33.60}$$

неприводимый вклад в массу | электромагнитный вклад в массу | вращательный вклад в массу

Превращение, происходящее с черной дырой при фиксированном значении неприводимой массы, является *обратимым*, а превращение, сопровождающееся увеличением этой массы, — *необратимым*. При выводе неравенства (33.56) можно было видеть, что минимальное возможное значение δM (при этом $\delta M_{\text{неприв}} = 0$) достигается лишь при тех процессах инжекции, при которых $\mu = p^r = p^\theta = 0$ на горизонте $r = r_+$. Другими словами, чтобы получить обратимое превращение, инжектируя объект в черную дыру, необходимо 1) взять объект с массой покоя μ, которая чрезвычайно мала по сравнению с его зарядом e или аксиальной составляющей момента импульса L_z:

4) обратимые и необратимые превращения

$$\mu/e \ll 1 \quad \text{и (или)} \quad \mu^2/L_z^2 \ll 1;$$

2) посылать этот объект вниз «чрезвычайно осторожно» ($p^r = p^\theta = 0$) и как можно ближе к горизонту ($r = r_+$). Это может показаться не таким уж трудным делом, но лишь до тех пор, пока мы не вспомним, что, во-первых, объекты с $p^r = p^\theta = 0$ на горизонте должны двигаться наружу со скоростью света, а во-вторых, чем ближе мы приближаемся к горизонту, чтобы поместить там объект, тем больше опасность «соскользнуть» и быть проглоченным черной дырой!

Совершенно ясно, что реальный процесс будет чем-то отличаться от обратимого. Обратимость является идеализированным пределом, к которому можно лишь приблизиться, но которого невозможно достичь.

УПРАЖНЕНИЯ

33.11. Неприводимая масса не уменьшается

Покажите, что условие (33.56) эквивалентно неравенству $\delta M_{\text{неприв}} \geqslant 0$.

33.12. Площадь поверхности черной дыры

Покажите, что площадь горизонта геометрии Керра — Ньюмана [площадь поверхности $r = r_+$ и $t = \text{const}$ (в координатах Бойера — Линдквиста) или $\tilde{V} = \text{const}$ (в координатах Керра)] равна $16\pi M^2_{\text{неприв}}$.

33.13. Угловая скорость черной дыры

Общая теорема (см. [169] для релятивистского случая и [170] для нерелятивистского случая) гласит: если мы инжектируем момент импульса во вращающуюся звезду, оставляя при этом все другие вклады в полную массу-энергию фиксированными (вклад за счет энтропии и вклад массы покоя барионов), то инжекция приведет к следующему изменению массы-энергии:

$$\delta\,(\text{масса-энергия}) = \begin{pmatrix}\text{угловая скорость}\\ \text{звезды в точке}\\ \text{инжекции}\end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{импульса}\end{pmatrix}. \quad (33.61)$$

По аналогии с этим, инжектируя момент импульса δS во вращающуюся черную дыру и оставляя все другие вклады в полную массу-энергию фиксированными (вклад от неприводимой массы и от заряда), отождествим коэффициент Ω_h в уравнении

$$\delta M = \Omega_h \delta S$$

с угловой скоростью дыры:

$$\Omega_h = (\partial M/\partial S)_{Q, M_{\text{неприв}}}. \quad (33.62)$$

а. Покажите, что угловая скорость черной дыры равна

$$\Omega_h = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (33.63)$$

Заметим, что она в точности совпадает с угловой скоростью фотонов которые все время находятся на горизонте [уравнение (33.42б); «закручивание» нулевых генераторов горизонта].

б. Покажите, что любой объект, падающий на черную дыру, приобретает на поздних стадиях падения, когда он достигает горизонта, угловую скорость (относительно системы координат Бойера — Линдквиста) $\Omega = d\phi/dt = \Omega_h$. (Напомним, что на горизонте координаты Бойера — Линдквиста обладают сингулярностью. Это и является причиной, по которой любой объект независимо от его L_z, E, e, μ, $\mathcal{Q}$ может достигать и действительно достигает одного и того же значения $\Omega = \Omega_h$.)

33.14. Разделение переменных в волновых уравнениях

В этой главе всесторонне изучалось движение малых объектов во внешних полях черных дыр. Почти столь же важен, хотя и не так хорошо изучен из-за своей сложности, вопрос об эволюции слабых электромагнитных и гравитационных возмущений («волн») в геометрии Керра — Ньюмана. Точно так же, как не было оснований ожидать существования «четвертого интеграла движения» для пробной частицы в геометрии Керра — Ньюмана, нет оснований ожидать разделения переменных в уравнениях Максвелла или в волновых уравнениях, описывающих гравитационные возмущения, или даже в скалярном волновом уравнении $\Box\psi \equiv -\psi^{;\alpha}_{;\alpha} = 0$. Поэтому явилось большим сюрпризом то, что Картер [161] доказал возможность разделения переменных в скалярном волновом уравнении, а позднее Теукольский [171, 172] провел разделение переменных в уравнениях Максвелла и в волновых уравнениях, описывающих гравитационные возмущения.

Покажите, что разделение переменных в скалярном волновом уравнении в случае (незаряженной) геометрии Керра приводит к решениям следующего вида:

$$\psi = (r^2+a^2)^{-1/2} u_{\ell m}(r)\, S_{m\ell}(-i\omega a, \cos\theta)\, e^{i(m\phi-\omega t)}, \qquad (33.64а)$$

где m и ℓ — целые числа, причем $0 \leqslant |m| \leqslant \ell$, $S_{m\ell}$ — сферическая гармоника [173], а $u_{\ell m}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-d^2u/dr^{*2} + Vu = 0. \qquad (33.64б)$$

Чтобы привести уравнение к такому виду, определим «черепашью» координату Редже — Уилера [125] r^* соотношением

$$dr^* = \Delta^{-1}(r^2+a^2)\, dr \qquad (33.64в)$$

и найдем эффективный потенциал $V(r^*)$, который дается выражением

$$V = -\left(\omega - \frac{ma}{r^2+a^2}\right)^2 + [(m-\omega a)^2 + \mathcal{Q}](r^2+a^2)^{-2}\Delta + \\ + 2(Mr-a^2)(r^2+a^2)^{-3}\Delta + 3a^2(r^2+a^2)^{-4}\Delta^2. \qquad (33.64г)$$

УПРАЖНЕНИЯ

В этом радиальном уравнении $\mathcal{C}$ — константа (аналогичная картеровской константе для движения частицы), которая выражается через m и ℓ:

$$\mathcal{C} \equiv \lambda_{m\ell} - m^2, \quad \lambda_{m\ell} = \begin{pmatrix}\text{собственное значение}\\ \text{сферической гармоники,}\\ \text{см. [173]}\end{pmatrix}. \qquad (33.64д)$$

(Детальное решение с разделением переменных было получено Бриллом и др. [174]. Исследование взаимодействия между различными полями и керровскими черными дырами с помощью приведенного выше решения, а также аналогичных решений для электромагнитных и гравитационных волновых уравнений приводится в работах [128, 141, 159, 171, 175, 176].)

Дополнение 33.5. ОРБИТЫ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В «ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ» ЧЕРНОЙ ДЫРЫ КЕРРА — НЬЮМАНА

Радиальное движение задается уравнением для энергии (33.54), в котором $\theta = \pi/2$, $p^\theta = 0$:

$$\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma_0 - r^4 (p^r)^2 = 0, \qquad E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma_0 + \alpha r^4 (p^r)^2}}{\alpha}; \qquad (1)$$

здесь α, β, γ_0 — функции r и интегралов движения,

$$\alpha = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 > 0, \qquad (2а)$$

$$\beta = (L_z a + eQr)(r^2 + a^2) - L_z a\Delta, \qquad (2б)$$

$$\gamma_0 = (L_z a + eQr)^2 - \Delta L_z^2 - \mu^2 r^2 \Delta; \qquad (2в)$$

радиальный импульс

$$p^r = dr/d\lambda. \qquad (3)$$

Таким образом, уравнение (1) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для $dr/d\lambda$.

Качественные особенности радиального движения можно видеть на схеме распределения эффективного потенциала. Эффективный потенциал $V(r)$ есть минимальное допустимое значение E на радиусе r: $V(r) = (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma_0})/\alpha$.

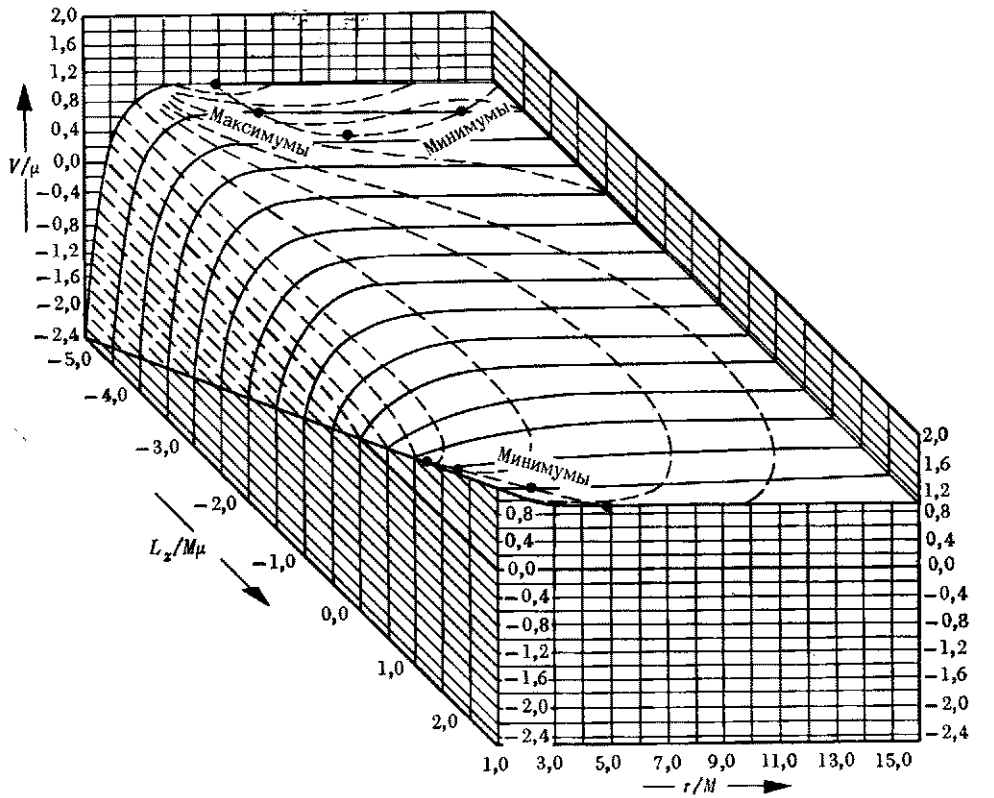
Как и в шварцшильдовском случае (фиг. 25.2), для частицы с энергией на бесконечности E допустимыми являются те области, где $V(r) \leqslant E$, а точки поворота ($p^r = dr/d\lambda = 0$) возникают там, где $V(r) = E$.

Устойчивые круговые орбиты находятся в минимумах $V(r)$. Исследуя детально $V(r)$, находим, что в случае незаряженных черных дыр самая внутренняя устойчивая круговая орбита (наиболее сильно связанная орбита) обладает характеристиками, приведенными в таблице [115].

В случае заряженной экстремальной черной дыры Керра — Ньюмана ($M^2 = Q^2 + a^2$, $Q \neq 0$ и $a \neq 0$) устойчивые круговые орбиты, связанные на 100% ($E = 0$), достигаются в пределе [155]

$$\frac{e}{\mu} \to -\infty, \quad \frac{Q}{M} \to 0 \quad (\text{т. е. } a \to M) \text{ и } \left(\frac{e}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{Q}{M}\right) \to -\infty.$$

Характеристика	Ньютоновский случай (фиг. 25.2)	Шварцшильдовский случай ($a = Q = 0$) (фиг. 25.2)	Экстремальный керровский случай ($a^2 = M^2$, $Q = 0$) (см. рисунок) [129]	
			если $L_z a > 0$	если $L_z a < 0$
r/M	0	6	1	9
E/μ	$-\infty$	$2\sqrt{2}/3$	$1/\sqrt{3}$	$5/(3\sqrt{3})$
$(\mu - E)/\mu$ — «удельная энергия связи»	$+\infty$	0,0572	0,4226	0,0377
$\lvert L_z \rvert/\mu M$	0	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$22/(3\sqrt{3})$



Эффективный потенциал для незаряженной черной дыры в экстремальном керровском случае ($a = M$) показан на рисунке [115]. Подробные схемы орбит в экваториальной плоскости приведены в работе [177]. Многие интересные свойства орбит, выходящих за пределы экваториальной плоскости, исследованы в работе [178].

2

34. ГЛОБАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ, ГОРИЗОНТЫ И ТЕОРЕМЫ О СИНГУЛЯРНОСТЯХ

Эта глава целиком относится к курсу 2. Необходимой подготовкой для ее чтения являются § 22.5 (геометрическая оптика) и те части глав 32 и 33 (коллапс и черные дыры), которые относятся к курсу 2. Данная глава не обязательна для понимания последующих глав

§ 34.1. СОПОСТАВЛЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Сопоставление локальных методов исследования физики пространства-времени с глобальными методами

До 60-х годов при расчетах в теории гравитации использовались почти исключительно *локальные* методы. Эйнштейновские уравнения поля описывают, каким образом тензор энергии-импульса **T** в данном событии создает кривизну **G** в том же событии (*локальная* физика). Уравнение $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$, если его свести к дифференциальному уравнению для метрических коэффициентов, связывает $g_{\alpha\beta}$, $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}$ и $\partial^2 g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}$ в каждом данном событии с $T_{\gamma\delta}$ в том же событии (*локальное* уравнение). Решение этих дифференциальных уравнений, получается ли оно на компьютере или же аналитически с заданными начальными значениями, осуществляется путем интегрирования по времени от одного события к другому и т. д. (*локальное* интегрирование). Обращаясь к принципу эквивалентности в *локально* лоренцевой системе отсчета, связанной с каждым отдельным событием пространства-времени, получаем негравитационные физические законы. Чтобы ясно представить себе глобальную структуру пространства-времени, мы производим *локальные* вычисления в окрестности каждого события, а затем соединяем вместе все локальные результаты, чтобы получить глобальную картину. Почему мы так доверяем локальному методу? Потому что законы гравитационной физики имеют особенно простую форму, если сформулировать их на локальном языке.

Тот факт, что гравитационная физика подчиняется также мощным и простым *глобальным* законам, поняли лишь к середине 60-х годов. Начиная с 1963 г. исследования черных дыр и сингулярностей обнаружили глобальные законы и глобальные свойства

пространства-времени, которые по своей простоте и изяществу могут сравниваться даже с (локальным) принципом эквивалентности. Примером является второй закон динамики черных дыр: «в изолированной системе суммарная площадь поверхностей всех черных дыр никогда не может уменьшаться». В результате было получено много сведений и развито множество мощных методов *непосредственного* исследования глобальных свойств пространства-времени.

Достаточно полное изложение глобальных методов заняло бы не одну главу. К счастью, полное изложение этого вопроса публикуется почти одновременно с данной книгой Хоукингом и Эллисом [108]. Поскольку Хоукинг и Эллис значительно более сведущи в данном вопросе, чем мы (Мизнер, Торн и Уилер), мы предпочли не писать «конкурирующее» сочинение. Вместо этого в настоящей главе мы даем лишь некоторое весьма неполное представление о предмете, достаточное для того, чтобы читатель ознакомился с основными типами применяемых методов и наиболее важными результатами, но отнюдь не достаточное, чтобы работать в этой области. Мы выбрали для изложения те вопросы, которые наиболее тесно примыкают ко всему остальному материалу этой книги: свойства «бесконечности» в асимптотически плоском пространстве-времени (§ 34.2), причинность и горизонты (§ 34.3 и 34.4), доказательство второго закона динамики черных дыр (§ 34.5) и теоремы о эволюции сингулярностей в пространстве-времени (§ 34.6). Для более подробного ознакомления с глобальными методами следует обратиться не только к книге Хоукинга и Эллиса [108], но также к обзорным статьям Героча [179], Пенроуза [180, 181] и Хоукинга [182], к диссертации Годфри [183] и к более специальным статьям, ссылки на которые приводятся в тексте данной главы.

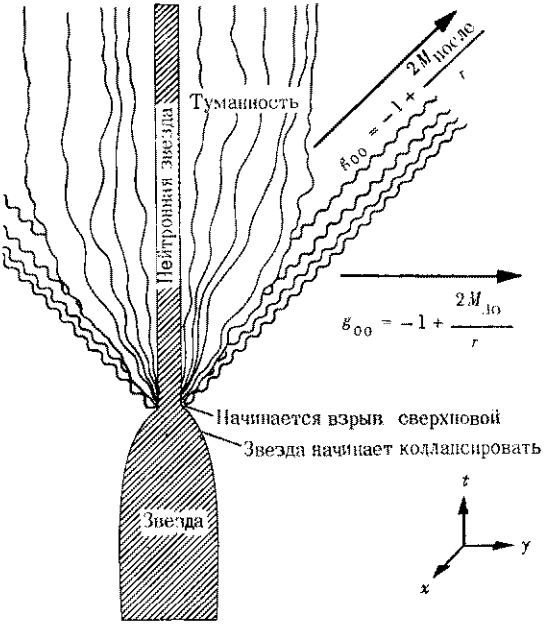
Литература по глобальным методам

§ 34.2. «БЕСКОНЕЧНОСТЬ» В АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ-ВРЕМЕНАХ

Обоснование необходимости изучения свойств пространства-времени вблизи бесконечности

Производя вычисления в асимптотически плоском пространстве-времени, часто приходится исследовать асимптотическую форму полей (например метрику, тензор кривизны или электромагнитное поле) «на бесконечности». Например, масса и момент импульса изолированной системы определяются асимптотической формой метрики (гл. 19). Лишь в редких случаях достаточно исследовать асимптотику вблизи «пространственной бесконечности». Например, если мы желаем узнать, сколько массы уносится наружу гравитационными и электромагнитными волнами в ходе взрыва сверхновой, мы должны изучать асимптотический вид метрики не на «пространственной бесконечности», а на «нулевой бесконечности будущего» (фиг. 34.1).

Пенроуз [84, 184] развил мощный аппарат математических методов для исследования асимптотических свойств пространства-



ФИГ. 34.1.

Измерение массы-энергии, излученной в виде гравитационных и электромагнитных волн при взрыве сверхновой; измерение проводится в асимптотически плоском пространстве-времени. Излученная масса-энергия равна разности масс предсверхновой звезды $M_{\text{до}}$ и нейтронной звезды и туманности после взрыва $M_{\text{после}}$:

$$M_{\text{излуч}} = M_{\text{до}} - M_{\text{после}}.$$

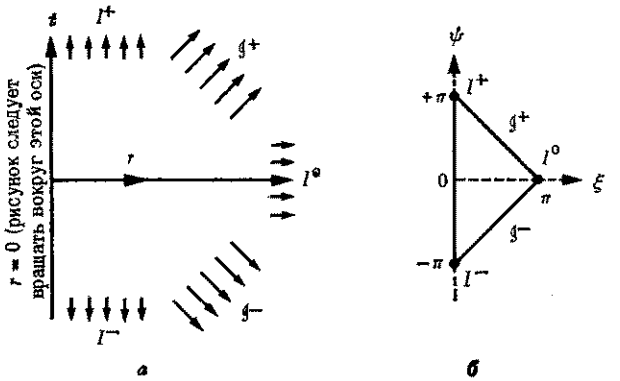
Чтобы измерить $M_{\text{до}}$, можно исследовать асимптотическую форму (в подходящих координатах) компоненты g_{00} на пространственной бесконечности:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M_{\text{до}}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } r \longrightarrow \infty,\ t = \text{const}.$$

Но чтобы измерить $M_{\text{после}}$ тем же способом, необходимо подождать на некотором фиксированном r до тех пор, пока все излучение не пройдет мимо этой точки:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M_{\text{после}}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при} \quad r \longrightarrow \infty \text{ и } t - r = \text{постоянная величина, достаточно большая, чтобы оказаться внутри волнового всплеска}.$$

Иначе говоря, чтобы измерить $M_{\text{после}}$, необходимо исследовать асимптотическую форму g_{00} *не* на «пространственной бесконечности», а на «нулевой бесконечности будущего».



ФИГ. 34.2.
Плоское пространство-время «Минковского», изображенное: *а* — в обычных сферических координатах t, r, θ, ϕ глобальной лоренцевой системы и *б* — в сферических координатах, определяемых уравнениями (34.2). На каждом рисунке показано пять областей бесконечности I^+, I^-, I^0, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$. В обеих системах координат радиальные нулевые линии составляют с вертикальной осью угол 45°, а нерадиальные нулевые линии — угол меньше 45° [см. уравнения (34.1) и (34.2)]. Подробности см. в упражнении 34.1.

времени вблизи «бесконечности». Ключом к его методам является понятие «конформного преобразования» пространства-времени, которое переносит «бесконечность» на конечный радиус и тем самым превращает «асимптотические» вычисления в вычисления для «конечных точек». Метод Пенроуза дает также строгие определения нескольких типов «бесконечности», с которыми мы сталкиваемся в асимптотических плоских пространствах-временах.

Детали метода Пенроуза не существенны для понимания этой главы. Тем не менее в этой главе нам часто придется обращаться к различным типам «бесконечности», определение которых было дано Пенроузом. На интуитивном уровне эти определения таковы (фиг. 34.2, *а*):

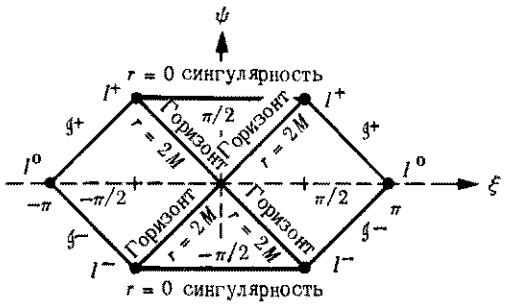
Характерные области бесконечности I^+, I^0, I^- $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$

$I^+ \equiv$ «временна́я бесконечность будущего»: область $t \to +\infty$ при конечном радиусе r (область, куда распространяются времениподобные линии);

$I^- \equiv$ «временна́я бесконечность прошлого»: область $t \to -\infty$ при конечном радиусе r (область, откуда приходят времениподобные линии);

$I^0 \equiv$ «пространственная бесконечность»: область $r \to \infty$ при конечном времени t (область, куда простираются пространственноподобные сечения);

$\mathcal{I}^+ \equiv$ «нулевая бесконечность будущего»: область $t + r \to \infty$ при конечном $t - r$ (область, куда распространяются направленные наружу нулевые линии);



ФИГ. 34.3.
Шварцшильдовское пространство-время, изображенное в координатах ψ, ξ, θ, ϕ уравнений (34.3). Эту координатную диаграмму следует сравнить с координатной диаграммой Крускила — Шекереса (фиг. 31.3). На обеих диаграммах нулевые радиальные геодезические имеют наклон 45°. Каждая асимптотически плоская область (по одной с каждой стороны от «горловины» фиг. 31.5, *а*) обладает своим набором бесконечностей I^+, I^-, I^0, $\mathscr{J}^+$ и $\mathscr{J}^-$. Обоснование этой диаграммы см. в упражнении 34.2.

$\mathscr{J}^-$ ≡ «нулевая бесконечность прошлого»: область $t - r \to -\infty$ при конечном $t + r$ (область, откуда приходят направленные внутрь нулевые линии).

Координатные диаграммы, на которых проявляется структура бесконечности

Часто для наглядного представления асимптотической структуры пространства-времени полезно ввести такие координаты, в которых бесконечность имела бы конечное значение координаты. Например, в плоском пространстве-времени можно провести преобразование от обычных сферических координат t, r, θ, ϕ, для которых

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{34.1}$$

к новым сферическим координатам ψ, ξ, θ, ϕ; при этом

$$t + r = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi + \xi), \tag{34.2а}$$

$$t - r = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi - \xi), \tag{34.2б}$$

$$ds^2 = \frac{-d\psi^2 + d\xi^2}{4\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\psi-\xi)} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{34.2в}$$

В координатах ψ, ξ (фиг. 34.2, *б*) области I^+, I^-, I^0, $\mathscr{J}^+$, $\mathscr{J}^-$ изображаются более наглядно, чем в обычных координатах t и r.

В качестве другого примера произведем замену координат Крускала — Шекереса v, u, θ, ϕ для пространства-времени Шварцшильда на новые координаты ψ, ξ, θ, ϕ:

$$v + u = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi + \xi), \tag{34.3а}$$

$$v - u = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi - \xi), \tag{34.3б}$$

$$(1-r/2M)\,e^{r/2M} = v^2 - u^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi+\xi)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi-\xi), \quad (34.3в)$$

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\frac{e^{-r/2M}(-d\psi^2+d\xi^2)}{4\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\psi-\xi)} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2). \quad (34.3г)$$

На получаемой в результате координатной диаграмме (фиг. 34.3) ясно видны причинные связи между горизонтами, сингулярностями и различными областями бесконечности.

34.1. Плоское пространство-время в координатах ψ, ξ, θ, ϕ УПРАЖНЕНИЯ

а. Выведите уравнение (34.2в) из (34.1), (34.2в) и (34.2б). б. Покажите, что области I^+, I^-, I^0, $\mathscr{J}^+$ и $\mathscr{J}^-$ плоского пространства-времени расположены следующим образом:

$$\begin{aligned} &I^+\colon\ \psi=\pi,\quad \xi=0;\\ &I^-\colon\ \psi=-\pi,\quad \xi=0;\\ &I^0\colon\ \psi=0,\quad \xi=\pi;\\ &\mathscr{J}^+\colon\ \psi+\xi=\pi,\quad -\pi<\psi-\xi<\pi;\\ &\mathscr{J}^-\colon\ \psi-\xi=-\pi,\quad -\pi<\psi+\xi<\pi \end{aligned} \quad (34.4)$$

[см. уравнения (34.2)]. Это те области, которые изображены на фиг. 34.2.

в. Покажите, что в плоском пространстве-времени на координатной диаграмме ψ, ξ (фиг. 34.2) радиальные нулевые линии составляют с вертикальной осью угол в 45° и что угол между этой осью и нерадиальными нулевыми линиями меньше 45°.

34.2. Шварцшильдовское пространство-время в координатах ψ, ξ, θ, ϕ

а. Выведите уравнения (34.3в) и (34.3г) из (34.3а), (34.3б) и уравнений Крускала — Шекереса (31.14).

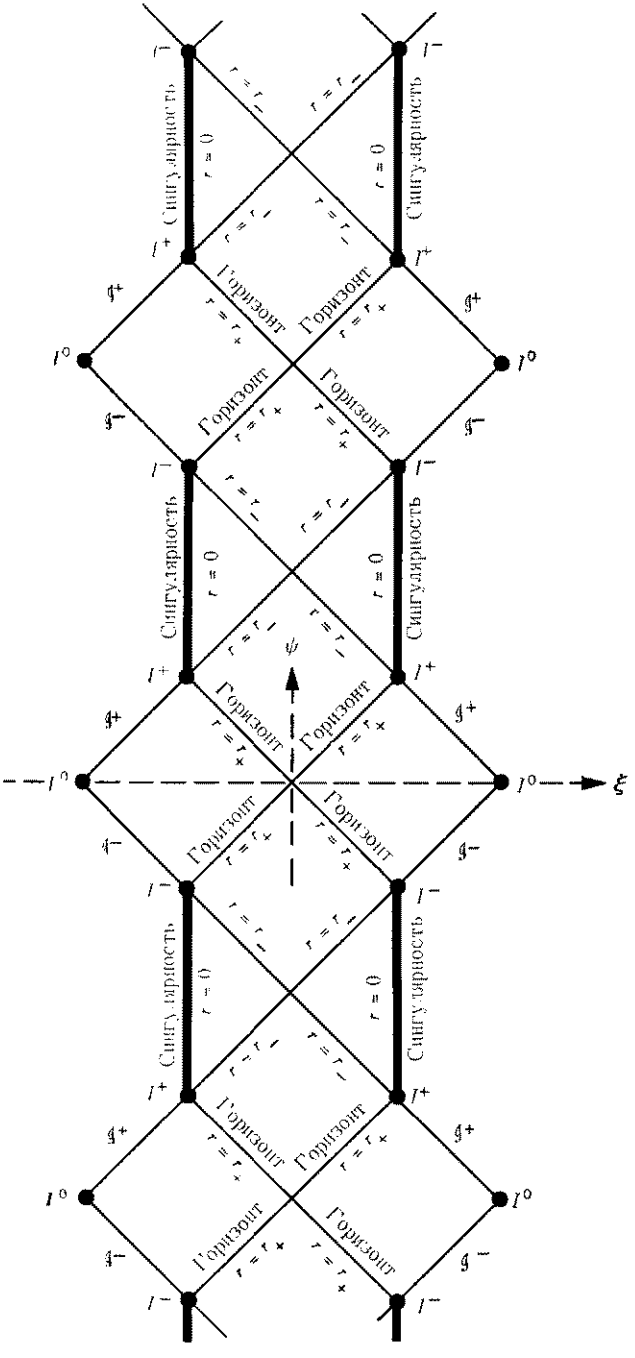
б. Пользуясь уравнениями (34.3), объясните форму координатной диаграммы на фиг. 34.3.

34.3. Пространство-время Рейснера — Нордстрема

а. Покажите, что существует такая система координат, в которой геометрия Рейснера — Нордстрема с $0 < |Q| < M$ (упражнения 31.8 и 32.1) имеет вид

$$ds^2 = F^2(-d\psi^2+d\xi^2) + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2), \quad (34.5)$$
$$F = F(\psi,\xi),\quad r = r(\psi,\xi),$$

и в которой горизонты и бесконечности такие, как показано на фиг. 34.4. (*Замечание.* Это упражнение является очень трудным, пока вы не располагаете решением упражнения 31.8, г. Решение см. в работе [49].)



ФИГ. 34.4.

Пространство-время Рейснера — Нордстрема

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr}{1 - 2M/r + Q^2/r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

с $0 < |Q| < M$, изображенное в новой системе координат $(\psi, \xi, \theta, \phi)$, в которой линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = F^2 (-d\psi^2 + d\xi^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

(см. упражнение 34.3). На этой координатной диаграмме обнаруживается глобальная структура геометрии, включая сингулярности при $r = 0$, горизонты при $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ (которые ограничивают связь с $\mathcal{I}^+$ и $\mathcal{I}^-$), нулевые поверхности при $r = r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ (которые ограничивают связь с сингулярностями) и различные асимптотические плоские бесконечности I^+, I^-, I^0, $\mathcal{I}^+$ и $\mathcal{I}^-$. На этой диаграмме можно прочесть «причинную структуру» геометрии, т. е. какие области могут сообщаться друг с другом, а какие — нет. Детальное обсуждение этой геометрии см. в работах [48, 49]. Рассмотрение коллапса заряженных звезд, для которых эта геометрия является внешним гравитационным полем, см. в работах [185—188].

УПРАЖНЕНИЯ

б. Воспользуйтесь фиг. 34.4, чтобы сделать следующий вывод: геометрия Рейснера — Нордстрема описывает «горловину», или мост, соединяющий два асимптотически плоских пространства-времени, который: 1) расширяется до состояния с максимальной длиной окружности; 2) вновь сжимается до состояния с минимальной длиной окружности, причем в ходе этого сжатия его внешние области перестают быть связанными с двумя I^0 (т. е. с двумя пространственными бесконечностями) и соединяются с двумя сингулярностями $r = 0$; 3) происходит отскок; 4) вновь расширяется, и в процессе этого расширения его «внешние области» отделяются от двух сингулярностей и вновь соединяются с двумя I^0 в двух *новых* асимптотически плоских вселенных; 5) замедляет свое расширение до полной остановки; 6) вновь сжимается до состояния с минимальной длиной окружности, и в процессе этого сжатия его внешние области отделяются от двух I^0 и вновь соединяются с новой парой сингулярностей $r = 0$, и так до бесконечности.

§ 34.3. ПРИЧИННОСТЬ И ГОРИЗОНТЫ

Обратимся теперь к глобальным [1]) методам исследования черных дыр, имея в виду следующие цели: 1) дать определение понятия «горизонт» (данный параграф), 2) вывести глобальные геометрические свойства горизонтов (§ 34.4) и 3) доказать второй закон динамики черных дыр (§ 34.5). Все рассмотрение ограничивается такими пространственно-временными многообразиями, которые 1) содержат по крайней мере одну асимптотически плоскую область («внешнюю вселенную», область «вне черных дыр») и 2) являются «ориентированными во времени». Под «ориентацией во времени» мы понимаем, что в каждом событии пространства-времени можно сделать выбор между двумя различными световыми конусами, один из которых является световым конусом будущего, а другой — прошлого, причем имеется в виду, что этот выбор может производиться непрерывным образом от события к событию по всему пространству-времени.

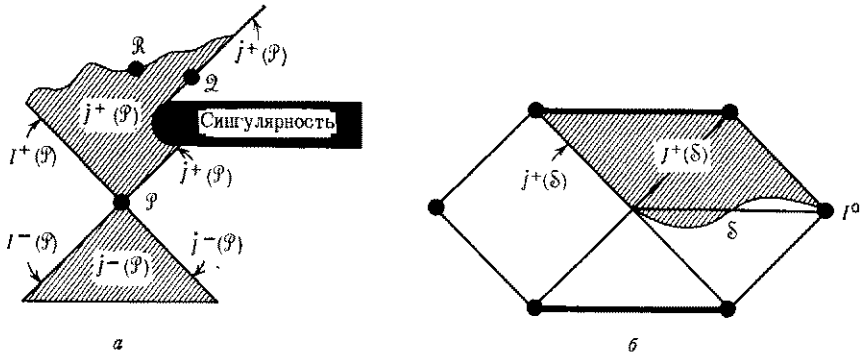
Ограничение асимптотически плоскими, ориентированными во времени многообразиями

Начнем с определений различных причинных соотношений между событиями и областями пространства-времени (фиг. 34.5).

Определение некоторых понятий, связанных с причинностью

Определение: $\mathcal{P} \ll \mathcal{Q}$ или, что эквивалентно, $\mathcal{Q} \gg \mathcal{P}$ («событие $\mathcal{P}$ *предшествует* событию $\mathcal{Q}$»; «событие $\mathcal{Q}$ *следует за* событием $\mathcal{P}$») означает, что существует по крайней мере одна гладкая, направленная

[1]) Глобальным, но не полностью глобальным; «вселенная», о которой идет речь в § 34.3—34.5, является асимптотически плоской; возможная замкнутость или же коллапс вселенной, а также следствия из этого здесь не рассматриваются.



ФИГ. 34.5.
Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие различные причинные соотношения: *а* — гипотетическое пространство-время; *б* — шварцшильдовское пространство-время (фиг. 34.3). На обеих диаграммах нулевые линии имеют наклон 45°.

Замечания: *а*: $\mathcal{P} \prec \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \not\prec \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \ll \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \not\ll \mathcal{Q}$, но $\mathcal{Q} \in \dot{J}^+(\mathcal{P})$.

б: $\mathcal{S}$ — пространственноподобное сечение, которое простирается от I^0 к $r = 2M$, но не включает $r = 2M$. $J^+(\mathcal{S})$ не включает крайний слева горизонт, но $\dot{J}^+(\mathcal{S})$ есть крайний слева горизонт.

в будущее времениподобная кривая, которая простирается от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{Q}$.

Определение: *причинной кривой* $\mathcal{C}(\lambda)$ называется любая кривая, которая нигде не является пространственноподобной, т. е. которая является либо времениподобной, либо нулевой, либо «нулем» (т. е. $\mathcal{C}(\lambda)$ равно некоторому фиксированному $\mathcal{P}$ для всех λ), либо некоторой их комбинацией.

Определение: $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ или, что эквивалентно, $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$ («событие $\mathcal{P}$ *причинно предшествует* событию $\mathcal{Q}$»; событие $\mathcal{Q}$ *причинно следует за* событием $\mathcal{P}$) означает, что существует по крайней мере одна направленная в будущее причинная кривая, которая простирается от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{Q}$.

Определение: $J^-(\mathcal{P})$, называемое *причинным прошлым* $\mathcal{P}$, есть множество всех событий, которые причинно предшествуют $\mathcal{P}$, т. е. $J^-(\mathcal{P}) = \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \prec \mathcal{P}\}$.

Определение: $J^+(\mathcal{P})$, называемое *причинным будущим* $\mathcal{P}$, есть множество всех событий, которые причинно следуют за $\mathcal{P}$, т. е. $J^+(\mathcal{P}) = \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \succ \mathcal{P}\}$.

Определение: если $\mathcal{S}$ является областью пространства-времени, например сегментом пространственноподобной гиперповерхности, тогда $J^-(\mathcal{S})$ (*причинное*

прошлое $\mathcal{S}$) есть множество всех событий, которые причинно предшествуют по крайней мере одному событию в $\mathcal{S}$, т. е.

$$J^-(\mathcal{S}) = \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \prec \mathcal{P} \text{ по крайней мере для одного } \mathcal{P} \in \mathcal{S}\}.$$

Определение: аналогично $J^+(\mathcal{S})$ (*причинное будущее* $\mathcal{S}$) есть множество событий, которые причинно следуют по крайней мере за одним событием в $\mathcal{S}$, т. е.

$$J^+(\mathcal{S}) = \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \succ \mathcal{P} \text{ по крайней мере для одного } \mathcal{P} \in \mathcal{S}\}.$$

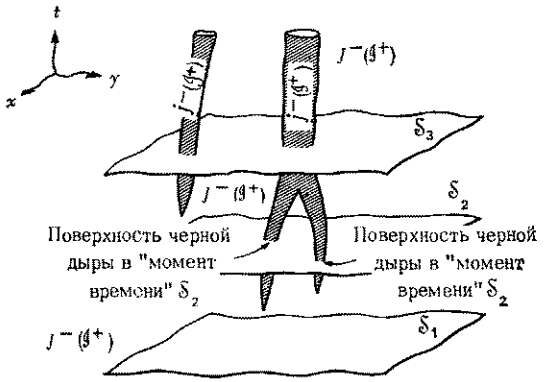
Определение: $\dot{J}^+(\mathcal{S})$ есть *граница* $J^+(\mathcal{S})$, $\dot{J}^-(\mathcal{S})$ есть граница $J^-(\mathcal{S})$.

Определение: *будущее* $\mathcal{P}$, $I^+(\mathcal{P})$, *прошлое* $\mathcal{P}$, $I^-(\mathcal{P})$, *будущее* $\mathcal{S}$, $I^+(\mathcal{S})$, *прошлое* $\mathcal{S}$, $I^-(\mathcal{S})$, *граница будущего* $\mathcal{S}$, $\dot{I}^+(\mathcal{S})$ и *граница прошлого* $\mathcal{S}$, $\dot{I}^-(\mathcal{S})$ определяются точно так же, как и выше, но выражение «причинно предшествует» заменяется на «предшествует», а выражение «причинно следует» — на «следует». Пример:

$$I^+(\mathcal{S}) = \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \gg \mathcal{P} \text{ по крайней мере для одного } \mathcal{P} \in \mathcal{S}\}.$$

Не все эти определения понадобятся ниже, но в литературе по глобальным методам эти понятия используются столь широко, что читатель должен быть с ними знаком.

Сконцентрируем внимание на конкретном пространственно-временном многообразии и выберем в нем конкретную асимптотически плоскую область. [Во внешнем поле звезды существует только одна асимптотически плоская область. В геометрии Шварцшильда для вакуума, когда источник отсутствует (фиг. 34.3), имеются две такие области. В геометрии Рейснера — Нордстрема в отсутствии источника (фиг. 34.4) существует бесконечно много отдельных асимптотически плоских областей.] Выбранная асимптотически плоская область («внешняя вселенная») имеет одну времениподобную бесконечность будущего I^+, одну времениподобную бесконечность прошлого I^-, одну пространственноподобную бесконечность I^0, одну нулевую бесконечность будущего $\mathcal{J}^+$ и одну нулевую бесконечность прошлого $\mathcal{J}^-$. Эта область может также содержать черные дыры, которые образуются в результате коллапса звезд и которые сталкиваются, сливаются друг с другом, аккрецируют вещество и вообще приводят к ужасному опустошению в непосредственной окрестности. Поверхности всех черных дыр («горизонты будущего») отделяют внешнюю вселенную, из которой могут быть посланы сигналы к $\mathcal{J}^+$, от внутренних областей черных дыр, из которых таких сигналов послать нельзя. Таким образом, имеем следующее определение:



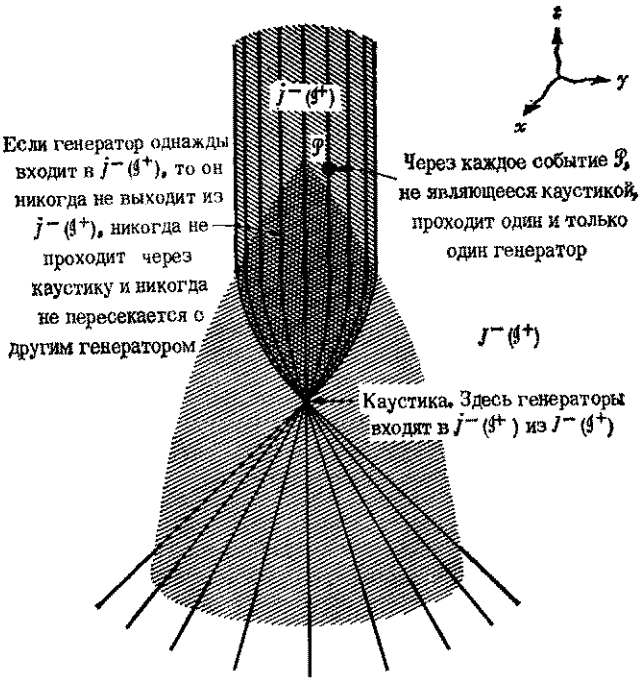
ФИГ. 34.6.
Черные дыры в асимптотически плоском пространстве-времени (схематическая пространственно-временная диаграмма). $\mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$ —«внешняя вселенная», т. е. область, которая может посылать причинные кривые на нулевую бесконечность будущего. $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ (заштрихованная) — граница «внешней вселенной», т. е. объединение всех горизонтов будущего. В «момент времени», соответствующий пространственноподобному сечению $\mathcal{S}_1$, во вселенной нет ни одной черной дыры. В промежутке между $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ две звезды коллапсируют с образованием черных дыр. Две замкнутые 2-поверхности, вдоль которых $\mathcal{S}_2$ пересекает $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, являются горизонтами этих черных дыр в «момент времени» $\mathcal{S}_2$. В промежутке между $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ две первоначальные черные дыры сталкиваются и сливаются, а также в ходе коллапса звезды образуется третья черная дыра.

Определение: поверхности черных дыр; горизонты будущего — $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$

Определение: *Совокупность* (или «*объединение*») *всех горизонтов будущего* (поверхностей черных дыр) является областью $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, т. е. границей всей области $J^-(\mathcal{J}^+)$, из которой могут быть посланы направленные в будущее причинные кривые к нулевой бесконечности будущего.

[Аналогично можно определить совокупность всех горизонтов прошлого как $\dot{J}^+(\mathcal{J}^-)$. Но горизонты прошлого не столь интересны для астрофизики. В то время как гравитационный коллапс приводит к образованию горизонтов будущего совершенно естественным образом, горизонты прошлого должны существовать с самого начала, т. е. они должны быть постулированы как начальная структура при возникновении вселенной [189, 190]. Нет убедительных причин верить, что вселенная начинается или должна начинаться с такой странной начальной структуры.]

Любое наперед заданное пространственноподобное сечение $\mathcal{S}$ пространства-времени будет пересекать $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ по некоторому числу не связанных друг с другом замкнутых двумерных поверхностей. Каждая такая 2-поверхность является горизонтом отдельной черной дыры в «момент времени» $\mathcal{S}$ (фиг. 34.6).



ФИГ. 34.7.
Горизонт будущего $J^-(\mathcal{J}^+)$, который образуется в результате сферического гравитационного коллапса звезды. Этот горизонт иллюстрирует глобальную геометрическую структуру $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, которая разбирается в теореме Пенроуза (§ 34.4). В этом частном случае имеется лишь одна каустика, в общем случае много.

§ 34.4. ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ГОРИЗОНТОВ

Как будет показано ниже, глобальная геометрическая структура объединения всех горизонтов будущего $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ обладает особенной простотой.

Теорема Пенроуза о структуре $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ (горизонтов будущего)

Теорема [180]: $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ *генерируется нулевыми геодезическими, у которых в будущем нет граничных точек.* Более точная формулировка (фиг. 34.7) такова:

1. Определение: *генераторы* $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ представляют собой нулевые геодезические, которые (по крайней мере для некоторого конечного интервала аффинного параметра) лежат в $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$.
2. Теорема: если проследить за генератором в прошлое, то он может (но не должен!) выходить из $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$. Каждое такое событие, при котором генератор выходит из $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, называется

каустикой $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$. Когда генератор выходит из $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, он попадает в $J^-(\mathscr{J}^+)$.

3. Если генератор, прослеженный в будущее, входит в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ из $J^-(\mathscr{J}^+)$ в каустике, то он уже никогда после этого не выйдет из $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ и не сможет пересечься с другим генератором. [Генераторы могут пересекаться только в «каустиках», где они входят в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$.]

4. Через каждое событие в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, не являющееся каустикой, проходит один и только один генератор (если отвлечься от неоднозначности, связанной с нормировкой аффинного параметра).

Доказательство этой теоремы дано в дополнении 34.1.

В случае шварцшильдовской черной дыры генераторами $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ являются мировые линии фотонов на гравитационном радиусе, движение которых радиально и направлено наружу ($r = 2M$, θ и ϕ постоянны, $u = +v$; пунктирная линия на горизонте на фиг. 32.1, *в*).

В случае черной дыры Керра — Ньюмана генераторами $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ являются закрученные нулевые геодезические, приведенные в дополнении 33.2, т. е. они являются теми элементами главной расширяющейся нулевой конгруэнции, которые лежат на горизонте, $r = r_+$ (§ 33.6, упражнение 33.9). Но теорема является более общей. Она относится к любой черной дыре в ориентированном во времени асимптотически плоском пространстве-времени — динамической или статической, аккрецирующей вещество, сливающейся с соседней черной дырой или одиночной, существующей в изоляции.

Дополнение 34.1. ГОРИЗОНТЫ ГЕНЕРИРУЮТСЯ НУЛЕВЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ, НЕ ИМЕЮЩИМИ КОНЦА [180]

А. *Лемма.* Если 1) $\mathscr{C}_1(\lambda)$ есть причинная кривая, направленная в будущее от события $\mathscr{P}$ к событию $\mathscr{Q}$, 2) $\mathscr{C}_2(\lambda)$ есть причинная кривая, направленная в будущее от события $\mathscr{Q}$ к событию $\mathscr{R}$, и 3) $\mathscr{P} \not\ll \mathscr{R}$ ($\mathscr{P}$ не принадлежит прошлому события $\mathscr{R}$), то $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ являются нулевыми геодезическими, а их касательные векторы в событии $\mathscr{Q}$ совпадают друг с другом (с точностью до нормировки).

Доказательство [1]):

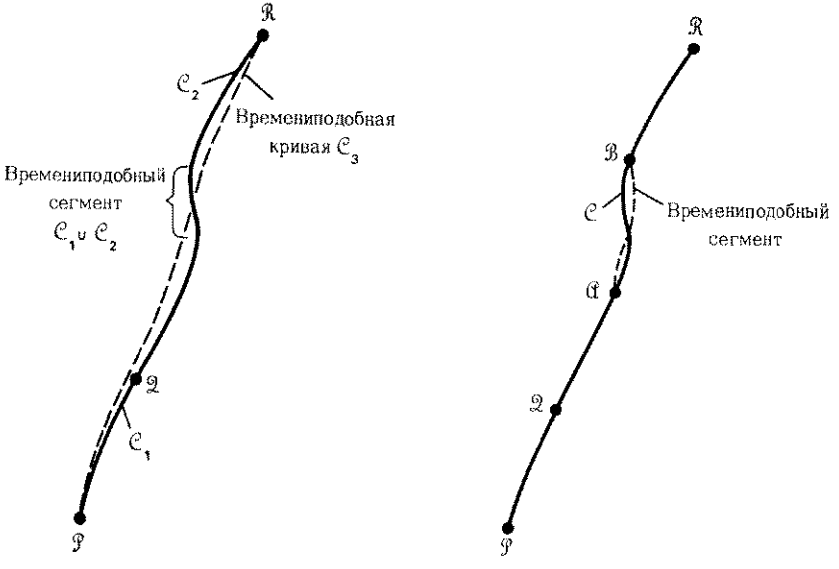
1. Предположим, что $\mathscr{C}_1$ или $\mathscr{C}_2$ не является нулевой геодезической или они обе не являются нулевыми геодезическими. В таком случае где-то на $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ должен существовать времениподобный сегмент или негеодезический нулевой сегмент или и то и другое сразу.

---

[1]) При доказательстве используются некоторые элементарные понятия из топологии точечных множеств; см., например, [191, 192].

а. Если бы $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ содержало времениподобный сегмент, то, слегка деформировав $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ [1]), можно было бы получить гладкую кривую $\mathscr{C}_3$, соединяющую $\mathscr{P}$ и $\mathscr{R}$, которая повсюду времениподобна [2]), а это противоречит предположению, что $\mathscr{P} \not\ll \mathscr{R}$.

б. Если бы $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ содержало негеодезический нулевой сегмент $\mathscr{C}$, простирающийся от события $\mathscr{A}$ до события $\mathscr{B}$, то протяженность кривой $\mathscr{C}$, если

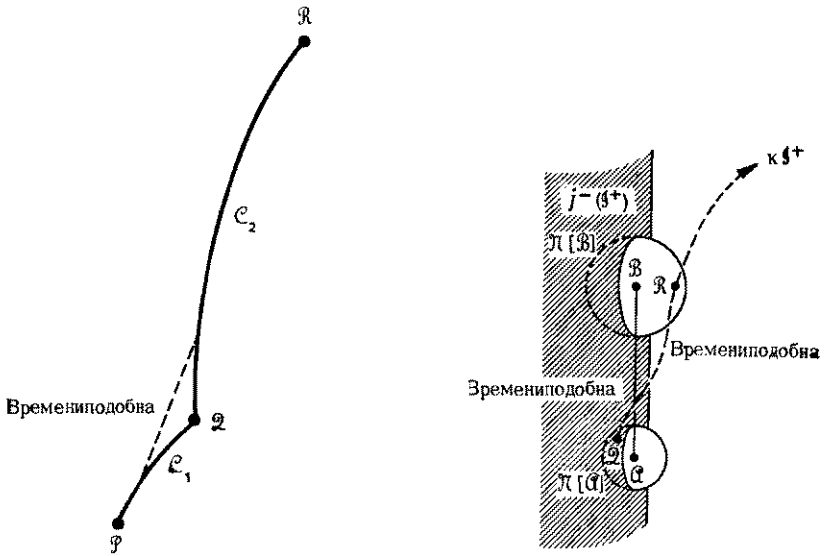


ее сравнить с соседними кривыми, не обладала бы свойством экстремальности. Это означает, что некоторые кривые, соединяющие $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, имели бы квадрат протяженности больше, чем у $\mathscr{C}$, т. е. они являлись бы пространственноподобными, в то время как другие кривые имели бы квадрат протяженности меньший, чем у $\mathscr{C}$, т. е. являлись бы времениподобными. Таким образом, слегка изменив $\mathscr{C}$, мы получим времениподобный сегмент от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Тогда последующая деформация $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$, описанная выше, привела бы к гладкой времениподобной кривой от $\mathscr{P}$ до $\mathscr{R}$, что находилось бы в противоречии с тем, что $\mathscr{P} \not\ll \mathscr{R}$. Таким образом, предположение является неправильным, т. е. $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ должны быть нулевыми геодезическими.

[1]) Любую кривую в любом пространственно-временном многообразии всегда можно немного сместить в произвольном направлении так, чтобы не наткнуться на сингулярность или на какую-нибудь другую границу многообразия. Это возможно, поскольку по определению многообразие является открытым. Физически пространство-время является открытым, поскольку каждому событию в пространстве-времени принадлежит своя локально лоренцева окрестность, которая также принадлежит пространству-времени.

[2]) В справедливости этого, а также других подобных утверждений, которые встретятся в дальнейшем при доказательстве, можно убедиться, используя понятие локально лоренцевых систем отсчета. В литературе по глобальной геометрии утверждения, подобные этому, чаще всего приводятся без доказательства, хотя всегда можно провести такое доказательство, если какой-то скептик этого потребует. К сожалению, обоснование таких утверждений с помощью строгих доказательств невероятно удлинило бы и усложнило обсуждение, затемняя тем самым простоту основных идей.

2. Предположим, что векторы, касательные к $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$, не совпадают в точке стыковки этих кривых $\mathscr{Q}$. Тогда мы могли бы «срезать угол» в $\mathscr{Q}$, получив тем самым в этом месте времениподобный сегмент. Затем можно было бы, изменив $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$, как это делалось выше, получить гладкую времениподобную кривую от $\mathscr{P}$ до $\mathscr{R}$ и прийти к противоречию с тем, что $\mathscr{P} \not\ll \mathscr{R}$. Таким



образом, и это предположение является неправильным, т.е. касательные векторы совпадают друг с другом в $\mathscr{Q}$. Что и требовалось доказать.

Б. *Лемма.* Если $\mathscr{A} \in \dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ и $\mathscr{B} \in \dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$, то $\mathscr{A} \not\ll \mathscr{B}$.

Доказательство. Допустим, что $\mathscr{A} \ll \mathscr{B}$,

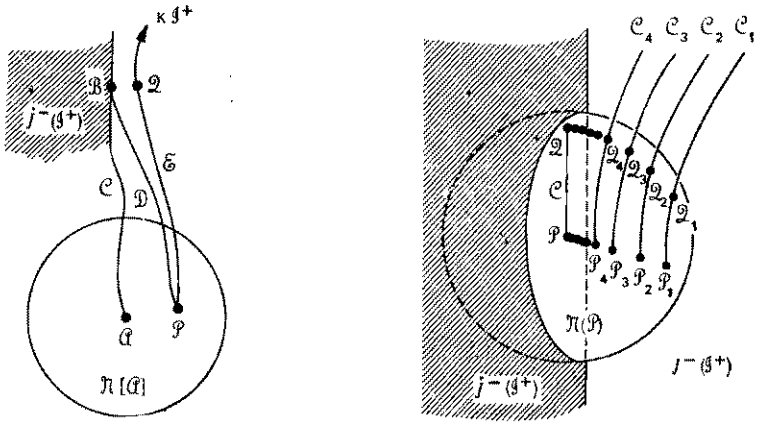
1. Тогда между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ существует времениподобная кривая.
2. Малая деформация этой кривой, при которой кривая все еще остается времениподобной, приведет к тому, что кривая будет связывать событие $\mathscr{Q}$ в некоторой достаточно малой окрестности $\mathscr{N}'[\mathscr{A}]$ с произвольным событием $\mathscr{R}$ в некоторой малой $\mathscr{N}'[\mathscr{B}]$.
3. Выберем $\mathscr{R}$, лежащее в $J^-(\mathscr{I}^+)$. Затем соединим времениподобную кривую, простирающуюся от $\mathscr{Q}$ до $\mathscr{R}$, с причинной кривой, простирающейся от $\mathscr{R}$ до $\mathscr{I}^+$. Результирующая кривая, если ее сгладить в точке стыковки, становится причинной кривой, простирающейся от произвольного $\mathscr{Q} \in \mathscr{N}'[\mathscr{A}]$ до $\mathscr{I}^+$.
4. Существование таких кривых подразумевает, что $\mathscr{N}'[\mathscr{A}] \subset J^-(\mathscr{I}^+)$, следовательно, $\mathscr{A} \notin \dot{J}(\mathscr{I}^+)$, что противоречит первоначальному предположению.

Вывод: $\mathscr{A} \not\ll \mathscr{B}$. Что и требовалось доказать.

В. *Лемма.* Пусть $\mathscr{C}(\lambda)$ — причинная кривая, пересекающая $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ в некотором событии $\mathscr{B}$. Тогда, если проследить за $\mathscr{C}(\lambda)$ от $\mathscr{B}$ в прошлое, то она всегда лежит в $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+) \cup J^-(\mathscr{I}^+)$.

Доказательство.

1. Выберем произвольное событие $\mathscr{A}$ на $\mathscr{C}(\lambda)$ так, чтобы $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$.
2. Построим произвольную малую окрестность $\mathscr{N}[\mathscr{A}]$.
3. Малая деформация кривой $\mathscr{C}$ между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ приводит к времениподобной кривой $\mathscr{D}$, которая проходит от события $\mathscr{P} \in \mathscr{N}[\mathscr{A}]$ до $\mathscr{B}$.
4. Поскольку $\mathscr{B} \in \dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, то в результате малой деформации $\mathscr{D}$, оставляющей ее все еще времениподобной, получается кривая $\mathscr{E}$, проходящая от $\mathscr{P}$ до некоторого события $\mathscr{Q} \in J^-(\mathscr{J}^+)$. После этого $\mathscr{E}$ может быть продолжена, оставаясь при этом причинной, вплоть до $\mathscr{J}^+$. В результате получается причинная кривая от $\mathscr{P}$ до $\mathscr{J}^+$. Следовательно, $\mathscr{P} \in J^-(\mathscr{J}^+)$.



5. Но $\mathscr{P}$ находилась в произвольной малой окрестности $\mathscr{N}[\mathscr{A}]$, следовательно, $\mathscr{A}$ должно также находиться в $J^-(\mathscr{J}^+)$ или же на границе этой области, т.е. на $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$. Что и требовалось доказать.

Г. *Теорема* [180]. $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ образуется нулевыми геодезическими, которые в будущем не имеют концевых точек (см. § 34.4, где дана более детальная формулировка теоремы).

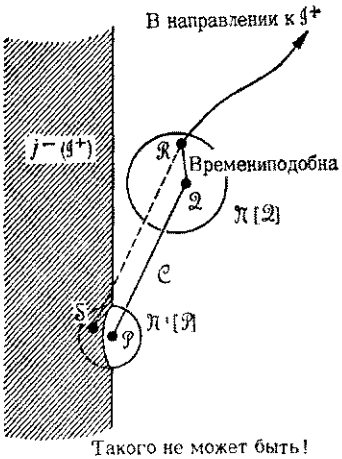
Доказательство.

1. Выберем произвольное событие $\mathscr{P}$ в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$. Докажем, что через $\mathscr{P}$ проходит нулевая геодезическая, направленная в будущее и лежащая в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$; доказательство проводится следующим образом:
   а. Построим произвольную окрестность $\mathscr{N}[\mathscr{P}]$. (Если $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ натыкается где-нибудь на сингулярность пространства-времени, то $\mathscr{N}[\mathscr{P}]$ должна быть выбрана настолько малой, чтобы сингулярность оставалась вне этой окрестности.)
   б. Построим в $\mathscr{N}[\mathscr{P}] \cap J^-(\mathscr{J}^+)$ последовательность событий $\{\mathscr{P}_i\}$, которая сходится к событию $\mathscr{P}$.
   в. Для каждого i построим причинную кривую $\mathscr{C}_i$, простирающуюся от $\mathscr{P}_i$ до $\mathscr{J}^+$.
   г. Пусть $\mathscr{Q}_i$ является пересечением $\mathscr{C}_i$ с $\dot{\mathscr{N}}[\mathscr{P}]$, т.е. с границей $\mathscr{N}[\mathscr{P}]$. Пос-

кольку $\dot{J}^+[\mathcal{P}]$ есть компактное множество, последовательность $\mathcal{Q}_i$ должна иметь предельную точку $\mathcal{Q}$.

д. Поскольку существуют причинные кривые от событий $\mathcal{P}_i$, сколь угодно близких к $\mathcal{P}$, до событий $\mathcal{Q}_i$, сколь угодно близких к $\mathcal{Q}$, то должна существовать причинная кривая от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{Q}$. Назовем эту кривую $\mathcal{C}$.

е. Поскольку $\mathcal{Q}$ есть предельная точка последовательности событий в $J^-(\mathcal{J}^+)$, то $\mathcal{Q}$ лежит либо в $J^-(\mathcal{J}^+)$, либо на ее границе $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, либо в $J^-(\mathcal{J}^+)$ и $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ одновременно. Предположим, что $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$.



1) Тогда некоторая малая окрестность $\mathcal{N}[\mathcal{Q}]$ целиком содержится в $J^-(\mathcal{J}^+)$.
2) Построим причинную кривую от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{J}^+$, идя от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{Q}$ вдоль причинной кривой $\mathcal{C}$, затем от $\mathcal{Q}$ вдоль времениподобной кривой к некоторому событию $\mathcal{R} \in \mathcal{N}[\mathcal{Q}]$ и затем от $\mathcal{R}$ до $\mathcal{J}^+$ вдоль некоторой причинной кривой и производя сглаживание кривых в точках стыковки $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$.
3) Поскольку эта кривая от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{J}^+$ имеет времениподобный сегмент, ее можно слегка сместить, оставляя при этом причинной, так, чтобы она достигла любого наперед заданного события $\mathcal{S}$ в некоторой малой окрестности $\mathcal{N}'[\mathcal{P}]$. Но это означает, что $\mathcal{N}'[\mathcal{P}] \subset J^-(\mathcal{J}^+)$, следовательно, $\mathcal{P} \notin \dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, что противоречит первоначальному определению $\mathcal{P}$.

Вывод: $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$.

ж. Согласно лемме Б, поскольку $\mathcal{P} \in \dot{J}(\mathcal{J}^+)$ и $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, то $\mathcal{P} \notin \mathcal{Q}$. Но $\mathcal{C}$ есть направленная в будущее причинная кривая от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{Q}$. Следовательно, по лемме А, $\mathcal{C}$ является нулевой геодезической.

з. Поскольку кривая $\mathcal{C}$ пересекает $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ в $\mathcal{Q}$, повсюду между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ она должна лежать в $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+) \cup J^-(\mathcal{J}^+)$ (лемма В). Заменив $\mathcal{Q}$ на произвольную точку, лежащую на кривой $\mathcal{C}$ между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, применим к этой точке рассуждения, приведенные выше в пункте «е». Тем самым приходим к выводу, что всюду между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ $\mathcal{C}$ лежит в $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$.

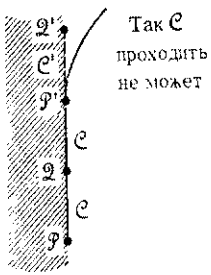
Резюме. Через каждое событие $\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ проходит нулевая геодезическая $\mathcal{C}$, которая, если проследить за ней от $\mathcal{P}$ в будущее, лежит в $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$. Эта нулевая геодезическая называется «генератором» $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$.

2. Продолжим генератор $\mathcal{C}$ от $\mathcal{P}$ до $\mathcal{Q}$ и затем еще дальше вперед. Может ли он *когда-нибудь* выйти из $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$? Нет! Для доказательства предположим, что $\mathcal{C}$ выходит из $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ в некотором событии $\mathcal{P}' \in \dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$.

а. Чтобы прийти к выводу о том, что существует нулевая геодезическая $\mathscr{C}' \subset \dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, простирающаяся в причинное будущее от $\mathscr{P}'$ до некоторого события $\mathscr{Q}'$, полностью повторим все построение первого этапа доказательства, заменив $\mathscr{P}$ событием $\mathscr{P}'$.

б. Поскольку $\mathscr{P}' \in \dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ и $\mathscr{Q}' \in \dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, то, согласно лемме Б, $\mathscr{P} \not\ll \mathscr{Q}'$.

в. Тогда, согласно лемме А, нулевая геодезическая $\mathscr{C}$ от $\mathscr{P}$ до $\mathscr{P}'$ и нулевая геодезическая $\mathscr{C}'$ от $\mathscr{P}'$ до $\mathscr{Q}'$ имеют совпадающие в $\mathscr{P}'$ касательные векторы (с точностью до нормировки). В таком случае, если перенормировать аффинный параметр, $\mathscr{C}'$ становится продолжением $\mathscr{C}$, а это означает, что $\mathscr{C}$ не выходит из $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ в $\mathscr{P}'$.



Вывод. Если генератор входит в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, то прослеженный в будущее, он уже никогда не выйдет из $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$.

3. На фиг. 34.7 дан пример того, как нулевая геодезическая, прослеженная в будущее, может войти в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ и стать генератором. Лемма В гарантирует, что *если нулевая геодезическая входит в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, то она выходит из $J^-(\mathscr{J}^+)$.*

4. Как видно из примера на фиг. 34.7, в «каустике» [т.е. в точке, где генераторы входят в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$] генераторы могут пересекаться друг с другом. Проследим за генератором $\mathscr{C}$ в причинное будущее от точки, где он входит в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$. Может ли он когда-нибудь вновь пересечься с другим генератором? Нет. Для доказательства предположим, что в событии $\mathscr{P}$ генератор $\mathscr{C}$ пересекает другой генератор $\mathscr{D}$.

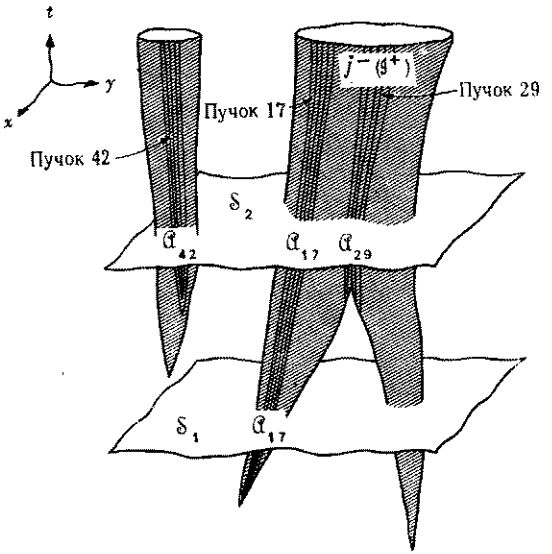
а. В причинном будущем относительно $\mathscr{P}$ оба генератора всегда лежат в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$. Таким образом, события $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, изображенные на рисунке, лежат в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$.

б. Поскольку $\mathscr{P}$ находится в причинном будущем по отношению к каустике, где $\mathscr{C}$ входит в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, то существует событие $\mathscr{Q} \in \dot{J}^-(\mathscr{J}^+) \cap \mathscr{C}$, расположенное в причинном прошлом относительно $\mathscr{P}$.

в. Поскольку $\mathscr{Q} \in J^-(\mathscr{J}^+)$ и $\mathscr{B} \in J^-(\mathscr{J}^+)$, то $\mathscr{Q} \not\ll \mathscr{B}$ (лемма Б).

г. Лемма А, примененная к кривой $\mathscr{C}$, простирающейся от $\mathscr{Q}$ до $\mathscr{P}$, и к кривой $\mathscr{D}$, простирающейся от $\mathscr{P}$ до $\mathscr{B}$, гарантирует, что касательные векторы $\mathbf{u}_{\mathscr{C}}$ и $\mathbf{u}_{\mathscr{D}}$ в $\mathscr{P}$ совпадают друг с другом (с точностью до нормировки) и что поэтому (с точностью до нормировки) геодезические $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ тождественны. Это противоречит предположению, что $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ суть отличные друг от друга генераторы, которые пересекаются в $\mathscr{P}$.

Вывод. Если генератор однажды вошел в $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, то он уже никогда после этого не пересечется ни с каким другим генератором.



ФИГ. 34.8.
Схематическая пространственно-временная диаграмма, которая используется при доказательстве второго закона динамики черных дыр. Детали доказательства см. в тексте; физическое истолкование диаграммы см. на фиг. 34.6.

§ 34.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВТОРОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР [103, 104, 182]

Теперь мы располагаем всем необходимым аппаратом для доказательства второго закона динамики черных дыр.

Доказательство второго закона динамики черных дыр

Рассмотрим объединение всех горизонтов будущего $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ в асимптотически плоском пространстве-времени, как это изображено на фиг. 34.8. Разделим нулевые геодезические, являющиеся генераторами $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$, на большое число бесконечно тонких пучков и, чтобы различать эти пучки, припишем каждому из них целое число K. Если мы движемся вдоль $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ в направлении от прошлого к будущему, то время от времени мы видим, что в «каустиках» на 3-поверхности $\dot{J}^-(\mathscr{J}^+)$ образуются новые пучки генераторов. Каустические источники новых генераторов образуются в результате таких процессов, как падение вещества под горизонт (например, пучок 42 на фиг. 34.8), столкновение и слияние двух черных дыр (например, пучок 29). Но каждый пучок, если он однажды возник, уже никогда не исчезнет (нулевые генераторы, если двигаться от прошлого к будущему, не имеют конца).

Сконцентрируем внимание на конкретном пучке генераторов, а именно на пучке K. Пусть в некотором событии $\mathscr{P}$, лежащем

на этом пучке, различные наблюдатели, движущиеся с разными скоростями, измеряют площадь (двумерного) поперечного сечения этого пучка $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$. Как показано на фиг. 22.1 (упражнения 22.13 и 22.14), 1) площадь поперечного сечения $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ не зависит от скорости наблюдателя, измеряющего эту площадь, т. е. $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ зависит лишь от положения $\mathcal{P}$ на пучке, и 2) $\mathcal{A}_K$ изменяется вдоль пучка от события к событию таким образом, что это изменение подчиняется «теореме о фокусировке»:

$$\frac{d^2\mathcal{A}_K^{1/2}}{d\lambda_K^2} \leqslant 0 \quad \text{если плотность энергии } T_{\hat{0}\hat{0}} \text{ по измерениям всех наблюдателей, расположенных вдоль пучка, является неотрицательной.} \tag{34.6}$$

Здесь λ_K — аффинный параметр вдоль пучка. *Предположим*, в согласии со всем накопленным физическим опытом и наиболее надежными оценками современной физики, *что плотность энергии* $T_{\hat{0}\hat{0}}$ *никогда не может быть отрицательной.* (*Это предположение лежит в основе второго закона динамики черных дыр. Если когда-нибудь окажется, что это предположение несправедливо, то нам придется отказаться от второго закона.* [1])

При доказательстве принимается, что плотность энергии неотрицательна

Допустим, что в некотором событии $\mathcal{P}$ на пучке $d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K$ отрицательно. Тогда, согласно теореме о фокусировке, $d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K$ всегда оставалось бы отрицательным и по крайней мере таким же по величине, как в $\mathcal{P}$, и, следовательно, через промежуток аффинного параметра, который дается неравенством

$$\Delta\lambda_K \leqslant \left(\frac{\mathcal{A}_K^{1/2}}{-d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K}\right)_{\text{в } \mathcal{P}}, \tag{34.7}$$

$\mathcal{A}_K^{1/2}$ обратилось бы в нуль. В точке, где $\mathcal{A}_K^{1/2}$ обращается в нуль, близлежащие нулевые геодезические в пучке пересекаются друг с другом, в результате чего в $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ возникают события, через которые проходит более чем один нулевой генератор. Но это нарушает теорему Пенроуза о глобальной структуре горизонтов (§ 34.4).

Таким образом, либо предположение об отрицательности $d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K$ неверно, либо $d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K$ действительно становится отрицательным, но прежде, чем генераторы могут пересечься [прежде, чем аффинный параметр успеет измениться на конечный промежуток (34.7)], они попадают в сингулярность и заканчивают свое существование. *Чтобы доказать второй закон динамики черных дыр, необходимо допустить, что никакой сингулярности,*

При доказательстве предполагается, что горизонт никогда не попадает в сингулярность (не существует «голых сингулярностей»)

[1]) Зельдович [502] подчеркивает, что в квантовых процессах, приводящих к поляризации вакуума и рождению частиц в сильных гравитационных полях, условие: «$T_{00} > 0$ для всех наблюдателей» нарушается. Это, действительно, ведет, как показал Хоукинг [505], к нарушению второго закона динамики черных дыр. См. примечание на стр. 153.— *Прим. ред.*

на которую может натолкнуться горизонт, не существует, из чего делается вывод, что $d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K$ *никогда не становится отрицательным. Хоукинг* [103, 104] *делает другое предположение, из которого также вытекает, что* $d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K \geqslant 0$. *Он предполагает, что пространство-время является «асимптотически предсказуемым в будущем». В сущности, это означает, что в пространстве-времени нет «голых сингулярностей», т. е. сингулярностей, которые были бы видны из* $\mathcal{J}^+$. (Голые сингулярности могли бы влиять на эволюцию внешней вселенной; поэтому, поскольку нам неизвестны физические законы, которым подчиняются сингулярности, такие сингулярности помешали бы нам предсказывать будущее во внешней вселенной.)

Как при том, так и при другом допущении (не существует голых сингулярностей или горизонт никогда не наталкивается на сингулярность) мы приходим к выводу, что

$$d\mathcal{A}_K^{1/2}/d\lambda_K \text{ неотрицательно всюду вдоль пучка } K. \quad (34.8)$$

Этот результат показывает, что если мы движемся вдоль $\dot{J}^-(\mathcal{J})$ от прошлого к будущему, то площадь поперечного сечения каждого пучка $\mathcal{A}_K$ никогда не может уменьшаться. Поскольку могут возникать новые пучки, но старые никогда не могут уничтожаться, если двигаться от прошлого к будущему, то *полная площадь поперечного сечения* $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ *не может уменьшаться в будущем*. Равным образом (фиг. 34.8), если $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — пространственноподобные гиперповерхности, причем $\mathcal{S}_2$ всюду расположена в будущем относительно $\mathcal{S}_1$, то площадь поперечного сечения $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ в пересечении с $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{A}(\mathcal{S}_2)$, не может быть меньше, чем площадь поперечного сечения в пересечении с $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$. Таким образом, второй закон динамики черных дыр, сформулированный на языке более точном, чем в гл. 33, окончательно доказан.

Точная формулировка второго закона

УПРАЖНЕНИЕ

34.4. Черная дыра никогда не может раздваиваться [104]

Приведите убедительные доводы в пользу следующей теоремы: независимо от того, как сильно воздействовать на черную дыру, и независимо от того, чем на нее воздействовать, мы никогда не сможем заставить одну черную дыру раздвоиться, чтобы получились две черные дыры. [*Указание.* Покажите на графиках, что в любой точке, где происходит раздваивание, некоторые нулевые геодезические, являющиеся генераторами $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, должны покидать $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$, если проследить за ними в *будущее*, нарушая тем самым теорему Пенроуза (§ 34.4). Предположите, что поверхность каждой дыры топологически подобна 2-сфере. *Замечание.* Аналогичное доказательство, если обратить всю картину во времени,

показывает, что если две черные дыры сливаются в одну, то генераторы входят в $\dot{J}^-$ ($\mathcal{J}^+$) из J^- ($\mathcal{J}^+$) в точке слияния, и площадь поверхности горизонта тем самым увеличивается.]

2 УПРАЖНЕНИЕ

§ 34.6. ТЕОРЕМЫ О СИНГУЛЯРНОСТЯХ И «ПРОБЛЕМА КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ»

Обзор теорем о сингулярностях

Глобальные методы столь же эффективны при исследовании пространственно-временны́х сингулярностей, как и при исследовании горизонтов. Фактически именно доказательство Пенроуза [69] первой теоремы о сингулярностях привело к рождению глобальных методов изучения пространства-времени.

Подробное введение в круг вопросов, связанных с глобальными исследованиями сингулярностей, дано в книге Хоукинга и Эллиса [108]. Поскольку читатель уже получил первое представление о глобальных методах, мы сконцентрируем здесь внимание на качественном описании результатов.

Как заканчивается гравитационный коллапс? Является ли сингулярность, которой заканчивается сферический коллапс, типичной или асимметрии могут устранить ее? Что сингулярности представляют собой весьма общее явление и что при всем желании от них невозможно избавиться, было известно уже начиная с 1965 г. благодаря теоремам о сингулярностях, доказанным Пенроузом, Хоукингом и Герочем. (Полный список литературы см. в работах [108, 193].)

Определение сингулярности

Прежде чем приступить к изучению теорем о сингулярностях, необходимо уточнить само понятие *сингулярность*. Это вовсе не простая задача, как подчеркивал Героч [194], рассматривая все возможные «патологии», которые могут встречаться в пространственно-временных многообразиях. Однако после энергичных усилий многих людей Шмидт [195], в конце концов, дал определение, которое представляется удовлетворительным. На интуитивном языке определение Шмидта, которое носит весьма специальный характер, звучит приблизительно так. Рассмотрим в пространственно-временном многообразии все пространственноподобные геодезические (пути «тахионов»), все нулевые геодезические (пути фотонов), все времениподобные геодезические (пути, по которым движутся свободно падающие наблюдатели) и, наконец, все времениподобные кривые с ограниченным вдоль этих кривых ускорением (пути, вдоль которых в принципе могут двигаться наблюдатели). Предположим, что одна из этих кривых обрывается через конечный интервал собственной длины (или аффинного параметра, если речь идет о нулевой геодезической). Предположим, далее, что продолжить пространственно-временное многообразие за эту конечную точку невозможно, например, потому, что там

кривизна бесконечна. Тогда такая конечная точка вместе со всеми близлежащими конечными точками называется «сингулярностью». (Что может быть более сингулярным, чем конец существования бедного тахиона, фотона или же наблюдателя, который движется вдоль обрывающейся кривой?)

Определение ловушечной поверхности

В теоремах о сингулярностях используется еще одно важное понятие — *ловушечная поверхность*. Это понятие, введенное Пенроузом [69], основано на детальном исследовании двумерных сферических поверхностей $(r,\ t) = \text{const}$, расположенных внутри горизонта в геометрии Шварцшильда. Эти поверхности указывают на близость сингулярности ($r = 0$) благодаря следующему их свойству: световые лучи, испущенные с одной из этих поверхностей наружу в направлении, перпендикулярном этой поверхности (т. е. выходящие ортогональные нулевые геодезические), по мере своего распространения сходятся друг с другом; то же самое можно сказать о «входящих» световых лучах, перпендикулярных этим 2-поверхностям. «Ловушечной поверхностью» Пенроуз называет любую замкнутую 2-поверхность независимо от того, является ли она сферической или нет, обладающую вышеуказанным свойством.

В случае пространства-времени Шварцшильда сходимость световых лучей, как выходящих, так и входящих, может быть приписана «сильному гравитационному притяжению», которое как бы засасывает фотоны в сингулярность. Из теоремы Хоукинга — Пенроуза [193] (наиболее сильной из всех теорем некоторого широкого класса; см. работу [193], где даются ссылки на другие теоремы, см. также дополнения 34.2 и 34.3, где читатель знакомится с Хоукингом и Пенроузом) следует справедливость такого утверждения и для асимметричных пространств-времен:

Теорема Хоукинга — Пенроуза о сингулярностях

Пространство-время M с необходимостью содержит неполные времениподобные или нулевые геодезические, которые невозможно продолжить (*и, следовательно, является сингулярным в смысле Шмидта*), *если кроме уравнений Эйнштейна выполняются следующие четыре условия*: 1) M не содержит ни одной замкнутой времениподобной кривой (разумное условие причинности); 2) для каждого события в M и для каждого единичного времениподобного вектора $\mathbf{u}$ тензор энергии-импульса удовлетворяет неравенству

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} T\right) u^\alpha u^\beta \geqslant 0$$

(разумное энергетическое условие); 3) многообразие является «общим» (т. е. не обладает слишком высокой симметрией) в том смысле, что любая времениподобная или нулевая геодезическая с единичным касательным вектором $\mathbf{u}$ проходит по крайней мере через одно событие, где кривизна не связана специальным образом с этой геодезической:

$u_{[\alpha} R_{\beta]\gamma\delta[\varepsilon} u_{\rho]} u^\gamma u^\delta \neq 0$ в некоторой точке на геодезической;

4) многообразие содержит ловушечную поверхность.

Все эти условия, за исключением ловушечной поверхности, представляются вполне приемлемыми для любого физически реального пространства-времени. Заметим в особенности, что энергетическое условие может нарушаться лишь в том случае, если полная плотность энергии E, измеренная некоторым локальным наблюдателем в своей системе отсчета, является отрицательной или если главные давления (собственные значения тензора энергии-импульса) P_l являются в такой мере отрицательными, что

$$\sum_l P_l < -E.$$

Теорема Хоукинга — Пенроуза и гравитационный коллапс

Применимость теоремы Хоукинга — Пенроуза для коллапса следует из того обстоятельства, что, как мы ожидаем, в общем случае всегда будут существовать ловушечные поверхности сразу же под горизонтами будущего $\dot{J}^-(J^+)$. (Исключения, такие, как метрика Керра с $a = M$, представляют собой, вероятно, «множество меры нуль».) Поскольку горизонты и связанные с ними ловушечные поверхности с необходимостью образуются в результате коллапса, мало отличающегося от сферического (дополнение 32.2), и поскольку, вероятно, то же можно сказать об умеренно искаженном коллапсе (§ 32.7), по-видимому, в результате такого коллапса возникают сингулярности или нарушение причинности, что также представляет собой сингулярное явление!

Если сингулярности действительно являются столь общей характерной особенностью коллапса, то точная природа сингулярности настолько важна, что для каждого, кто падает под горизонт, это вопрос жизни или смерти! Здесь все построено на песке. Хотя основные результаты и гипотезы, описанные выше в этом параграфе, вероятно, не утратят своего значения в ходе дальнейших исследований, наши взгляды на природу сингулярностей, по-видимому, изменятся еще много раз, прежде чем мы придем к полной ясности по этому вопросу. Следовательно, с полной уверенностью можно лишь описывать различные возможности, а не пытаться судить об их справедливости.

Природа сингулярности в конечной точке реального коллапса: 4 возможности

Возможность 1

Сингулярность, возникающая в конце реального коллапса, есть область бесконечных приливных гравитационных сил (бесконечной кривизны), которые сжимают коллапсирующее вещество до бесконечной плотности. Примеры: весьма специально подобранный случай однородного сжатия при сферическом коллапсе (§ 32.4), рассмотренный Оппенгеймером и Снайдером [196]; специально подобранное неоднородное, но сферическое сжатие, описанное Подурцем [197]; специально подобранное неоднородное сжатие «казнеровского типа», рассмотренное Лифшицем и Халатниковым [198, 199], и кроме того, наболее важный, очень общий тип сжатия «перемешанного мира» (гл. 30), открытый для однородного случая

Мизнером [200], а также Белинским и Халатниковым [201] и проанализированный для неоднородного случая Белинским и Халатниковым [202, 203] и Халатниковым и Лифшицем [204]. Сингулярности в перемешанном мире и только они среди всех известных в явном виде сингулярностей являются общими в следующем смысле: если на начальные условия, заданные для пространства-времени, эволюционирующего с образованием сингулярности в перемешанном мире, наложить слабые, но произвольные возмущения, то результирующее возмущенное пространство-время также будет эволюционировать с образованием сингулярности в перемешанном мире. Поэтому в настоящее время (1973 г.) преобладает мнение, что в результате реального коллапса внутри горизонта образуется сингулярность того же типа, что и в перемешанном мире. Но завтра это мнение может измениться.

Возможность 2

Сингулярность есть область пространства-времени, в которой времениподобные или нулевые геодезические обрываются, но это происходит не из-за бесконечных приливных гравитационных сил или же бесконечного сжатия, а вследствие других, более сложных патологий. Пример: «пространство Тауба — НУТ [1])» [205]. Другие примеры, построенные специально для демонстрации различных патологий, см. в работе [194].

Возможность 3

Сингулярность может быть настолько ограничена по «размеру» и по влиянию, что все или же бóльшая часть коллапсирующего вещества благополучно ее избегает. После этого вещество не может снова взорваться и попасть наружу, за горизонт, внутрь которого оно ушло; горизонт представляет собой мембрану, которую можно пересечь лишь в одном направлении — он запрещает чему бы то ни было возвращаться наружу. Вместо этого вещество может достичь состояния максимального, но конечного сжатия и затем вновь взорваться в некоторую другую область пространства-времени (многосвязная топология пространства-времени; «горловина»). Аналитические решения для коллапсирующих заряженных сфер указывают на вторичное расширение, происходящее именно так [185—188] (фиг. 34.4). При подобных процессах требуется, чтобы «взрывающийся» конец горловины вписывался в начальные условия вселенной с массой и угловым моментом (измеряемыми по кеплеровским орбитам и по увлечению систем отсчета), в точности равными соответственно массе и угловому моменту, которые

---

[1]) Пространство НУТ — пространство Ньюмана — Унти — Тамбурино.— *Прим. перев.*

вошли в горловину с того конца, где находится черная дыра. Физически это представляется невероятным. То же самое относится и к «взрыву наружу».

Другие возможности

Избавит ли Вселенную от сингулярности квантование пространства-времени?

Это различные комбинации указанных выше возможностей. Если сингулярности, как мы предполагаем в настоящее время, носят ярко выраженный физический характер и имеют бесконечную кривизну, то мы должны столкнуться с «проблемой конечного состояния», поставленной Уилером [206] в наиболее резкой и волнующей форме. Обращаясь к этой проблеме, Уилер утверждает, что сингулярности с бесконечной кривизной служат сигналом о нарушении справедливости классической общей теории относительности под натиском квантовых гравитационных эффектов (гл. 44). Избавится ли на самом деле пространство-время от сингулярностей благодаря квантованию гравитации или нет, этого мы не можем знать до тех пор, пока «общая теория относительности не вступит в законный брак с квантовой физикой» [206] (см. также [207] и последнюю часть дополнения 30.1) [1].

---

[1]) Одним из важнейших теоретических открытий последнего времени является открытие квантовых процессов во внешнем поле черных дыр. Зельдович [502] впервые отметил, что в метрике Керра вращающейся черной дыры должно происходить спонтанное рождение квантов. Этот процесс был подробно рассмотрен Старобинским [510]. Указанные авторы отметили, что вращающаяся черная дыра, имеющая угловую скорость Ω, рождает кванты частоты $\omega \approx \Omega$ и общая мощность излучения $dE/dt \approx \hbar\Omega^2$. Вращательная энергия черной дыры при этом уменьшается. Хоукинг [505] показал, что квантовый процесс рождения частиц происходит и в поле невращающейся черной дыры.

Этот важный принципиальный вывод был довольно неожиданным, ибо внешнее гравитационное поле черной дыры является не только стационарным (как у вращающейся черной дыры), но и статическим, и казалось бы не может производить кванты. Хоукинг показал, что невращающаяся черная дыра производит частицы точно так же, как черное тело, для которого $kT \approx \hbar c/4\pi r_g \approx \frac{1}{10}(10^{15}\text{г}/M)$ МэВ. Полная мощность излучения $dE/dt \approx \hbar c^2/r_g^2 \approx 10^{20}\,(10^{15}\text{г}/M)^2$ эрг/с и время существенного уменьшения массы $\tau \approx 10^{10}\,(M/10^{15}\text{ г})^3$ лет. Эти соотношения показывают, что квантовые процессы хотя с принципиальной точки зрения и важны, но практически совершенно пренебрежимы для черных дыр звездных масс (т. е. при $M \sim 10^{33}$—10^{34} г и более). Однако они существенны для первичных космологических черных дыр, могущих возникать на ранних стадиях расширения Вселенной. Так, черные дыры с массой меньше 10^{15} г имеют время жизни меньше, чем время расширения Вселенной ($\sim 10^{10}$ лет). Сейчас еще не ясно, будет ли «испаряющаяся» черная дыра исчезать полностью или процесс испарения прекратится при массе, скажем, порядка планковской. Обзор указанного круга вопросов см. в статье [506].— *Прим. ред.*

Дополнение 34.2. РОДЖЕР ПЕНРОУЗ, родился 8 августа 1931 г., Колчестер, Эссекс, Англия

Роджер Пенроуз начинал как специалист по алгебраической геометрии. Однако во время пребывания в Кембридже с 1952 по 1955 г. и вновь с 1957 по 1960 г. он заинтересовался благодаря Герману Бонди и Дэнису Шаме общей теорией относительности. Вследствие чисто математического образования его подход к предмету отличался от принятых до него. Он особенно интересовался глобальной, составленной из световых конусов структурой пространства-времени и уравнениями полей с нулевой массой покоя (и те и другие сохраняются при конформных преобразованиях). Он использовал эту конформную инвариантность, чтобы дать изящную и мощную трактовку гравитационного излучения с помощью нулевой поверхности $\mathscr{I}^+$ на бесконечности. Позднее этот интерес привел его к разработке теории твисторов, которые представляют собой спиноры, соответствующие конформной группе пространства Минковского, и предлагают новый и весьма многообещающий подход к квантованию пространства-времени.

Интерес к конформной геометрии привел его также к изучению свойств причинных связей между точками пространства-времени. Это в свою очередь привело его к теоремам о наличии сингулярностей в пространстве-времени, которые являются, вероятно, самыми важными предсказаниями общей теории относительности, поскольку они, по-видимому, подразумевают, что пространство-время обладает либо началом, либо концом.

«Если рассматривать пространство-время только с точки зрения его конформной структуры, то точки на бесконечности можно рассматривать наравне с обычными точками».

(Пенроуз в книге [208])

«Доказательство должно будет показать, что существование ловушечной поверхности подразумевает безотносительно к симметрии, что сингулярности обязательно возникают».

(Пенроуз [69])

«Обычно думают, что квантовые эффекты гравитации существенны лишь тогда, когда кривизна достигает 10^{33} см$^{-1}$, но вся наша локальная физика основана на группе Пуанкаре, являющейся хорошим приближением для локальной группы симметрии при размерах больше 10^{-13} см. Таким образом, если кривизна когда-либо хотя бы приблизится к 10^{13} см$^{-1}$, то скорее всего будут иметь место неожиданные локальные эффекты».

(Хоукинг и Пенроуз [193])

«*Таким образом, мы имеем дело, возможно, с самым фундаментальным нерешенным вопросом общерелятивистской теории коллапса, а именно: существует ли «космический цензор», запрещающий появление голых сингулярностей и облачающий каждую из них в абсолютный горизонт событий?*»

(Пенроуз [109])

«*При обычных условиях общая теория относительности может в практических целях оставаться в удалении — почти в отчуждении — от остальной физики. В пространственно-временной сингулярности, без сомнения, справедливо прямо противоположное!*»

«*Я не думаю, что можно когда-либо достичь действительного понимания природы элементарных частиц, не углубив одновременно наше представление о природе самого пространства-времени. Но если мы имеем дело с тем уровнем явлений, для которого подобное понимание не обязательно, — а это охватывает почти всю современную физику, — то картина непрерывного многообразия представляет собой (необоснованно!) прекрасную модель для рассмотрения этих явлений*».

«*Возможно, самый важный урок, который дает теория относительности, состоит в том, что пространство и время суть понятия, которые нельзя рассматривать независимо одно от другого, но необходимо соединять их вместе, чтобы получить четырехмерную картину явлений — описание в пространстве-времени*».

(Пенроуз [180])

«*Если формализм позволяет рассматривать мириады несуществующих типов вселенных, то (эффективно) он содержит «произвольные параметры», лишь специальные значения которых будут соответствовать миру, каким он является на самом деле. В обычном подходе к пространству-времени как к псевдориманову дифференцируемому многообразию размерность многообразия и сигнатура метрики представляют собой два таких параметра*».

«*Как только мы локализуем положение частицы, она по существу совершает скачок вдоль нулевого конуса. Появляются другие частицы, которые скачут взад и вперед по существу вдоль нулевых направлений, по-видимому, пренебрегая непрерывностью, учитывая только положения самих световых конусов и «топологию» лишь в том смысле, в каком этот термин применим к структуре графов*».

(Пенроуз [209])

«*По моему личному мнению физические законы в конце концов должны найти свое наиболее естественное выражение с помощью существенно комбинаторных принципов, т. е. с помощью таких конечных процессов, как подсчет или другие фундаментально простые манипуляции. Таким образом, должна возникать некоторая форма дискретного или комбинаторного пространства-времени*».

(Пенроуз в книге [210])

«Комплексные числа ... являются весьма важной составляющей в структуре физических законов. Теория твисторов идет в этом отношении дальше, предполагая, что комплексные числа могут также фундаментальным образом фигурировать при определении природы самого пространства-времени».

(Пенроуз и Мак-Коллом [211])

«Таким образом, заманчиво предположить, что связь между кривизной пространства-времени и квантовыми процессами может обеспечиваться с помощью твисторов. Тогда, грубо говоря, непрерывный незначительный «сдвиг» в интерпретации квантовых (твисторных) операторов приводит к кривизне пространства-времени».

(Пенроуз [212])

Дополнение 34.3. СТИВЕН В. ХОУКИНГ, родился 8 января 1942 г., Оксфорд, Англия

Когда Стивен Хоукинг был дипломником Дениса Шамы в Кембридже, его ранний интерес к общей теории относительности в основном концентрировался на вопросе о пространственно-временных сингулярностях. Вместе с Эллисом он показал, что широкий класс однородных космологических моделей должен быть сингулярным. Затем, вдохновляемый деятельностью Пенроуза в области сингулярностей, возникающих в гравитационном коллапсе, он разработал новые методы, изложенные в серии докладов в Лондонском Королевском обществе в течение 1966—1967 гг., которые позволили установить следующий важный результат: любая правдоподобная обещерелятивистская космология должна обладать сингулярностью.

Большая часть его последующих исследований относилась к черным дырам. Он разработал серию очень изящных доказательств, которые совместно с деятельностью Израэля и Картера, по существу, установили следующие результаты: в общей теории относительности черные дыры (в вакууме) описываются метрикой Керра; топологии, отличные от сферической, не могут иметь места и энергия, излучаемая при слиянии двух черных дыр в одну, должна подчиняться определенному ограничению.

Некоторая часть этих работ представляла чисто математический интерес (например, теоремы о сингулярностях), другая часть относилась к астрофизике (например, совместная с Тэйлором работа, посвященная образованию гелия в большом взрыве); некоторая часть имела дело с наблюдениями (совместная с Гибонсом работа о возможности существования черных дыр в двойных звездных системах) и даже с экспериментальными разработками (совместная с Гибонсом работа о детекторах гравитационных волн). В таком широком охвате проявляются

не только огромная интуиция, глубина и разносторонность, но также и дар необыкновенной решимости в преодолении тяжелейших физических трудностей, в стремлении найти и понять истину [1]).

«*Наблюдаемая изотропия микроволнового фона указывает на то, что вращение Вселенной очень мало, если оно вообще есть ... Это можно считать экспериментальным подтверждением принципа Маха*».

(Хоукинг [213])

«*Без сомнения, самыми важными результатами являются теоремы... о существовании сингулярностей. По-видимому, эти теоремы подразумевают, что либо общая теория относительности нарушается, либо могут иметь место частицы, истории которых не существуют до (или после) определенного времени. По мнению автора, теория, вероятно, действительно нарушается, но лишь когда становятся существенными квантовые гравитационные эффекты*».

«*Хотя мы не включили сингулярные точки в определение пространства-времени, мы все же можем опознать «дыры», оставшиеся там, где они были вырезаны благодаря существованию неполных геодезических*».

«*Хорошая физическая теория должна не только верно описывать имеющиеся экспериментальные данные, но также предсказывать новые результаты, которые могут быть проверены экспериментом; чем дальше предсказания от исходных экспериментов, тем больше доверия к теории, если предсказания оказались правильными. Поэтому наблюдения, обнаруживающие, имеют ли место в действительности сингулярности или нет, могли бы дать мощное средство проверки общей теории относительности в сильных полях*».

(Хоукинг [214])

«*Создание детекторов гравитационного излучения может открыть целую новую область «гравитационной астрономии», которая могла бы оказаться такой же плодотворной, какой была радиоастрономия в течение последних двух десятилетий...*

Столкновения черных дыр... намного эффективней превращали бы энергию массы покоя в излучение, нежели ядерные реакции, которые высвобождают лишь около 1% энергии массы покоя. Кроме того, черные дыры, образованные при столкновениях меньших черных дыр, могут испытывать дальнейшие столкновения, высвобождающие дополнительную энергию, тогда как вещество, полностью прошедшее через ядерные реакции, больше не может давать энергию тем же способом... Мы являемся свидетелями какого-то настоящего катаклизма в центре нашей Галактики».

(Хоукинг [215])

«*Можно предположить, что современному расширению предшествовала фаза сжатия, когда локальные неоднородности вырастали большими*

[1]) Несомненно одним из главных научных достижений Хоукинга явилось открытие им в 1974 г. квантового процесса «испарения» черных дыр. См. примечание на стр. 153.— *Прим. ред.*

и возникали изолированные сингулярности. Большая часть вещества избежала сингулярностей, вновь расширилась и дала современную наблюдаемую Вселенную».

«По-видимому, мы должны очертить поверхность вокруг областей, где радиус кривизны меньше, чем, скажем, 10^{-16} см. С нашей стороны от этой поверхности применима картина пространства-времени в виде непрерывного многообразия, но мы не имеем никакого представления о структуре пространства-времени с другой стороны от этой поверхности».

(Хоукинг и Эллис [216])

«Вероятно, потребуется рассмотреть квантовые эффекты в очень сильных полях. Однако они не будут существенны, пока радиус кривизны не станет порядка 10^{-14} см; такой радиус кривизны для практических целей является в значительной мере сингулярным».

«Высказывалось мнение, что сингулярности столь нежелательны, что, раз уравнения Эйнштейна предсказывают их существование, это служит якобы убедительной причиной для модификации этих уравнений. Однако настоящий тест физической теории состоит не в том, являются ли предсказываемые ею результаты эстетически привлекательными, а в том, согласуются ли они с наблюдениями. До сих пор не было никаких наблюдений, которые указывали бы на отсутствие сингулярностей».

(Хоукинг [217])

«Было показано, что стационарная черная дыра должна обладать топологически сферической границей и, если она вращается, должна быть аксиально симметричной. Эти результаты вместе с результатами Израэля и Картера весьма продвигают нас на пути к доказательству предположения о том, что стационарная черная дыра представляет собой решение Керра».

(Хоукинг [104])

«Тот факт, что наблюдаемая нами Вселенная изотропна, является неизбежным следствием факта нашего собственного существования».

(Коллинз и Хоукинг [218])

ЧАСТЬ VIII

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

В которой читатель путешествует по бурным морям волн кривизны, пытаясь найти божество шторма, создающее эти волны, и пробивается сквозь электромагнитный и тепловой туман, который препятствует хорошей видимости на этих морях.

35. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Борн: «*Я хотел бы задать господину Эйнштейну вопрос, а именно, с какой скоростью в его теории распространяется гравитационное взаимодействие? Лично мне кажется неубедительным, что эта скорость оказывается равной скорости света. Между этими понятиями должна существовать какая-то очень сложная связь*».
Эйнштейн: «*Совсем не сложно выписать уравнения для случая, когда на поле накладываются бесконечно малые возмущения. Тогда компоненты g лишь на бесконечно малую величину отличаются от тех компонент, которые имели бы место без этих возмущений. В этом случае возмущения распространяются со скоростью света*».
Борн: «*Но ведь несомненно, что вопрос о больших возмущениях является очень сложным?*»
Эйнштейн: «*Да, математически это очень сложная проблема. Особенно трудно найти точные решения уравнений, поскольку уравнения нелинейны*».

Выдержки из дискуссии после лекции Эйнштейна «Современное состояние проблемы гравитации», прочитанной осенью 1913 г. в Вене, через два года после того, как он получил окончательные уравнения поля [219].

§ 35.1. ДВЕ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Изучайте одну идеализацию за другой. Составьте каталог идеализаций, их свойств и методов их анализа. Это единственный способ овладеть столь сложным предметом, как гравитация!

Сферическая симметрия — это та идеализация, которая преобладала в последних 12 главах. Вместе с другими идеализациями,

Мы глубоко благодарны мистеру Джеймсу М. Нестеру, который нашел и исправил большое число ошибок в формулах этой главы и десятка других глав, разбросанных по всей книге.

согласно которым вещество считается идеальной жидкостью, а Вселенная предполагается однородной, она позволяет заглянуть внутрь звезд, ознакомиться с космологией и гравитационным коллапсом.

Обратимся теперь к идеализации совершенно иного типа, не связанной с соображениями симметрии: к идеализации «гравитационной волны».

Сравнение гравитационных волн с волнами в океане:

Точно так же, как с понятием «волны на воде» мы связываем мелкую рябь, распространяющуюся по поверхности океана, название «гравитационные волны» мы относим к мелкой ряби, которая распространяется по пространству-времени. Но пульсациями чего является эта рябь? Там пульсации формы поверхности океана, а здесь пульсации формы (т. е. кривизны) пространства-времени. Оба типа волн представляют собой идеализации. Нельзя со сколь угодно большой точностью в произвольный момент времени отличить между собой капли воды, принадлежащие волне и основному океану; точно так же мы не можем точно отделить те части кривизны пространства-времени, которые принадлежат ряби, от тех ее частей, которые принадлежат космологическому фону. Но приблизительно мы можем это сделать, в противном случае о «волнах» не следовало бы говорить вообще!

1) понятие волны является приближением

2) локальная точка зрения в противоположность крупномасштабной точке зрения

Посмотрим на океан из лодки. Волны доминируют в морском пейзаже. Изменения уровня поверхности океана и ее угла наклона происходят через каждые 10 м или даже меньше. Эти изменения распространяются, подчиняясь простому волновому уравнению

$$\left(-\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\text{высота поверхности})=0.$$

Теперь перейдем к более сложному. Взглянем на крупномасштабную кривизну поверхности океана с борта космического корабля; эта кривизна обусловлена тем, что Земля круглая, а также притяжением водных масс Солнцем и Луной. При распространении волн на большие расстояния эта кривизна приводит к отклонению их фронтов и слегка усложняет простое волновое уравнение, описывающее эти волны. На больших расстояниях становятся существенными нелинейные взаимодействия волн друг с другом, с ветром, с силами Кориолиса, обусловленными вращением Земли, и т. д.

Аналогично обстоит дело и с пространством-временем. То, что распространяется по Вселенной, согласно теории Эйнштейна, должно носить характер мелкомасштабной ряби на кривизне пространства-времени; эти возмущения создаются двойными звездами, сверхновыми, гравитационным коллапсом, взрывами ядер галактик. Локально («точка зрения находящегося в лодке») можно не обращать внимания на взаимодействие этих возмущений с крупномасштабной кривизной и на нелинейное взаимодействие волн друг с другом. Мы вправе считать, что волны распространяются в плоском пространстве-времени, и можем написать для них простое волновое уравнение. Но глобально этого сделать нельзя. Крупно-

масштабная кривизна, обусловленная неподвижными звездами и галактиками, будет вызывать красные смещения и искажать волновые фронты, а энергия, которую несут сами волны, в свою очередь приводит к крупномасштабной кривизне. В этой главе изложены обе точки зрения — локальная (§ 35.2—35.6) и глобальная (§ 35.7—35.15).

§ 35.2. ОБЗОР «ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ» В ВАКУУМЕ

Линеаризованная теория гравитационных волн:

Будем некоторое время придерживаться идеализации, согласно которой гравитационные волны в нашей Вселенной распространяются в плоском пространстве-времени (локальная точка зрения). Тогда их можно исследовать с помощью «линеаризованной теории гравитации», с которой мы познакомились в гл. 18.

Линеаризованная теория, как мы помним, есть приближение общей теории относительности в случае слабого поля. В линеаризованной теории уравнения записываются и решаются так, как если бы пространство-время было плоским (точка зрения специальной теории относительности), но связь с экспериментом устанавливается с использованием формализма общей теории относительности для искривленного пространства.

Более конкретно линеаризованная теория описывает гравитацию с помощью симметричного тензорного поля $\bar{h}_{\mu\nu}$ второго ранга. В обычной (лоренцевой или гильбертовой) калибровке это поле удовлетворяет следующим «калибровочным», или «вспомогательным» (координатным) условиям:

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \qquad (35.1а)$$

1) условие лоренцевой калибровки

(Здесь, как и во всей линеаризованной теории, индексы тензора $\bar{h}_{\mu\nu}$ поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского $\eta_{\alpha\beta}$.) В этой калибровке *уравнения распространения* для гравитационного поля в вакууме представляют собой хорошо знакомые волновые уравнения

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\ \alpha}{}^{\alpha} = 0. \qquad (35.1б)$$

2) уравнение распространения волн

На самом деле пространство-время в линеаризованной теории искривлено, хотя уравнения (35.1) выписываются и решаются так, как если бы искривление отсутствовало. Глобальные инерциальные системы отсчета уравнений (35.1) являются лишь *почти* инерциальными. Метрические компоненты в этих системах на самом деле таковы [1]):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O([h_{\mu\nu}]^2); \qquad (35.2а)$$

3) метрика

[1]) В более строгой трактовке по определению $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, и в уравнения поля входят малые поправки $O([h_{\mu\nu}]^2)$:

$$\bar{h}^{\alpha}_{\mu,\alpha} = O([h_{\mu\nu}]^2, \alpha), \quad \bar{h}^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = O([h_{\mu\nu}]^2, \alpha\beta).$$

а «возмущения метрики» $h_{\mu\nu}$ связаны с «гравитационным полем» $\bar{h}_{\mu\nu}$ соотношениями

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \qquad h \equiv h_\alpha{}^\alpha = -\bar{h} = -\bar{h}_\alpha{}^\alpha. \tag{35.2б}$$

Метрика (35.2а) обычным для общей теории относительности образом определяет движение пробных частиц, распространение света и т. д.

Напомним, как получаются уравнения (35.1), которые определяют $\bar{h}_{\mu\nu}$. Специальным выбором системы координат на $\bar{h}_{\mu\nu}$ накладываются вспомогательные условия $\bar{h}^\alpha_{\mu,\,\alpha} = 0$, и тогда эйнштейновские уравнения поля в вакууме сводятся к $\Box\,\bar{h}_{\mu\nu} = 0$.

На самом деле, как было показано в дополнении 18.2, координаты линеаризованной теории не полностью фиксируются условиями $\bar{h}^\alpha_{\mu,\alpha} = 0$. Оставшаяся неопределенность проявляется в дальнейших калибровочных вариациях (инфинитезимальных координатных преобразованиях) ξ_μ, которые удовлетворяют следующему ограничивающему их выбор условию:

4) Свобода выбора, остающаяся после калибровки

$$\xi_{\mu,\alpha}{}^\alpha = 0, \tag{35.3а}$$

так чтобы продолжали выполняться условия (35.1а). Тогда координатное преобразование имеет вид

$$x^\mu_{\text{нов}} = x^\mu_{\text{стар}} + \xi^\mu, \tag{35.3б}$$

а калибровочная вариация есть

$$\bar{h}_{\mu\nu\,\text{нов}} = \bar{h}_{\mu\nu\,\text{стар}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu,\nu}\xi^\alpha{}_{,\,\alpha}. \tag{35.3в}$$

Все это выводилось и обсуждалось в гл. 18.

§ 35.3. РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ

Монохроматическая плоская волна

Самым простым из всех решений линеаризованных уравнений $\bar{h}_{\mu\nu,\,\alpha}{}^{\alpha} = \bar{h}^\alpha_{\mu,\,\alpha} = 0$ является решение для монохроматической плоской волны

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\,[A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha)]. \tag{35.4а}$$

Здесь $\Re\,[\ldots]$ означает необходимость взятия действительной части выражения, стоящего в квадратных скобках; при этом $A_{\mu\nu}$ (*амплитуда*) и k_μ (*волновой вектор*) являются константами, удовлетворяющими соотношениям

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (\mathbf{k} - \text{нулевой вектор}), \tag{35.4б}$$

$$A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \quad (\mathbf{A} \text{ ортогонально } \mathbf{k}) \tag{35.4в}$$

[которые являются следствиями уравнений $\bar{h}_{\mu\nu,\ \alpha}{}^{\alpha} = 0$ и $\bar{h}^{\alpha}_{\mu,\ \alpha} = 0$ соответственно; см. ниже уравнение (35.10) для тензора кривизны, в котором заключается истинный физический смысл, связанный с волной]. Очевидно, это решение описывает волну с частотой

$$\omega \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \tag{35.5}$$

распространяющуюся со скоростью света в направлении $(1/k^0)\ (k_x,\ k_y,\ k_z)$.

На первый взгляд кажется, что амплитуда этой плоской волны $A_{\mu\nu}$ имеет шесть независимых компонент (десять минус четыре константы, связанные с условием ортогональности $A_{\mu\alpha}k^{\alpha} = 0$). Но это утверждение не может быть верным! Читавшие курс 2 узнали из гл. 21, что гравитационное поле в общей теории относительности имеет две динамические степени свободы, а не шесть. В каком же месте наших рассуждений мы сбились с пути?

Плоская волна имеет две степени свободы при выборе амплитуды (две поляризации)

Мы были введены в заблуждение, забыв о произвольности, связанной со свободой выбора калибровки (35.3). Вектор, имеющий вид плоской волны

$$\xi^{\mu} \equiv -iC^{\mu} \exp\ (ik_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{35.6}$$

с четырьмя произвольными постоянными C^{μ}, приводит к калибровочному преобразованию, которое может произвольным образом изменять четыре из шести независимых компонент $A_{\mu\nu}$. От этой произвольности мы избавились, выбрав конкретную калибровку.

§ 35.4. ПОПЕРЕЧНАЯ КАЛИБРОВКА СО СЛЕДОМ, РАВНЫМ НУЛЮ (TT-КАЛИБРОВКА[1])

TT-калибровка:

Выберем 4-скорость $\mathbf{u}$ не в каком-то одном конкретном событии, а во всем пространстве-времени (точка зрения специальной теории относительности!) Посредством специально выбранного калибровочного преобразования (упражнение 35.1) наложим условия

1) для плоской волны

$$A_{\mu\nu}u^{\nu} = 0. \tag{35.7а}$$

Здесь имеются лишь три новых ограничения на $A_{\mu\nu}$, а не четыре, так как одному из них $k^{\mu}(A_{\mu\nu}u^{\nu}) = 0$ $A_{\mu\nu}$ уже удовлетворяет согласно (35.4в). В качестве четвертого ограничения воспользуемся калибровочным преобразованием (упражнение 35.1), полагая

$$A^{\mu}{}_{\mu} = 0. \tag{35.7б}$$

Всего теперь имеется восемь ограничений $A_{\mu\alpha}u^{\alpha} = A_{\mu\alpha}k^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$ на десять компонент амплитуды, и система координат (калибровка) жестко фиксирована. Таким образом, две компоненты $A_{\mu\nu}$, остающиеся свободными, представляют две степени свободы (две поляризации) в плоской гравитационной волне.

[1]) TT — transverse traceless (поперечная, со следом, равным нулю).— *Прим. перев.*

Полезно теперь сформулировать восемь ограничений $A_{\mu\alpha}u^\alpha = A_{\mu\alpha}k^\alpha = A^\mu{}_\mu = 0$ в лоренцевой системе, где $u^0 = 1$, $u^j = 0$, и придать им такую форму, в которую k^α явно не входит:

$$h_{\mu 0} = 0, \tag{35.8а}$$

т. е. не равны нулю только пространственные компоненты h_{jk};

$$h_{kj,\ j} = 0, \tag{35.8б}$$

т. е. дивергенция пространственных компонент равна нулю;

$$h_{kk} = 0, \tag{35.8в}$$

т. е. след пространственных компонент равен нулю. (Здесь и ниже по повторяющимся пространственным индексам должно производиться суммирование, даже в том случае, если оба индекса являются нижними, например $h_{kk} \equiv \sum_{k=1}^{3} h_{kk}$.) Заметим, что, поскольку $h = h^\mu{}_\mu = h_{kk} = 0$, в этой *калибровке* $h_{\mu\nu}$ *ничем не отличается от* $\overline{h}_{\mu\nu}$.

2) для произвольной волны

Перейдем теперь от плоских волн к произвольным гравитационным волнам в линеаризованной теории. Любая электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн; то же самое можно сказать и о гравитационной волне. Для каждой плоской волны, входящей в такую суперпозицию, введем свою калибровку (35.8). Заметим, что все координатные условия линейны по $h_{\mu\nu}$. Поэтому произвольная волна также будет удовлетворять условиям (35.8). Таким образом, мы получаем следующую теорему:

Выберем в линеаризованной теории определенную глобальную лоренцеву систему отсчета (т. е. выберем определенную 4-скорость u*). В этой системе (где* $u^\alpha = \delta^\alpha{}_0$*) исследуем конкретную гравитационную волну произвольной формы. Всегда можно найти такую калибровку, в которой* $h_{\mu\nu}$ *удовлетворяет ограничениям* (35.8). Кроме того, в этой калибровке отличны от нуля лишь h_{jk}. Следовательно, остается лишь наложить шесть волновых уравнений

$$\Box h_{jk} = h_{jk,\ \alpha}{}^{,\alpha} = 0. \tag{35.9}$$

Разложение пространственных тензоров

Любой симметричный тензор, удовлетворяющий ограничениям (35.8) [но не обязательно удовлетворяющий волновым уравнениям (35.9)], называется *поперечным бесследовым тензором* (TT-тензором); поперечным он называется, во-первых, потому, что он чисто пространственный ($h_{0\mu} = 0$) и, во-вторых, если рассматривать его как волну, он поперечен направлению своего распространения ($h_{ij,\ j} = h_{ij}k_j = 0$); бесследовым он называется потому, что $h_{kk} = 0$. В самом общем случае чисто пространственный тензор S_{ij} может быть разложен (см. [220] и дополнение 35.1) на следующие составные части: S^{TT}_{ij} —«поперечная бесследовая часть», $S^{T}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij}f_{,\ kk} - f_{,\ ij})$ — «поперечная часть» ($S^{T}_{ij,\ j} = 0$), полностью

определяемая одной функцией f, которая дает след S ($S^T_{kk} = \nabla^2 f$), и, наконец, $S^L_{ij} = S^L_{i,j} + S^L_{j,i}$ — «продольная часть», которая определяется векторным полем S^L_i. В линеаризованной теории h^L_{ij} является чисто калибровочной частью $h_{\mu\nu}$, в то время как h^T_{ij} и h^{TT}_{ij} суть калибровочно инвариантные части $h_{\mu\nu}$. Специально выбранная калибровка, при которой $h_{\mu\nu}$ сводится к своей поперечной части с равным нулю следом, называется поперечной калибровкой со следом, равным нулю (TT-калибровкой). Условия (35.8), определяющие эту калибровку, можно кратко представить в следующем виде:

$$h_{\mu\nu} = h^{TT}_{\mu\nu}. \tag{35.8г}$$

Как показано в упражнении 35.2, только чисто волновые решения (а не более общие решения линеаризованных уравнений поля с источником $\Box h_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$) могут быть сведены к TT-калибровке.

Тензор кривизны в TT-калибровке

При TT-калибровке пространственно-временные компоненты тензора кривизны Римана

$$R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0jk0}$$

принимают особенно простую форму [см. уравнение (18.9) и упражнение 18.4]:

$$R_{j0k0} = -\frac{1}{2} h^{TT}_{jk,00}. \tag{35.10}$$

Напомним, что тензор кривизны калибровочно инвариантен (упражнение 18.1). Из этого следует невозможность сведения $h_{\mu\nu}$ к еще меньшему числу компонент, чем при TT-калибровке.

В дополнении 35.1 описаны методы, с помощью которых, зная $h_{\mu\nu}$ в какой-то произвольной калибровке, можно вычислить $h^{TT}_{\mu\nu}$.

УПРАЖНЕНИЯ

35.1. Преобразование плоской волны к TT-калибровке

Пусть в какой-то произвольной калибровке линеаризованной теории задана плоская волна в виде (35.4). Продемонстрируйте в явном виде преобразование, приводящее эту волну к TT-калибровке. (*Указание.* Работайте в лоренцевой системе отсчета, в которой 4-скорость u^μ, связанная с TT-калибровкой, есть $u^0 = 1$, $u^j = 0$. Найдите четыре константы C^μ в производящей функции (35.6), потребовав для этого, чтобы $\bar{h}_{\mu\nu}$ удовлетворяли условиям (35.7), которые накладываются TT-калибровкой).

35.2. Ограничение на существование TT-калибровки

Хотя возмущения метрики $h_{\mu\nu}$ для любой *гравитационной волны* в линеаризованной теории могут быть представлены в форме (35.8), соответствующей TT-калибровке, но этого нельзя сделать

для возмущений $h_{\mu\nu}$, которые не связаны с излучением. В качестве примера рассмотрите внешнее гравитационное поле вращающейся сферической звезды, которое нельзя записать как суперпозицию плоских волн:

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \quad h_{jk} = \frac{2M}{r}\delta_{jk}, \quad h_{0k} = -2\varepsilon_{k\ell m}\frac{S^{\ell}x^{m}}{r^{3}},$$
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

[см. уравнение (19.5)]. Здесь M — масса звезды, а $\mathbf{S}$ — ее угловой момент. Покажите, что это поле нельзя привести к TT-калибровке. (*Указание.* Вычислите R_{j0k0} и из него с помощью (35.10) выведите h_{jk}. Затем вычислите R_{0xyz} как в первоначальной калибровке, так и в новой калибровке; вы обнаружите, что результаты этих вычислений не согласуются друг с другом — не только из-за члена, содержащего массу, но также из-за члена с угловым моментом.)

35.3. Цилиндрическая гравитационная волна

Чтобы вернуть уверенность, поколебленную, быть может, упражнением 35.2, можно рассмотреть решение, описывающее излучение, у которого единственной неисчезающей компонентой $h_{\mu\nu}$ является

$$\bar{h}_{zz} = 4A\cos(\omega t)\,J_0\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя. Это решение описывает суперпозицию сходящихся и расходящихся гравитационных волн. Вычислите для этого гравитационного поля R_{j0k0} и из него выведите h_{jk}^{TT}. После этого вычислите несколько других компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (например, R_{xyxy}) как в первоначальной калибровке, так и в TT-калибровке и убедитесь в том, что ответы получатся одинаковыми.

35.4. Составляющие метрических возмущений, не сводимые к TT-частям [курс 2]

Из дополнения 35.1 выведите формулу $h^{T} = \nabla^{-2}(h_{kk,\ell\ell} - h_{k\ell,k\ell})$; затем убедитесь непосредственно в калибровочной инвариантности h^T, показав, что $h_{kk,\ell\ell} - h_{k\ell,k\ell}$ калибровочно инвариантно. Воспользуйтесь тем, что $\delta h_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i}$. Аналогично покажите, что величины $\tilde{h}_{0k}$, определенные соотношением

$$\tilde{h}_{0k} = \bar{h}_{0k} - \nabla^{-2}(\bar{h}^{\mu}_{0,\mu k} + \bar{h}_{k\ell,\ell 0}),$$

калибровочно инвариантны. Покажите, исходя из калибровочно инвариантных уравнений поля (18.5), что

$$\nabla^2 h^T = -16\pi T^{00}, \quad \nabla^2\tilde{h}_{0k} = -16\pi T_{0k};$$

поэтому в случае волн в пустом пространстве h^T и $\tilde{h}_{0k}$ должны обращаться в нуль.

Дополнение 35.1. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ «ПОПЕРЕЧНОЙ БЕССЛЕДОВОЙ ЧАСТИ» ПОЛЯ ВОЛНЫ

Постановка задачи. Пусть в произвольной калибровке линеаризованной теории известна волна $h_{\mu\nu}(t, x^j)$. Каким образом можно вычислить возмущения метрики $h^{TT}_{\mu\nu}(t, x^j)$ в поперечной бесследовой калибровке?

Решение 1 (справедливое только для волн, т. е. когда $\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$). Вычислим компоненты R_{j0k0} тензора Римана в первоначальной калибровке, затем проинтегрируем (35.10)

$$h^{TT}_{jk,\,00} = -2R_{j0k0}. \tag{1}$$

чтобы получить h^{TT}_{jk}. Если волна монохроматическая, $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x^\ell)\, e^{-i\omega t}$, то решение уравнения (1) имеет простой вид

$$h^{TT}_{jk} = 2\omega^{-2}R_{j0k0}. \tag{2}$$

Решение 2 (справедливое только для плоских волн). Получим поперечные бесследовые компоненты обычным алгебраическим способом, воспользовавшись оператором

$$P_{jk} = \delta_{jk} - n_j n_k. \tag{3}$$

Здесь

$$n_k = k_k/|\boldsymbol{k}|$$

есть единичный вектор в направлении распространения волны. Убедимся, что P_{jk} является оператором проекции на поперечную плоскость:

$$P_{j\ell}P_{\ell k} = P_{jk}, \quad P_{jk}n_k = 0, \quad P_{kk} = 2.$$

Тогда поперечная часть h_{jk} есть $P_{j\ell}h_{\ell m}P_{mk}$ (или в матричных обозначениях PhP) и TT-часть равна этой величине минус ее след:

$$h^{TT}_{jk} = P_{j\ell}P_{mk}h_{\ell m} - \frac{1}{2}P_{jk}(P_{\ell L}h_{\ell m}) \tag{4}$$

(индексные обозначения),

$$h^{TT} = PhP - \frac{1}{2}P\,\mathrm{Sp}\,(Ph) \tag{4'}$$

(матричные обозначения). Последовательность операций, дающая h^{TT}_{ij}, отделяет от h_{jj} две части. Первая из этих частей

$$h^{T}_{jk} = \frac{1}{2}P_{jk}(P_{\ell m}h_{\ell m}) \tag{5}$$

является поперечной, но при построении этой части используется ее собственный след

$$h^T \equiv \mathrm{Sp}\,(PhP) = \mathrm{Sp}\,(Ph) = P_{\ell m}h_{m\ell}.$$

Вторая отброшенная часть h_{ij} является продольной

$$\begin{aligned} h^{L}_{jk} &= h_{jk} - P_{j\ell}P_{mk}h_{\ell m} = \\ &= n_\ell n_k h_{j\ell} + n_j n_\ell h_{\ell k} - n_j n_k (n_\ell n_m h_{\ell m}), \end{aligned} \tag{6}$$

или

$$h^L = h - PhP. \tag{6'}$$

Решение 3 (общий случай). Совершим фурье-преобразование произвольной симметричной матрицы $h_{ij} = \int h_{ij}(k, t) \exp(ik_m x^m)\, d^3k$ и к каждой отдельной фурье-компоненте применим формулу (4) из решения 2. Но заметим, что в этом случае можно записать оператор проекции в форме, не зависящей от направления:

$$P_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{\nabla^2}\partial_j\partial_k, \tag{7}$$

или

$$n_\ell n_m = \frac{1}{\nabla^2}\partial_\ell\partial_m \tag{8}$$

(при условии, что в формулах все h записываются с правой стороны), поскольку $\partial_\ell = ik_\ell$ под знаком интеграла при фурье-преобразовании. Конечно, операцию $1/\nabla^2$ можно определить и другими методами — наряду с фурье-преобразованием можно использовать, например, функцию Грина. (Величина $\psi \equiv \nabla^{-2} f$ закрепляется за решением уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = f$.) Достоинством этого метода является его продуктивность в определенных аналитических расчетах (пример см. ниже).

Калибровочные преобразования. Вариация $h_{\mu\nu}$ под действием калибровочного преобразования равна

$$\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu). \tag{9}$$

Поперечная часть этой вариации есть

$$P_{j\ell}P_{km}(\delta h_{\ell m}) = -P_{j\ell}P_{km}(\partial_\ell\xi_m + \partial_m\xi_\ell) = 0. \tag{10}$$

Чтобы проверить эту формулу для плоской волны (решение 2), заметим, что $\partial_\ell = i\,|\,\boldsymbol{k}\,|\,n_\ell$ и $P_{j\ell}n_\ell = 0$. Чтобы убедиться в правильности этого результата в общем случае, воспользуемся уравнением (7) и получим следующий результат:

$$P_{j\ell}\partial_\ell = 0. \tag{11}$$

Таким образом, как h^{TT}_{ij} из уравнения (4), так и h^T_{ij} из уравнения (5) являются калибровочно инвариантными:

$$\delta h^{TT}_{ij} = \delta h^T_{ij} = 0. \tag{12}$$

В пустом пространстве ($T_{\mu\nu} = 0$) благодаря уравнениям поля как h^T_{ij}, так и другая калибровочно инвариантная величина $\tilde{h}_{0k}$ (которые обсуждаются в упражнении 35.4) обращаются в нуль.

§ 35.5. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЕ

Воздействие гравитационной волны на расстояние между двумя пробными частицами

Осциллирующий тензор кривизны в гравитационной волне создает колебания расстояния между двумя соседними пробными частицами A и B. Изучим эти колебания с точки зрения наблюдателя, расположенного в точке A. Воспользуемся системой координат

(«собственной системой отсчета точки A») с началом пространственных координат $x^{\hat{j}} = 0$, жестко связанным с мировой линией частицы A (сопутствующими координатами); координатное время в этой системе равно собственному времени частицы ($x^{\hat{0}} = \tau$ на мировой линии $x^{\hat{j}} = 0$), а ортогональные пространственные оси жестко связаны с гироскопами, установленными на частице A («невращающаяся система»). Эта система координат, выбранная соответствующим образом, является локально лоренцевой не только для какого-то одного события $\mathcal{P}_0$ на геодезической мировой линии частицы A, но и вдоль всей мировой линии частицы A:

$$ds^2 = -dx^{\hat{0}\,2} + \delta_{\hat{j}\hat{k}}\, dx^{\hat{j}}\, dk^{\hat{k}} + O(|x^{\hat{j}}|^2)\, dx^{\hat{\alpha}}\, dx^{\hat{\beta}}. \qquad (35.11)$$

[*Доказательство.* Подобная «собственная система отсчета» строилась в той части § 13.6, которая относится к курсу 2. Выведенный там линейный элемент (13.71), конкретизированный для частицы A ($a_{\hat{j}} = 0$, поскольку A свободно падает, $\omega^{\hat{\ell}} = 0$, поскольку пространственные оси жестко связаны с гироскопами), сводится, как и в (13.73), к приведенному выше выражению.]

По мере прохождения гравитационной волны она создает колебания тензора кривизны, которые вызывают колебания вектора $\mathbf{n}$, разделяющего точки A и B и направленного от A к B:

$$D^2 n^{\hat{j}}/d\tau^2 = -R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}\, n^{\hat{k}} = -R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}}\, n^{\hat{k}}. \qquad (3.12)$$

Компоненты этого вектора, разделяющего две частицы, не что иное, как координаты частицы B, поскольку частица A расположена в начале своей системы отсчета; таким образом,

$$n^{\hat{j}} = x^{\hat{j}}_B - x^{\hat{j}}_A = x^{\hat{j}}_B.$$

Кроме того, при $x^{\hat{j}} = 0$ [где проводится вычисление (35.12)] $\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ обращаются в нуль для всех $x^{\hat{0}}$, поэтому $d\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}/d\tau$ также обращаются в нуль. Это исключает все поправки, вносимые символами Кристоффеля в $D^2 n^{\hat{j}}/D\tau^2$. Следовательно, уравнение (35.12) принимает вид

$$d^2 x^{\hat{j}}_B/d\tau^2 = -R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}}\, x^{\hat{k}}_B. \qquad (35.13)$$

В первом приближении по возмущениям метрики h^{TT}_{jk} именно TT-система координат [1]) сопутствует частице A и ее собственной системе отсчета. В первом приближении по h^{TT}_{jk} координатное время в этой системе отсчета совпадает с собственным временем τ, а $R^{TT}_{j0k0} = R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$. Следовательно, уравнение (35.13) может быть переписано в виде

$$d^2 x^{\hat{j}}_B/dt^2 = -R^{TT}_{j0k0} x^{\hat{k}}_B = \frac{1}{2}\,(\partial^2 h^{TT}_{jk}/\partial t^2)\, x^{\hat{k}}_B. \qquad (35.14)$$

[1]) TT-система координат — система координат, фиксируемая выбором TT-калибровки.— *Прим. перев.*

Предположим для определенности, что до прохождения волны частицы покоились друг относительно друга ($\hat{x^j_B} = x_{B(0)}{}^{\hat{j}}$ при $h^{TT}_{jk} = 0$). В таком случае уравнение движения (35.14) может быть проинтегрировано, что дает

$$\hat{x^j_B}(\tau) = x_{B(0)}{}^{\hat{k}} \left[\delta_{jk} + \frac{1}{2} h^{TT}_{jk}\right]_{\text{в точке } A}. \tag{35.15}$$

Это уравнение описывает колебание положения частицы B, вызванное волной и определяемое в собственной системе отсчета частицы A.

Поперечный характер относительных ускорений

Обратимся к конкретному случаю плоской волны. Допустим, что вектор, разделяющий пробные частицы, лежит в направлении распространения волны. Тогда волна не меняет расстояние между частицами, колебание отсутствует:

$$h^{TT}_{jk} x_{B(0)}{}^{\hat{k}} \sim h^{TT}_{jk} k_k = 0.$$

Колеблются лишь расстояния между частицами в поперечном направлении: *волна является поперечной не только в смысле ее математического описания, но и в смысле физических эффектов, вызываемых этой волной* (*отклонение геодезических*)!

УПРАЖНЕНИЕ

35.5. Другой способ расчета относительных колебаний

Введите ТТ-систему координат, в которой обе частицы в момент времени $t = 0$ покоятся. Воспользуйтесь уравнением для геодезических и *покажите*, что, несмотря на воздействие волны, частицы все время продолжают оставаться в состоянии покоя относительно этой системы координат. Это означает, что контравариантные компоненты вектора, разделяющего эти частицы, остаются все время постоянными в этой системе координат:

$$n^j = x_B{}^j - x_A{}^j = \text{const}.$$

Обозначьте эти константы через $x_{B(0)}{}^j$. *Совершите преобразование* этих компонент к сопутствующей ортонормальной системе; в результате должно получиться уравнение (35.15).

---

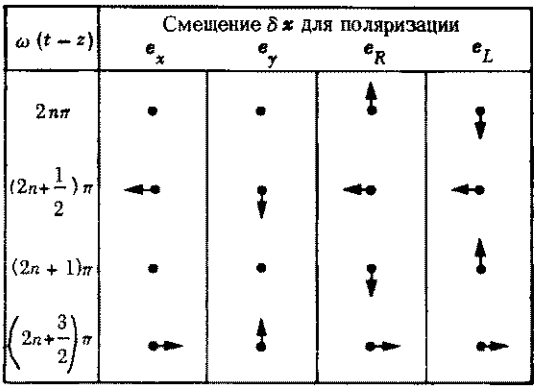
§ 35.6. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Поляризация гравитационных волн:

С помощью отклонения геодезических в поперечном направлении можно изучить и выделить различные поляризации плоских волн.

1) два состояния линейной поляризации

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении z. Условия $h^{TT}_{0\mu} = 0$, $h^{TT}_{ij,\,j} = ik_j h^{TT}_{ij} = 0$ и $h^{TT}_{kk} = 0$, налагаемые ТТ-калибровкой, показывают, что отличны



ФИГ. 35.1.
Плоские электромагнитные волны. Вектор поляризации e_P. Векторный потенциал

$$A = \Re\,[A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_P].$$

Ускорение пробного заряда

$$a = (q/m)\,E = (q/m)\,(-\partial A/\partial t) = \Re\,[i\omega\,(q/m)\,A_0 e^{-i\omega(t-z)}\,e_P].$$

Смещение заряда относительно инерциальной системы отсчета

$$\delta x = \Re\left[\frac{q/m}{i\omega} A_0 e^{-i\omega(t-z)}\,e_P\right].$$

от нуля лишь следующие компоненты $h^{TT}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} h^{TT}_{xx} &= -h^{TT}_{yy} = \Re\,\{A_+ e^{-i\omega(t-z)}\}, \\ h^{TT}_{xy} &= -h^{TT}_{yx} = \Re\,\{A_\times e^{-i\omega(t-z)}\}. \end{aligned} \tag{35.16}$$

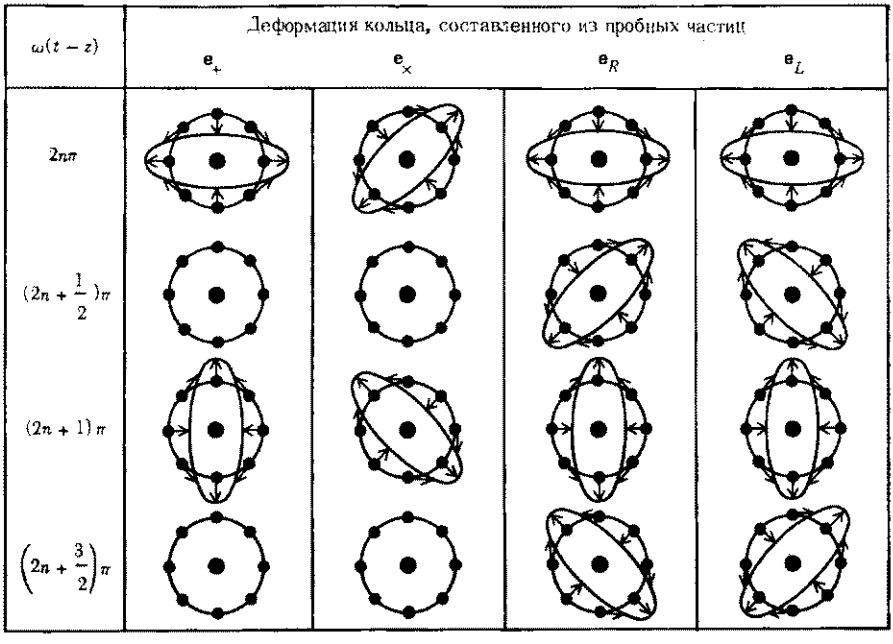
Амплитуды A_+ и $A_\times$ представляют собой два независимых типа поляризации.

Как в случае плоских электромагнитных волн (фиг. 35.1), так и в случае плоских гравитационных волн (фиг. 35.2) заданную волну можно разложить на две линейно поляризованные компоненты или на две компоненты с круговой поляризацией.

Для *линейно поляризованных волн* единичными векторами поляризации в электромагнитной теории служат векторы e_x и e_y. Пробный заряд, на который падает волна с вектором поляризации e_x, колеблется в направлении x относительно инерциальной системы отсчета: подобно этому, волна, имеющая вектор поляризации e_y, создает колебания в направлении y. По аналогии *единичными тензорами линейной поляризации* для гравитационных волн служат тензоры

$$\mathbf{e}_+ \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y, \tag{35.17а}$$

$$\mathbf{e}_\times \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x. \tag{35.17б}$$



ФИГ. 35.2.
Плоские гравитационные волны. Тензор поляризации $\mathbf{e}_P$. Возмущение метрики:

$$h_{jk} = \Re\,[A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk}].$$

Приливное ускорение между двумя пробными частицами

$$\frac{D^2 n_{\hat{j}}}{D\tau^2} = -R_{j0k0} n_{\hat{k}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial t^2} n_{\hat{k}} = \Re\left[-\frac{1}{2}\omega^2 A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} n_{\hat{k}}\right].$$

Вектор, разделяющий две пробные частицы:

$$n_{\hat{j}} = n_{\hat{j}}^{(0)} + \Re\left[\frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} n_{\hat{k}}^{(0)}\right].$$

Положение пробной частицы B в собственной системе отсчета пробной частицы A (на рисунке A — центральная частица, а B — произвольная частица, расположенная на окружности):

$$x_B^{\hat{j}} = x_{B(0)}^{\hat{j}} + \Re\left[\frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} x_{B(0)}^{\hat{k}}\right].$$

Плоская волна (35.16) при $A_\times = 0$ имеет поляризацию $\mathbf{e}_+$ и может быть записана в виде

$$h_{jk} = \Re\,\{A_+ e^{-i\omega(t-z)} e_{+jk}\}. \qquad (35.18)$$

Характер изменения вектора, разделяющего две пробные частицы, движущиеся по геодезическим, зависит от направления этого

вектора по отношению к волне. Чтобы наглядно представить себе действие волны сразу для всех направлений, рассмотрим круговое кольцо из пробных частиц, расположенное в поперечной плоскости вокруг центральной пробной частицы (фиг. 35.2). При прохождении плоской волны (35.18) (поляризация $\mathbf{e}_+$) конфигурация, являвшаяся кольцом в собственной системе отсчета центральной частицы, деформируется под действием волны в эллипс, оси которого направлены по осям x и y и который пульсирует то внутрь, то наружу:

и т. д. В отличие от этого (фиг. 35.2) волна с поляризацией $\mathbf{e}_\times$ деформирует кольцо в эллипс с осями, составляющими с осями x и y угол 45°:

и т. д.

2)два состояния круговой поляризации

Для *волн с круговой поляризацией* в электромагнитной теории единичными векторами поляризации служат

$$e_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \quad e_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y). \tag{35.19}$$

Аналогично *единичными тензорами круговой поляризации* в теории гравитации служат

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times), \quad \mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times). \tag{35.20}$$

Пробный заряд, на который падает электромагнитная волна с поляризацией e_R, движется все время по кругу направо (против часовой стрелки, если волна распространяется в направлении к читателю); в случае поляризации e_L заряд вращается налево (по часовой стрелке) (фиг. 35.1). Аналогично (фиг. 35.2), гравитационная волна с поляризацией $\mathbf{e}_R$ поворачивает всю картину деформации кольца из пробных частиц направо

в то время как волна с поляризацией $\mathbf{e}_L$ поворачивает это деформированное кольцо налево. Отдельные пробные частицы в кольце вращаются по малым окружностям относительно центральной частицы. Однако точно так же, как капли воды в океане не принимают участия в поступательном движении волны, так и частицы в кольце не принимают участия во вращении *вокруг* центральной частицы вместе с вращающимся эллипсом.

Спин 2, присущий гравитационному полю, и его связь со свойствами симметрии гравитационных волн

Заметим из фиг. 35.2, что в любой момент времени гравитационная волна инвариантна относительно поворота на 180° вокруг направления ее распространения. Аналогичный угол для электромагнитных волн (фиг. 35.1) составляет 360°, а для волн, связанных с нейтрино, этот угол равен 720°. Такое поведение волн самым непосредственным образом связано со спином частиц нулевой массы, которые вводятся при квантовомеханическом рассмотрении указанных выше волн: гравитоны имеют спин 2, фотоны — спин 1, а нейтрино — спин $^1/_2$. Классическое поле излучения, соответствующее частице со спином S, всегда инвариантно относительно поворота на угол $360°/S$ вокруг направления распространения.

Поле излучения с любым спином S имеет два ортогональных состояния линейной поляризации [1]). Они наклонены друг к другу на угол $90°/S$. Таким образом, для нейтринного поля со спином $S = {}^1/_2$ различают два состояния поляризации, обозначаемые $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ (спин вверх, спин вниз; угол 180°). Для электромагнитной волны с $S = 1$ два ортогональных состояния поляризации суть $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$ (угол 90°). Для гравитационной волны с $S = 2$ два ортогональных состояния поляризации — $\mathbf{e}_+$ и $\mathbf{e}_\times$ (угол 45°).

УПРАЖНЕНИЯ

35.6. Вращательные преобразования для состояний поляризации

Рассмотрите две лоренцевы системы координат, повернутые одна относительно другой на угол θ вокруг направления z:

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = y\cos\theta - x\sin\theta, \quad z' = z. \tag{35.21}$$

Пусть $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ — квантовомеханические состояния нейтрино со спином вверх и со спином вниз относительно направления x, и аналогично $|\uparrow'\rangle$ и $|\downarrow'\rangle$ — относительно направления x'. Пусть $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_{x'}$, $\boldsymbol{e}_{y'}$ — единичные векторы поляризации в двух системах координат для электромагнитной волны, распространяющейся в направлении z, и аналогично $\mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_\times$, $\mathbf{e}_{+'}$, $\mathbf{e}_{\times'}$ для гравитационной волны в линеаризованной теории. Выведите следующие законы преобразования:

$$|\uparrow'\rangle = |\uparrow\rangle\cos\tfrac{1}{2}\theta + |\downarrow\rangle\sin\tfrac{1}{2}\theta; \quad |\downarrow'\rangle = -|\uparrow\rangle\sin\tfrac{1}{2}\theta + |\downarrow\rangle\cos\tfrac{1}{2}\theta;$$

$$\boldsymbol{e}_{x'} = \boldsymbol{e}_x\cos\theta + \boldsymbol{e}_y\sin\theta; \quad \boldsymbol{e}_{y'} = -\boldsymbol{e}_x\sin\theta + \boldsymbol{e}_y\cos\theta; \tag{35.22}$$

$$\mathbf{e}_{+'} = \mathbf{e}_+\cos 2\theta + \mathbf{e}_\times\sin 2\theta; \quad \mathbf{e}_{\times'} = -\mathbf{e}_+\sin 2\theta + \mathbf{e}_\times\cos 2\theta.$$

Как обобщаются эти законы преобразования для линейно поляризованных базисных состояний поля излучения с произвольным спином S?

---

[1]) Имеется в виду ортогональность не в пространственном смысле, а в квантовомеханическом (независимость состояний).— *Прим. перев.*

35.7. Эллиптическая поляризация УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрите эллиптически поляризованные гравитационные волны, следуя по тому же пути, что и при обсуждении волн с линейной и круговой поляризацией (фиг. 35.2).

§ 35.7. ЭНЕРГИЯ-ИМПУЛЬС, ПЕРЕНОСИМЫЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ

В упражнении 18.5 показано, что в принципе возможно построить детекторы, которые отбирают энергию у гравитационных волн. Следовательно, эти волны должны переносить энергию.

К сожалению, вывод и обоснование выражения для энергии гравитационных волн требует более тонкого подхода, чем линеаризованная теория. Такой подход будет развит ниже в этой главе (§ 35.13 и 35.15). Но для тех, кто читает только курс 1, мы приведем здесь основные результаты.

Приближенный характер локализации энергии в гравитационной волне

Согласно рассмотрению в § 19.4 и 20.4, энергия-импульс, переносимый гравитационной волной, не может быть локализован в области, размеры которой меньше длины волны. Нельзя сказать, переносится ли энергия гребнем, впадиной или «склоном» волны. Однако *можно* сказать, что определенное количество энергии и импульса содержится в данной «макроскопической» области (области с размерами в несколько длин волн); таким образом, можно говорить о тензоре *эффективного* размазанного энергии-импульса гравитационной волны $T^{(GW)}_{\mu\nu}$. В (почти) инерциальной системе отсчета линеаризованной теории $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ дается выражением

Тензор эффективного энергии-импульса для гравитационных волн:

1) выраженный через возмущения метрики

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\langle h^{TT}_{jk,\,\mu} h^{TT}_{jk,\,\nu}\rangle, \tag{35.23}$$

где $\langle\ \rangle$ обозначает усреднение по нескольким длинам волн, а h^{TT}_{jk} — (калибровочно инвариантная) поперечная бесследовая часть $h_{\mu\nu}$, которая при TT-калибровке совпадает с h_{jk}. Другое выражение для $T^{(GW)}_{\mu\nu}$, справедливое для любой калибровки с $\bar{h} \neq 0$, $\bar{h}^{\alpha}_{\mu,\,\alpha} \neq 0$ и $\bar{h}_{0\mu} \neq 0$, имеет вид

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\left\langle \bar{h}_{\alpha\beta,\,\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu}\bar{h}_{,\nu} - \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu} - \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\bar{h}_{\alpha\nu,\,\mu}\right\rangle. \tag{35.23'}$$

Дивергенция этого тензора энергии-импульса, как и любого другого тензора энергии-импульса, в вакууме равна нулю:

2) подчиняется закону сохранения энергии

$$T^{(GW)\,\nu}_{\mu\ \ ;\,\nu} = 0; \tag{35.24}$$

как и любой другой тензор энергии-импульса, он дает вклад в крупномасштабную фоновую кривизну (которая не учитывается линеа-

ризованной теорией)

3) его роль как источника фоновой кривизны

$$G^{(B)}_{\mu\nu} = 8\pi\,(T^{(GW)}_{\mu\nu} + T^{(\text{вещество})}_{\mu\nu} + T^{(\text{др. поля})}_{\mu\nu}). \qquad (35.25)$$

Записывая здесь член $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ для эффективной размазанной плотности энергии гравитационной волны, мы тем самым запрещаем какое-либо дополнительное введение гравитационных волн в уравнение Эйнштейна. В противном случае это могло бы привести к тому, что вклад в фоновую кривизну пространства одной волны учитывался бы дважды, хотя он и выражался бы с помощью весьма различных формализмов.

4) для плоской монохроматической волны

Согласно уравнению (35.23), тензор энергии-импульса для плоской волны

$$h_{\mu\nu} = \Re\,\{(A_+ e_{+\mu\nu} + A_\times e_{\times\mu\nu})\, e^{-i\omega(t-z)}\} \qquad (35.26)$$

есть

$$T^{(GW)}_{tt} = T^{(GW)}_{zz} = -T^{(GW)}_{tz} = \frac{1}{32\pi}\,\omega^2\,(|A_+|^2 + |A_\times|^2). \qquad (35.27)$$

Отметим, что радиус фоновой кривизны $\mathscr{R}$ (о котором в линеаризованной теории умалчивается), приведенная длина волны λ (равная $\lambda/2\pi$) и амплитуда гравитационной волны $\mathscr{A}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}^{-2} &\sim \text{типичная величина компонент } R^{(B)}_{\alpha\beta\gamma\delta},\\
&\sim T^{(GW)}_{\mu\nu} \sim \mathscr{A}^2/\lambda^2, \text{ если } T^{(GW)}_{\mu\nu} \text{ — главный источник фоновой кривизны,}\\
&\gg T^{(GW)}_{\mu\nu} \sim \mathscr{A}^2/\lambda^2, \text{ если } T^{(GW)}_{\mu\nu} \text{ — не главный источник.}
\end{aligned}$$

Следовательно, безразмерные числа $\mathscr{A}$ и $\lambda/\mathscr{R}$ связаны друг с другом соотношением

$$\mathscr{A} \lesssim \lambda/\mathscr{R}. \qquad (35.28)$$

Условия справедливости формализма гравитационных волн

Таким образом, *если безразмерная амплитуда волны близка к единице, то вся концепция мелкомасштабной ряби, распространяющейся на фоне крупномасштабной кривизны, нарушается и весь формализм этой главы становится бессмысленным. Понятие гравитационной волны имеет смысл только в том случае, когда наряду с неравенством* $\lambda \ll \mathscr{R}$ *выполняется неравенство* $\mathscr{A} \ll 1$!

§ 35.8. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В НЕУПРОЩЕННОЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Нелинейные эффекты в физике гравитационных волн:

Искривление фонового пространства-времени энергией гравитационных волн — это лишь один из многих эффектов, с которыми мы сталкиваемся, переходя от линеаризованной теории к неупрощенной нелинейной общей теории относительности.

В линеаризованной теории можно рассматривать локализован-

ный источник гравитационных волн (например, колеблющуюся болванку) в состоянии стационарного колебания; при этом источник излучал строго периодическую волну. Но точная теория требует, чтобы энергия источника испытывала вековое уменьшение в точном соответствии с энергией, уносимой излучением (закон сохранения энергии; торможение гравитационным излучением; § 36.8 и 36.11). Это запрещает существование строго периодической волны, хотя волна, достаточно близкая к периодической, конечно, может излучаться [221, 222].

1) торможение излучением

В реальной Вселенной пространственно-временные кривизны обусловлены не только гравитационными волнами, но также и главным образом веществом, заполняющим Вселенную (планетами, звездами, галактиками). Когда гравитационная волна распространяется через эти кривизны, ее волновой фронт меняет форму («рефракция»), длина волны изменяется (гравитационное красное смещение), и волна до некоторой степени испытывает обратное рассеяние на кривизнах. Если волна представляет собой короткий импульс, то обратное рассеяние приводит к изменению формы волны и ее поляризации и к образованию так называемых «хвостов», которые простираются позади движущегося импульса и распространяются со скоростью, меньшей, чем скорость света (упражнение 32.10, а также [223—227]). Однако, до тех пор пока $\mathscr{A} \ll 1$ и $\lambda/\mathscr{R} \ll 1$, локально эти эффекты крайне незначительны. Они могут проявляться на расстояниях порядка $\mathscr{R}$, а в некоторых случаях не проявляются и на таких расстояниях. Таким образом, линеаризованная теория локально продолжает оставаться достаточно точной. Даже в воображаемой вселенной, в которой нет ничего, кроме гравитационных волн, обратное рассеяние и хвосты обусловлены взаимодействием волн с фоновой кривизной, которую создают сами волны.

2) рефракция

3) красное смещение

4) обратное рассеяние

5) хвосты

Если приведенная длина волны $\lambda = \lambda/2\pi$ и масса-энергия m волнового импульса удовлетворяют неравенству $\lambda \ll m$, то возможно (в принципе) сфокусировать импульс в области с размером $r < m$; в результате часть энергии импульса подвергнется гравитационному коллапсу, оставив после себя черную дыру (см. [228] и стр. 7—24 работы [140]). Если напряженность поля меньше определенного критического значения, то ни одна из частей импульса не будет испытывать такого коллапса. Но после сжатия импульс все-таки испытает некоторую задержку перед новым расширением. Эта задержка может быть измерена в асимптотически плоском пространстве вдали от той области, где незадолго до этого энергия испытала мгновенную фокусировку до размеров порядка λ.

6) самогравитация

В общей теории относительности все эти эффекты можно изучать, пользуясь приближенными схемами, которые в первом порядке аналогичны или тождественны линеаризованной теории. Ниже (в § 35.13—35.15) будет развита одна из таких приближенных схем. Но сначала полезно изучить какое-либо точное решение, в котором проявляются некоторые из этих эффектов.

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. Для подготовки к ней не требуется предшествующий материал курса 2, но полезно знакомство с гл. 20 (законы сохранения) и § 22.5 (геометрическая оптика). Эта часть главы не является обязательной в качестве подготовительного материала к какой-либо из последующих глав.

§ 35.9. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Любое точное решение для гравитационной волны, которому можно придать компактную математическую форму, обязательно будет в высшей степени идеализированным решением, в противном случае невозможно преодолеть все те трудности, на которые указывалось выше. Следовательно, математически точные решения полезны лишь в педагогических целях. Однако не следует чуждаться педагогики: она необходима не только студентам, но и тем, кто уже давно работает в области теории относительности, но даже сегодня лишь начинает вырабатывать интуитивное понимание нелинейного характера геометродинамики!

Точное решение уравнения поля в вакууме для плоской волны

Из всей обширной литературы, посвященной точным решениям, мы выбрали как компромисс между реалистичностью и сложностью следующую плоскую волну [163, 229]:

1) вид метрики

$$ds^2 = L^2(e^{2\beta}\,dx^2 + e^{-2\beta}\,dy^2) + dz^2 - dt^2 = \\ = L^2(e^{2\beta}\,dx^2 + e^{-2\beta}\,dy^2) - du\,dv. \qquad (35.29a)$$

Здесь

$$u = t - z, \quad v = t + z, \quad L = L(u), \quad \beta = \beta(u). \qquad (35.29б)$$

Возможный вид функций $L(u)$ («фоновый фактор») и $\beta(u)$ («волновой фактор») определяется уравнениями поля в вакууме. В нулевой системе координат u, v, x, y единственная компонента тензора Риччи, не обращающаяся тождественно в нуль, есть (см. дополнение 14.4, учитывая различие в координатах, $2v_{\text{там}} = v_{\text{здесь}}$)

2) генерация «фонового фактора» L «волновым фактором» β

$$R_{uu} = -2L^{-1}[L'' + (\beta')^2 L], \qquad (35.30)$$

где штрихом обозначается d/du. Таким образом, уравнения Эйнштейна в вакууме принимают вид

$$L'' + (\beta')^2 L = 0 \qquad (35.31)$$

(«влияние волнового фактора на фоновый фактор»).

3) предельный случай линеаризации

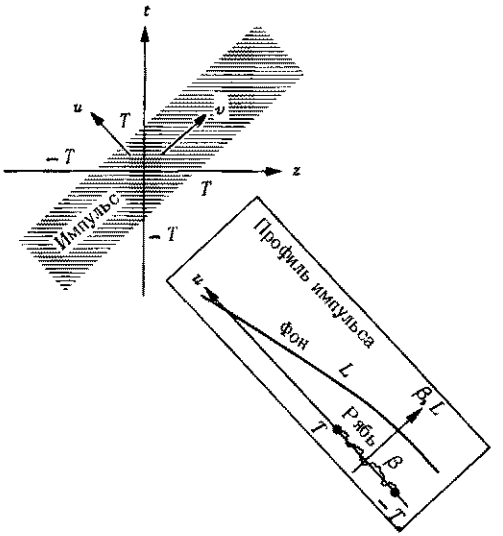
В линеаризованном варианте это уравнение имеет вид $L'' = 0$, поскольку $(\beta')^2$ — величина второго порядка малости. Поэтому соответствующее решение в линеаризованной теории есть

$$L = 1, \quad \beta(u) \quad \text{произвольно, но мало.}$$

Соответствующая метрика определяется выражением

$$ds^2 = (1 + 2\beta)\,dx^2 + (1 - 2\beta)\,dy^2 + dz^2 - dt^2, \quad \beta = \beta(t - z). \qquad (35.32)$$

Заметим, что это плоская волна с поляризацией $\mathbf{e}_+$, распространяющаяся в направлении z. (См. упражнение 35.10 в конце § 35.12,



ФИГ. 35.3.
Пространственно-временная диаграмма и профиль импульса точного решения эйнштейновских уравнений поля для плоской волны. Метрика имеет вид

$$ds^2 = L^2 (e^{2\beta}\, dx^2 + e^{-2\beta}\, dy^2) + dz^2 - dt^2.$$

«Волновой фактор» $\beta(u) \equiv \beta(t-z)$ (мелкомасштабная рябь) и «фоновый фактор» $L(u) \equiv L(t-z)$ (крупномасштабное искривление фоновой геометрии из-за эффективной массы энергии гравитационной волны в виде «ряби») показаны на фигуре, а также даны в аналитической форме в (35.33).

где решение обобщается на случай волны, обладающей обеими поляризациями $\mathbf{e}_+$ и $\mathbf{e}_\times$.)

4) частный случай: импульс плоской волны

Вернемся к точной плоской волне и сосредоточим свое внимание на том случае, когда «волновой фактор» $\beta(u)$ представляет собой короткий импульс продолжительностью $2T$ и $|\beta'| \ll 1/T$ на протяжении всего импульса. Тогда точное решение (фиг. 35.3) имеет вид: 1) при $u < -T$ (плоское пространство-время; импульс еще не пришел)

$$\beta = 0, \quad L = 1; \tag{35.33а}$$

2) при $-T < u < +T$ (внутренняя область импульса)

$$\beta = \beta(u) \text{ произвольно, кроме ограничения } |\beta'| \ll 1/T, \tag{35.33б}$$

$$L(u) = 1 - \int_{-T}^{u} \left\{ \int_{-T}^{\bar{u}} [\beta'(\bar{\bar{u}})]^2\, d\bar{\bar{u}} \right\} d\bar{u} + O([\beta' T]^4);$$

3) при $u > T$ (после прохождения импульса)

$$\beta = 0, \quad L = 1 - \frac{u}{a}, \quad a \equiv \frac{1}{\int_{-T}^{T} (\beta')^2\, du} + \frac{O([\beta' T]^2)}{\int_{-T}^{T} (\beta')^2\, du}. \tag{35.33в}$$

Прежде чем обсуждать физическую интерпретацию этого точного решения, необходимо рассмотреть сингулярность в метрических коэффициентах при $u = a \gg T$ (при этом $L = 0$, так что $g_{xx} = g_{yy} = 0$). Является ли это физической сингулярностью, подобной области $r = 0$ в геометрии Шварцшильда, или это всего лишь координатная сингулярность, похожая на $r = 2M$ в шварцшильдовских координатах (гл. 31—33)? Для метрики (35.29) отличны от нуля лишь следующие компоненты тензора Римана (см. дополнение 14.4):

$$R^x_{uxu} = \frac{1}{2} R_{uu} - \beta'' - 2(L'/L)\beta', \qquad R^y_{uyu} = \frac{1}{2} R_{uu} + \beta'' + 2(L'/L)\beta'. \tag{35.34}$$

5) пространство-время является плоским вне импульса

Более того, обе эти компоненты обращаются в нуль в любой протяженной области, где $\beta = 0$. Таким образом, *пространство-время является абсолютно плоским в тех областях, где «волновой фактор» обращается в нуль — что имеет место всюду вне импульса*! В частности, пространство-время является плоским вблизи $u = a$, так что сингулярность в этом месте должна носить координатный характер, а не физический. Чтобы исключить эту сингулярность, можно произвести преобразование координат

$$x = \frac{X}{1 - U/a}, \quad y = \frac{Y}{1 - U/a}, \quad u = U, \quad v = V + \frac{X^2 + Y^2}{a - U} \tag{35.35}$$

по всей области, лежащей в будущем по отношению к импульсу ($u > T$), где

$$ds^2 = (1 - u/a)^2 (dx^2 + dy^2) - du\, dv. \tag{35.36а}$$

В новых координатах X, Y, U, V метрика явно соответствует плоскому пространству-времени

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU\, dV \quad \text{при} \quad U = u > T. \tag{35.36б}$$

УПРАЖНЕНИЯ

35.8. Координаты для плоской волны, не имеющие координатной сингулярности [163]

Найдите координатное преобразование, подобное (33.35), которое приводит точное решение для плоской волны (35.29а), (35.31) к виду

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU\, dV + (X^2 - Y^2) F\, dU^2, \tag{35.37}$$

$F = F(U)$ абсолютно произвольно.

Достоинство этой системы координат в том, что в ней отсутствует координатная сингулярность, в то время как первоначальная система была хороша тем, что в ней было легко перейти к линеаризованной теории и интерпретировать действие волны на пробные частицы.

2

УПРАЖНЕНИЯ

35.9. Геодезическая полнота многообразия, связанного с плоской волной [163]

Докажите, что система координат (X, Y, U, V), введенная в упражнении 35.8, полностью покрывает описываемое ею пространственно-временное многообразие. В частности, покажите, что любая геодезическая может быть продолжена в обоих направлениях сколь угодно далеко по аффинному параметру, не выходя при этом за пределы системы координат (X, Y, U, V). (Это свойство называется *геодезической полнотой*.) [*Указание.* Выберите произвольное событие и в нем произвольный тангенциальный вектор $d/d\lambda$. Ими определяется произвольная геодезическая. Проделайте преобразование координат, оставляющее неизменным вид метрики, таким образом, чтобы $d/d\lambda$ в новой системе координат принадлежал либо 2-поверхности $(\tilde{U}, \tilde{V}) = \text{const}$, либо 2-поверхности $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{const}$. Проверьте, что эти системы координат покрывают одну и ту же область пространства-времени. Затем исследуйте полноту геодезических, описываемых векторами $d/d\lambda$ в координатах $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{U}, \tilde{V})$.]

§ 35.10. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОЧНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Пространство-время является абсолютно плоским как до прихода импульса плоской волны ($u < -T$), так и после его прохождения ($u > T$). Об этом говорилось в предыдущем параграфе.

Плоский характер пространства-времени вне гравитационно-волнового импульса не является типичным

Совершенно плоский характер пространства-времени вне импульса очень не типичен для гравитационных волн в неупрощенной нелинейной общей теории относительности. В этом примере так получилось лишь потому, что волновые фронты (поверхности постоянных u и v, т. е. постоянных z и t) являлись совершенно плоскими 2-поверхностями. Если бы фронты были изогнутыми (например, сферическими), то энергия, переносимая импульсом, создавала бы кривизну пространства-времени и вне импульса.

Действие точного гравитационно-волнового импульса на пробные частицы:

Чтобы представить себе нелинейный характер действия волны, перейдем от геометрии вне импульса, где она является плоской, к воздействию импульса на свободные пробные частицы. Рассмотрим семейство частиц, каждая из которых до прихода импульса покоится по отношению к первоначальной системе координат t, x, y, z [мировые линии $(x, y, z) = \text{const}$]. Затем даже в момент прохождения импульса и после того, как он уже прошел, частицы продолжают покоиться по отношению к этой системе координат. [Это утверждение справедливо для любой метрики типа (35.29а), если $g_{0\mu} = -\delta^0{}_\mu$, так что $\Gamma^\mu{}_{00} = 0$ и поэтому $x^\mu = \delta^\mu{}_0\tau + \text{const}$ является решением уравнения геодезических.]

1) поперечный характер относительных ускорений

Между двумя частицами, лежащими вдоль направления распространения импульса (z-направления), постоянным является не только координатное расстояние $\Delta x = \Delta y = 0$ и $\Delta z \neq 0$, но и истинное расстояние между частицами $\Delta s = g_{zz}^{1/2}\,\Delta z = \Delta z$. Следовательно, точная плоская волна является чисто поперечной, так же как и плоская волна в линеаризованной теории.

Если соседние частицы расположены перпендикулярно направлению распространения ($\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$, $\Delta z = 0$), то импульс, проходя мимо частиц, изменит истинное расстояние между ними:

$$\Delta s = L(t-z)\,[e^{2\beta(t-z)}\,(\Delta x)^2 + e^{-2\beta(t-z)}\,(\Delta y)^2]^{1/2} \approx$$
$$\approx L\,[(1+2\beta)\,(\Delta x)^2 + (1-2\beta)\,(\Delta y)^2]^{1/2}. \qquad (35.38)$$

2) гравитационное притяжение, обусловленное энергией, заключенной в импульсе

На обычное колебание, типичное для линеаризованной теории и обусловленное «волновым фактором» β, накладывается очень малое, не связанное с этим фактором ускорение частиц по направлению друг к другу, вызываемое «фоновым фактором» L [обратите внимание на вид величины $L(u)$ на фиг. 35.3]. Это ускорение почти ньютоновского типа, и объясняется оно гравитационным притяжением энергии, которую гравитационная волна проносит между двумя частицами. Полный эффект всей прошедшей мимо частиц энергии заключается в следующем: если первоначально частицы покоились одна по отношению к другой, то в конечном состоянии они движутся относительно друг друга со скоростью

$$v_{\text{конечн}} = d\Delta s/dt = d\,(L\Delta s_i)/dt = -\Delta s_i/a, \qquad (35.39)$$

где

$$\Delta s_i = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2} = (\text{начальное расстояние между частицами}).$$

[Напомним, что $L_{\text{начальн}} = 1$, $L_{\text{конечн}} = 1 - u/a = 1 - (t-z)/a$, уравнение (35.33).

Точно такой же эффект создает импульс электромагнитных волн (§ 35.11).

§ 35.11. СРАВНЕНИЕ ТОЧНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ГРАВИТАЦИОННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНОЙ

Рассмотрим метрику

$$ds^2 = L^2(u)\,(dx^2 + dy^2) - du\,dv, \quad \left\{\begin{matrix} u = t-z \\ v = t+z \end{matrix}\right\}, \qquad (35.40)$$

Электромагнитный импульс в виде плоской волны

которая всегда является плоской, если удовлетворяет уравнениям Эйнштейна в вакууме ($R_{\mu\nu} = 0$ или $L'' = 0$), и поэтому не может представлять собой метрику гравитационной волны. В этой метрике электромагнитный потенциал

$$\mathbf{A} = A_\mu\,\mathbf{d}x^\mu = \mathscr{A}(u)\,\mathbf{d}x \qquad (35.41)$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла при произвольном $\mathscr{A}(u)$. Этот потенциал представляет плоскую электромагнитную волну, аналогичную плоской гравитационной волне, которой посвящено несколько последних параграфов. Единственными отличными от нуля компонентами поля этой волны являются

$$F_{ux} = \mathscr{A}', \quad \text{т. е.} \quad F_{tx} = -F_{zx} = \mathscr{A}', \tag{35.42}$$

так что электрический вектор колеблется в x-направлении, магнитный вектор колеблется в y-направлении, а волна распространяется в z-направлении. В координатах (x, y, u, v) отлична от нуля лишь компонента тензора энергии-импульса

$$T_{uu} = (4\pi L^2)^{-1} (\mathscr{A}')^2. \tag{35.43}$$

Потенциал (35.41) в фоновой метрике (35.40) уже удовлетворяет уравнениям Максвелла, в чем читатель может убедиться сам. Чтобы сделать приемлемой саму метрику, нужно лишь наложить на нее уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. Они запишутся в виде [см. уравнение (35.30) при $\beta = 0$]

$$L'' + (4\pi T_{uu})\, L = 0. \tag{35.44}$$

Это в точности совпадает по форме с уравнением $L'' + (\beta')^2 L = 0$ для гравитационной волны. Следовательно, относительное движение пробных частиц под действием «фонового фактора» одинаково независимо от того, создается ли $L(u) \neq 1$ энергией-импульсом электромагнитной волны или же соответствующей гравитационной волной, для которой

$$[(\beta')^2/4\pi]_{\text{грав. волны}} = [T_{uu}]_{\text{э. м. волны}} = (\mathscr{A}')^2/4\pi L^2. \tag{35.45}$$

Плоские электромагнитная и гравитационная волны создают одинаковое гравитационное притяжение

Можно провести более близкую аналогию. Будем уменьшать длины рассматриваемых волн, оставляя при этом $(\beta')^2/4\pi$ и $(\mathscr{A}')^2/4\pi L^2$ фиксированными:

$$\langle (\beta')^2/4\pi \rangle = \langle (\mathscr{A}')^2/4\pi L^2 \rangle = \text{const}, \quad \lambda \to 0.$$

В пределе очень малых длин волн (т. е. для характерных размеров $\gg \lambda$) эти два решения совершенно неразличимы. Соответствующие им метрики тождественны ($\lambda \to 0$ и $\langle (\beta')^2 \rangle = \text{const}$ означает, что $\beta \to 0$), и колебание, которое испытывают пробные частицы в том и в другом случае, слишком мало, чтобы его можно было заметить. Поддается обнаружению только создаваемое этими волнами искривление пространства-времени ($L \neq 1$) и связанное с ним гравитационное притяжение.

§ 35.12. НОВАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ НА ТОЧНУЮ ПЛОСКУЮ ВОЛНУ

Пересмотр плоских гравитационных волн на языке «коротковолнового приближения»:

Проведенное выше сравнение приводит к точке зрения, которая уже затрагивалась во введении к этой главе и в § 35.8. Будем представлять себе точное решение для гравитационной плоской волны [фиг. 35.3, уравнения (35.29) и (35.33)] как рябь на пространствен-

1) различие между рябью и фоном

но-временной кривизне, описываемую фактором $\beta(u)$ и распространяющуюся на фоне слегка искривленного пространства-времени, которое характеризуется фактором $L(u)$. Наиболее яркое различие между рябью и фоном заключается не в величине их пространственно-временных кривизн, а в их характерных длинах. Характерная длина для ряби

$$\lambda\!\!\!^{-} \equiv (\text{типичная приведенная длина волны } \lambda/2\pi). \quad (35.46)$$

характерная длина для фона («радиус кривизны фоновой геометрии»)

$$\mathscr{R} \sim |L/L''|^{1/2}_{\text{внутри волны}} \sim 1/|\beta'|. \quad (35.47)$$

Напомним, что $\lambda\!\!\!^{-}$ несколько меньше протяженности импульса $2T$. Напомним также, что $|\beta' T| \ll 1$. Мы приходим к выводу, что характерные длины для «волнового фактора» и для «фонового фактора» сильно различаются:

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathscr{R}. \quad (35.48)$$

Эта разница в масштабах позволяет отделить фон от ряби.

Масштаб ряби много меньше фонового ($\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathscr{R}$). Однако локальная кривизна в ряби соответственно больше, чем фоновая кривизна [выражения (35.30), (35.34)], так что

$$\begin{aligned} &(R^x_{uxu})_{\text{фон}} = (R^y_{uyu})_{\text{фон}} = -L''/L \sim 1/\mathscr{R}^2, \\ &(R^x_{uxu})_{\text{волна}} = -(R^y_{uyu})_{\text{волна}} = -\beta'' \sim \\ &\sim |\beta'|/\lambda\!\!\!^{-} \sim 1/(\lambda\!\!\!^{-}\mathscr{R}) \sim (\mathscr{R}/\lambda\!\!\!^{-})\,(R^x_{uxu})_{\text{фон}}. \end{aligned} \quad (35.49)$$

Это напоминает неровности на поверхности апельсина!

Фоновая метрика для гравитационной плоской волны та же, что и для плоской электромагнитной волны [выражение (35.40)]:

$$ds^2 = g^{(B)}_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu = L^2\,(dx^2 + dy^2) - du\,dv. \quad (35.50)$$

Сравнивая с (35.29а), мы видим, что метрика для полного пространства-времени (фон плюс рябь) есть

$$ds^2 = (g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\,dx^\mu\,dx^\nu, \quad (35.51)$$

$$h_{xx} = -h_{yy} = 2\beta, \quad \text{все другие } h_{\mu\nu} = 0. \quad (35.52)$$

2) распространение ряби по фону

(Напомним, что в той области, где $\beta \neq 0$, L почти равно единице.) Можно представлять себе рябь, как поперечное симметричное тензорное поле $h_{\mu\nu}$ со следом, равным нулю, аналогичное электромагнитному полю A_μ, распространяющемуся по фоновой геометрии. Точно так же, как электромагнитное поле создает фоновую кривизну благодаря

$$G_{uu} = -2L''/L = 8\pi T_{uu},$$

гравитационно-волновая рябь $h_{\mu\nu}$ создает фоновую кривизну согласно уравнению (35.31), которое можно переписать в виде

$$G^{(B)}_{uu} = -2L''/L = 8\pi T^{\text{эфф}}_{uu}. \tag{35.53}$$

Здесь

$$T^{(\text{эфф})}_{uu} \equiv \frac{1}{4\pi}(\beta')^2 = \frac{1}{32\pi} h_{jk,u} h_{jk,u} \tag{35.54}$$

3) эффективный тензор энергии-импульса для ряби

есть «эффективный тензор энергии-импульса» гравитационных волн. Заметим, что с точностью до усреднения он совпадает с выражением (35.23), которое было выписано без доказательства в § 35.7.

35.10. Плоская волна, в которой представлены обе поляризации УПРАЖНЕНИЕ

Точное решение (35.29) является плоской волной с поляризацией $\mathbf{e}_+$. Постройте аналогичное решение, содержащее две произвольные амплитуды $\beta(u)$ и $\gamma(u)$ для поляризаций $\mathbf{e}_+$ и $\mathbf{e}_\times$. Обобщите на это решение все то, что обсуждалось в § 35.9—35.12.

---

§ 35.13. КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В оставшейся части этой главы указанная выше точка зрения строгим образом распространяется на весьма общие решения для гравитационных волн. Это обобщение, называемое «коротковолновым формализмом», было разработано в основном Айзаксоном [230, 231], хотя этот формализм строился на фундаменте, заложенном Уилером [256], а также Бриллем и Хартлем [232]. Еще более строгие варианты этого формализма в ВКБ-приближении, или в приближении геометрической оптики, разработали Шоке-Бруа [233], а также Мак-Коллом и Тауб.

Основы коротковолнового формализма:

Рассмотрим гравитационные волны, распространяющиеся в *пустом* фоновом пространстве-времени. Как и в § 35.7, допустим, что $\mathscr{R}$ — характерный радиус фоновой кривизны, λ и $\mathscr{A}$ — приведенная длина волны ($\lambda/2\pi$) и амплитуда волны; потребуем, чтобы $\mathscr{A} \ll 1$ и $\lambda/\mathscr{R} \ll 1$. Фоновая кривизна может быть полностью обусловлена самими волнами или же частично волнами, а частично расположенными поблизости веществом и полями негравитационного типа.

1) определение величин $\mathscr{R}$, λ и $\mathscr{A}$

2) требования $\mathscr{A} \ll 1$ и $\lambda/\mathscr{R} \ll 1$

При анализе используется система координат, которая «приводится в точное соответствие» с пространством-временем в том смысле, что метрические коэффициенты могут быть разложены на «фоновые» коэффициенты и возмущения:

3) расщепление метрики на фон и возмущение; «стационарные координаты»

$$g_{\mu\nu} = g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{35.55}$$

Возмущения и фон обладают следующими свойствами: 1) амплитуда возмущений $\mathcal{A}$ такова, что

$$h_{\mu\nu} \lesssim (\text{типичное значение } g^{(B)}_{\mu\nu}) \cdot \mathcal{A}; \tag{35.56а}$$

2) [характерный масштаб изменения $g^{(B)}_{\mu\nu}$] $\gtrsim \mathcal{R}$,

$$g^{(B)}_{\mu\nu,\,\alpha} \lesssim (\text{типичное значение } g^{(B)}_{\mu\nu})/\mathcal{R}; \tag{35.56б}$$

3) [характерный масштаб изменения $h_{\mu\nu}$] $\sim \lambda$,

$$h_{\mu\nu,\,\alpha} \sim (\text{типичное значение } h_{\mu\nu})/\lambda. \tag{35.56в}$$

Такие координаты называют *стационарными*.

4) расщепление тензора кривизны Риччи

Как показывают довольно длинные вычисления (см. упражнение 35.11), тензор Риччи для метрики, разложенной в виде (35.55), есть

$$R_{\mu\nu} = R^{(B)}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu}(h) + R^{2}_{\mu\nu}(h) + \text{ошибка}. \tag{35.57}$$
$$\qquad ? \qquad\quad \mathcal{A}/\lambda^2 \qquad\quad \mathcal{A}^2/\lambda^2 \qquad\quad \mathcal{A}^3/\lambda^2$$

Здесь под каждым членом указан порядок его величины ($\mathcal{A}/\lambda^2$ и т. д.); $R^{(B)}_{\mu\nu}$ — тензор Риччи для фоновой метрики $g^{(B)}_{\mu\nu}$; $R^{(1)}_{\mu\nu}$ и $R^{(2)}_{\mu\nu}$ — следующие выражения:

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) \equiv \frac{1}{2}\left(-h_{|\mu\nu} - h_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha} + h_{\alpha\mu|\nu}{}^{\alpha} + h_{\alpha\nu|\mu}{}^{\alpha}\right), \tag{35.58а}$$

$$R^{(2)}_{\mu\nu}(h) \equiv \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}h_{\alpha\beta|\mu}h^{\alpha\beta}{}_{|\nu} + h^{\alpha\beta}\left(h_{\alpha\beta|\mu\nu} + h_{\mu\nu|\alpha\beta} - h_{\alpha\mu|\nu\beta} - h_{\alpha\nu|\mu\beta}\right) + h_{\nu}{}^{\alpha|\beta}\left(h_{\alpha\mu|\beta} - h_{\beta\mu|\alpha}\right) - \left(h^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \frac{1}{2}h^{|\alpha}\right) \times \left(h_{\alpha\mu|\nu} + h_{\alpha\nu|\mu} - h_{\mu\nu|\alpha}\right)\Big]. \tag{35.58б}$$

В этих выражениях и ниже индексы поднимаются и опускаются с помощью $g^{(B)}_{\mu\nu}$, а вертикальная черта обозначает ковариантную производную по отношению к $g^{(B)}_{\mu\nu}$ (в то время как в гл. 21 она обозначает ковариантную производную по отношению к 3-геометрии).

Расщепление уравнений поля в вакууме

Основу коротковолнового формализма составляет присущий ему метод решения уравнений поля в вакууме $R_{\mu\nu} = 0$. Эти уравнения расщепляются на «волновую часть» ($\sim \mathcal{A}$), «крупномасштабную часть» ($\sim \mathcal{A}^2$; гладкая в масштабе λ) и «флуктуационные поправки» ($\sim \mathcal{A}^2$; рябь в масштабе λ). Сначала выделим из выражения (35.57) часть $\mathcal{A}$, линейную по амплитуде волны, и положим ее равной нулю. Искривление фона под действием волн есть нелинейный эффект (линеаризованная теория не дает даже намека на этот эффект), поэтому $R^{(B)}_{\mu\nu}$ не может быть линейным по $\mathcal{A}$. Следовательно, в выражении (35.57) $R^{(1)}_{\mu\nu}(h)$ является единственным

линейным членом, и он должен обращаться в нуль:

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0. \tag{35.59а}$$

[Конечно, $h_{\mu\nu}$ может содержать нелинейные поправки (назовем их $j_{\mu\nu}$) порядка $\mathcal{A}^2$, не входящие в это линейное уравнение. Они будут определены ниже в (35.59в).]

После этого то, что осталось от $R_{\mu\nu}$, разделим на две части: одна из них не содержит ряби, т. е. она изменяется лишь в масштабах, много больших, чем λ («крупномасштабный подход»), а вторая содержит флуктуации. Это разделение может быть осуществлено путем усреднения по нескольким длинам волн (точное рассмотрение процесса усреднения см. в упражнении 35.14; см. также работу [233], где приведен класс решений, для которых подобное усреднение не требуется):

$$\underset{?}{R^{(B)}_{\mu\nu}} + \underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle} + \underset{\mathcal{A}^3/\lambda^3}{\text{ошибка}} = 0 \quad \left[\begin{array}{c}\text{гладкая}\\ \text{часть}\end{array}\right], \tag{35.59б}$$

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(j) + R^{(2)}_{\mu\nu}(h) - \langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle + \text{ошибка} = 0 \left[\begin{array}{c}\text{флуктуирующая}\\ \text{часть}\end{array}\right]. \tag{35.59в}$$

$\mathcal{A}^2/\lambda^2$ $\mathcal{A}^2/\lambda^2$ $\mathcal{A}^2/\lambda^2$ $\mathcal{A}^3/\lambda^3$

— [нелинейная поправка к h

Вот и все! Осталось лишь привести уравнения к удобной для работы форме и дать более полную физическую интерпретацию.

Физическая интерпретация трех частей уравнений поля:

1) распространение волн

2) создание фоновой кривизны энергией волн; определение тензора $T^{(GW)}_{\mu\nu}$

Начнем с интерпретации. Уравнение (35.59а) — это уравнение распространения гравитационных волн $h_{\mu\nu}$.

Уравнение (35.59б) показывает, каким образом энергия-импульс волн порождает фоновую кривизну. Его можно переписать в более удобном виде:

$$G^{(B)}_{\mu\nu} \equiv R^{(B)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(B)} g^{(B)}_{\mu\nu} = 8\pi T^{(GW)}_{\mu\nu} \text{ в вакууме}, \tag{35.60}$$

где

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{8\pi}\left\{\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle - \frac{1}{2} g^{(B)}_{\mu\nu}\langle R^{(2)}(h)\rangle\right\} \tag{35.61}$$

есть тензор энергии-импульса гравитационных волн. Теперь мы видим, откуда появилось утверждение, сделанное в § 35.7, что энергию-импульс гравитационных волн можно корректно определить лишь в нелокальном смысле.

3) нелинейное взаимодействие волн

Наконец, уравнение (35.59в) показывает, каким образом гравитационные волны создают нелинейные поправки к самим себе (рассеяние волны на волне, гармоники основной частоты и т. д.). Эти эффекты более высокого порядка в настоящей главе исследоваться не будут.

УПРАЖНЕНИЕ

35.11. Коэффициенты связности и тензоры кривизны для возмущенной метрики

В специально выбранной системе координат для произвольного пространства-времени выпишите метрические коэффициенты в ковариантном представлении в форме

$$g_{\mu\nu} = g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{35.62а}$$

(После всех вычислений можно разделить $h_{\mu\nu}$ на две части: $h_{\mu\nu} \to \to h_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}$ и получить формулы, которые использовались в тексте.) Предположите, что характерная величина компонент $h_{\mu\nu}$ много меньше характерной величины компонент $g^{(B)}_{\mu\nu}$, поэтому можно разложить символы Кристоффеля и тензоры кривизны по степеням $h_{\mu\nu}$. Индексы в $h_{\mu\nu}$ поднимайте и опускайте с помощью $g^{(B)}_{\mu\nu}$ и обозначьте вертикальной чертой ковариантные производные по отношению к $g^{(B)}_{\mu\nu}$, а точкой с запятой — ковариантные производные по отношению к $g_{\mu\nu}$.

а. Здесь $g^{(B)}_{\mu\nu}$ и $g^{(B)}_{\mu\nu}$ нужно представлять себе как две различные метрики, сосуществующие в пространственно-временном многообразии. Покажите, что разность между соответствующими ковариантными производными $\nabla - \nabla^{(B)} \equiv \mathbf{S}$ (на самом деле разность между любыми двумя ковариантными производными) есть тензор с компонентами

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{(B)\mu}{}_{\beta\gamma}. \tag{35.62б}$$

(*Указание*. См. дополнение 10.3, Б.)

б. Покажите, что

$$g^{\mu\nu} = g^{(B)\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu} - h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\nu} + \ldots, \tag{35.62в}$$

а также что

$$g^{\mu\nu} = g^{(B)\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu} - h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta\gamma}g^{\gamma\nu}. \tag{35.62в'}$$

в. Вычисляя $g^{(B)}_{\mu\nu}$ в локально лоренцевой системе отсчета, а затем вновь переходя к первоначальной системе отсчета, покажите, что

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\alpha}\,(h_{\alpha\beta|\gamma} + h_{\alpha\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\alpha}), \tag{35.62г}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} - R^{(B)\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = S^{\alpha}{}_{\beta\delta|\gamma} - S^{\alpha}{}_{\beta\gamma|\delta} + S^{\alpha}{}_{\mu\gamma}S^{\mu}{}_{\beta\delta} - S^{\alpha}{}_{\mu\delta}S^{\mu}{}_{\beta\gamma}, \tag{35.62д}$$

$$R_{\beta\delta} - R^{(B)}{}_{\beta\delta} = S^{\alpha}{}_{\beta\delta|\alpha} - S^{\alpha}{}_{\beta\alpha|\delta} + S^{\alpha}{}_{\mu\alpha}S^{\mu}{}_{\beta\delta} - S^{\alpha}{}_{\mu\delta}S^{\mu}{}_{\beta\alpha}. \tag{35.62е}$$

г. Покажите, что выражение (35.62е) сводится к

$$R_{\beta\delta} = R^{(B)}{}_{\beta\delta} + R^{(1)}{}_{\beta\delta}(h) + R^{(2)}{}_{\beta\delta}(h) + \ldots, \tag{35.62ж}$$

где $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ определяются выражениями (35.58).

§ 35.14. ВЛИЯНИЕ ФОНОВОЙ КРИВИЗНЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

Сосредоточим внимание на уравнении $R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0$, описывающем распространение волн. Как в линеаризованной теории, здесь также намного проще исследовать распространение, пользуясь величинами

Определение $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h g^{(B)}_{\mu\nu} \tag{35.63}$$

вместо $h_{\mu\nu}$. Уравнение $R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0$, переписанное в терминах $\bar{h}_{\mu\nu}$, имеет вид

Уравнение распространения волн на искривленном фоне

$$\bar{h}_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha} + g^{(B)}_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\beta\alpha} - 2\bar{h}_{\alpha(\mu|\nu)}{}^{\alpha} + 2R^{(B)}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - 2R^{(B)}_{\alpha(\mu}\bar{h}_{\nu)}{}^{\alpha} = 0. \tag{35.64}$$

[Чтобы получить это уравнение, решим уравнение (35.63) относительно $h_{\mu\nu}$ и получим $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{(B)}_{\mu\nu}\bar{h}$; подставим это выражение в (35.58а) и приравняем результат нулю, затем поменяем местами ковариантные производные, используя тождество (16.6б); наконец, приведем подобные члены, чтобы получить выражения для $\bar{h}_{|\alpha}{}^{\alpha}$, и подставим его обратно в ранее полученное уравнение.]

Уравнение распространения (35.64) можно упростить специальным выбором калибровки. Инфинитезимальное преобразование координат

Выбор «лоренцевой калибровки»

$$x^{\mu}_{\text{нов}}(\mathcal{P}) = x^{\mu}_{\text{стар}}(\mathcal{P}) + \xi^{\mu}(\mathcal{P}) \tag{35.65а}$$

приводит к изменению функциональной формы метрических коэффициентов в первом порядке по амплитуде согласно соотношению

$$h_{\mu\nu\text{нов}}(x^{\alpha}_{\text{нов}}) = h_{\mu\nu\,\text{стар}}(x^{\alpha}_{\text{нов}}) - 2\xi_{(\mu|\nu)} \tag{35.65б}$$

(аналог калибровочного преобразования в линеаризованной теории, уравнение (35.3в); см. также упражнение 35.12). При подходящем выборе четырех функций ξ^{μ} в новой системе координат можно наложить четыре «условия лоренцевой калибровки»

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0 \tag{35.66}$$

(см. упражнение 35.13). Такой выбор калибровки аналогичен соответствующему выбору в линеаризованной теории. Он приводит к тому, что второй и третий члены в уравнении для распространения гравитационных волн обращаются в нуль. (Дополнительные калибровочные условия ТТ-типа см. в упражнении 35.13.)

Взаимодействие волн с тензором Риччи можно не учитывать

Последний член в уравнении распространения $-2R^{(B)}{}_{\alpha(\mu}\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu)}$ с точностью, равной точности метода, обращается в нуль по следующей причине: мы ограничились рассмотрением вакуума, поэтому единственным источником не равного нулю тензора Риччи служит энергия-импульс, переносимый самими гравитационными

волнами [уравнение (35.60)]; следовательно, $R^{(B)}_{\alpha\beta} \sim \mathcal{A}^2/\lambda^2$ и

$$R^{(B)}{}_{\alpha(\mu}\,\bar{h}_{\nu)}{}^{\alpha} \sim \mathcal{A}^3/\lambda^2. \tag{35.67}$$

Это величина того же порядка, что и поправка третьего порядка к тензору Риччи $R^{(3)}_{\mu\nu}(h)$, учет которой выходит за рамки рассматриваемого метода. Поэтому, чтобы быть последовательными и не превышать точность метода, этим членом мы пренебрегаем.

Кратко повторим все, что было изложено выше в этом параграфе: выбирая калибровку, в которой $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0$, и отбрасывая члены более высокого порядка, чем точность метода, мы получаем уравнение для распространения волн в вакууме

Уравнение распространения в лоренцевой калибровке и область его применимости

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}_{|\alpha}{}^{|\alpha} + 2R^{(B)}{}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \tag{35.68}$$

при выполнении условия лоренцевой калибровки

$$\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} = 0.$$

Уравнение (35.68) является точным в первом порядке по амплитуде [поправки $\sim \mathcal{A}^2$ содержатся в (35.59в)], и точность этого уравнения не зависит от отношения $\lambda/\mathcal{R}$, что можно видеть из уравнений (35.59). Таким образом, *его можно применять для слабых волн всегда, даже если длина волны велика*!

Перечень эффектов, отсутствующих и содержащихся в уравнении распространения

Всеми нелинейными взаимодействиями волны с самой же волной в этом уравнении распространения первого порядка по амплитуде мы пренебрегаем. Это уравнение не описывает также механизмы рассеяния волн друг на друге и на фоновой кривизне, которую создают сами волны, и какие бы то ни было намеки на изменение формы импульса, обусловленное самовзаимодействием волн при их распространении. Нет никаких признаков гравитационного коллапса, который, как мы знаем, должен иметь место, когда масса-энергия гравитационных волн m сжата в области с размером $\leqslant m$. Чтобы обнаружить все эти эффекты, мы должны обратиться к поправкам второго порядка по $\mathcal{A}$ и выше [например, к уравнениям (35.59в) и (35.60)].

Действительно содержатся в этом уравнении распространения все эффекты, обусловленные линейным влиянием фоновой кривизны на распространяющуюся волну. Эти эффекты исследуются для случая малых длин волн ($\lambda/\mathcal{R} \ll 1$) и для почти плоских волновых фронтов в упражнениях 35.15—35.17 в конце главы. Рассматриваемые эффекты включают гравитационное красное смещение гравитационного излучения и гравитационное отклонение направления распространения гравитационного излучения, т. е. эффекты, аналогичные тем, которые имеют место для света; кроме того, сюда входит вращение тензора поляризации. Когда длина волны не мала ($\lambda/\mathcal{R}$ немного меньше 1), уравнение распространения описывает обратное рассеяние гравитационных волн на фоновой кривизне и получающуюся в результате картину волновых «хвостов», аналогичную той, которая исследовалась в упражнении 32.10 (см., например, [71, 74, 227, 234]).

35.12. Калибровочные преобразования на искривленном фоне

УПРАЖНЕНИЯ

а. Покажите, что инфинитезимальное координатное преобразование (35.65а) приводит к изменению (35.65б) функционального вида возмущений метрики.

б. Рассмотрите связь между этим калибровочным преобразованием и понятием вектора Киллинга (§ 25.2).

35.13. Поперечная калибровка со следом, равным нулю, для гравитационных волн, распространяющихся на искривленном фоне

а. Покажите, что в вакууме в искривленном пространстве-времени калибровочное условие $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0$ сохраняется при тех преобразованиях, генератор которых удовлетворяет волновому уравнению $\xi_{\mu}{}^{|\alpha}{}_{\alpha} = 0$.

б. Локально (на расстояниях много меньше $\mathscr{R}$) применима линеаризованная теория, поэтому существует такое преобразование, которое дает [см. уравнения (35.7б) и (35.8а)]

$$\bar{h} = 0 + \text{ошибка}, \quad \bar{h}_{\mu\alpha}u^{\alpha} = 0 + \text{ошибка}. \tag{35.69}$$

Здесь u^{α} — векторное поле, которое, насколько это только возможно, является ковариантно постоянным ($u^{\alpha}{}_{|\beta} = 0$), т. е. является постоянным вектором в инерциальных координатах линеаризованной теории, причем на расстояниях много меньше $\mathscr{R}$ ошибки малы. Покажите, что наряду с $\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} = 0$ *может глобально выполняться условие* $\bar{h} = 0$, т. е. покажите, что если наложить это условие на начальной гиперповерхности, то уравнение распространения (35.68) обеспечивает сохранение этого условия.

в. Покажите, что в общем случае фоновая кривизна препятствует какому бы то ни было вектору быть ковариантно постоянным (в лучшем случае $u^{\hat{\alpha}}{}_{|\hat{\beta}} \sim u^{\hat{\alpha}}/\mathscr{R}$); исходя из этого, *покажите, что невозможно наложить глобальное условие* $\bar{h}_{\mu\alpha}u^{\alpha} = 0$ *одновременно с условием* $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0$.

§ 35.15. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Обратимся теперь к вычислению эффективного тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}^{(GW)}$, определяемого выражением (35.61). Для этого необходимо усреднить различные величины по нескольким длинам волн. При работе с величинами, заключенными в скобки усредне-

Процесс усреднения при «крупномасштабном подходе»

ния $\langle\ \rangle$, полезны следующие правила (обоснование см. в упражнении 35.14):

1. Ковариантные производные коммутируют, например $\langle h\, h_{\mu\nu|\,\alpha\beta}\rangle = \langle h\, h_{\mu\nu|\,\beta\alpha}\rangle$. Относительные ошибки, вызванные такой свободной перестановкой ковариантных производных, $\sim(\lambda/\mathscr{R})^2$, т. е. значительно меньше точности расчета.

2. Градиенты при усреднении обращаются в нуль, например $\langle (h_{|\alpha} h_{\mu\nu})_{|\,\beta}\rangle = 0$. Возникающие здесь относительные ошибки $\leqslant \lambda/\mathscr{R}$.

3. Вследствие этого можно свободно интегрировать по частям, перенося производные с одного h на другое, например $\langle h\, h_{\mu\nu\,|\,\alpha\beta}\rangle = \langle -h_{|\,\beta} h_{\mu\nu|\,\alpha}\rangle$.

Вычисление эффективного тензора энергии-импульса для гравитационных волн $T^{(GW)}_{\mu\nu}$

Непосредственное, но длинное вычисление, при котором используются эти правила, а также выражение (35.58б) для $R^{(2)}_{\mu\nu}(h)$, определение (35.63) для $\bar{h}_{\mu\nu}$, уравнение распространения волн (35.64) и, наконец, определение (35.61) для $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ приводят к следующим результатам: $\langle R^{(2)}(h)\rangle = 0$ и

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\left\langle \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{h}_{|\mu}\bar{h}_{|\nu} - 2\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}\bar{h}_{\alpha(\mu|\nu)}\right\rangle. \qquad (35.70)$$

Этот результат уже приводился в (35.23′), если не считать, что там мы пользовались системой координат линеаризованной теории, в которой ковариантные производные совпадают с обычными. В калибровке, при которой $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0$, последний член исчезает. Если, кроме того, след $\bar{h}_{\mu\nu}$ равен нулю (см. упражнение 35.13), то исчезает и второй член и остается лишь

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\langle \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\rangle, \text{ если } \bar{h}^{\alpha}_{\mu|\alpha} = \bar{h} = 0. \qquad (35.70')$$

Точность выражения для $T^{(GW)}_{\mu\nu}$

В этих выражениях для эффективного тензора энергии-импульса гравитационной волны содержатся относительные ошибки порядка $\mathscr{A}$, обусловленные тем, что не учитывались поправки второго порядка к $h_{\mu\nu}$; эти выражения содержат также относительные ошибки порядка $\lambda/\mathscr{R}$, возникающие в результате процесса усреднения, который теряет смысл, когда величина λ приближается к $\mathscr{R}$. Поскольку $\mathscr{A} \leqslant \lambda/\mathscr{R}$ (35.28), основные ошибки в $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ порядка $\lambda/\mathscr{R}$.

Свойства тензора $T^{(GW)}_{\mu\nu}$

С такой точностью тензор энергии-импульса гравитационных волн выступает наравне с любым другим тензором энергии-импульса. Он играет ту же роль в создании фоновой кривизны и в таком же виде входит в законы сохранения. В качестве примера можно показать либо непосредственными вычислениями, либо исходя из тождества $G^{(B)\,\mu\nu}{}_{|\,\nu} = 0$, что

$$T^{(GW)\,\mu\nu}{}_{|\,\nu} = 0 + \text{ошибка}, \qquad (35.71)$$

где ошибка $\sim(\lambda/\mathscr{R})\,(T^{(GW)\,\mu\nu}/\mathscr{R})$ в коротковолновом приближении является пренебрежимо малой.

Некоторые из свойств $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ уже исследовались в § 35.7. Другие свойства исследуются в упражнениях 35.18 и 35.19.

УПРАЖНЕНИЯ

35.14. Усреднение Брилла — Хартля

Айзаксон [231] вводит следующую схему усреднения, которую он называет «усреднением Брилла — Хартля».

а. В малой области размером в несколько длин волн, где производится усреднение, в метрике $g^{(B)}_{\mu\nu}$ имеется одна геодезическая, которая соединяет две произвольные точки $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$, поэтому заданный в $\mathcal{P}'$ тензор $\mathbf{E}(\mathcal{P}')$ может быть подвергнут параллельному переносу вдоль этой геодезической в точку $\mathcal{P}$; при этом там получится тензор $\mathbf{E}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}}$.

б. Пусть $f(\mathcal{P}', \mathcal{P})$ — весовая функция, которая плавно падает до нуля, если $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$ разделены большим числом длин волн, и которая такова, что

$$\int f(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \sqrt{-g^{(B)}(\mathcal{P}')}\, d^4x' = 1. \tag{35.72}$$

в. Тогда усредненное по нескольким длинам волн вокруг точки $\mathcal{P}$ тензорное поле $\mathbf{E}(\mathcal{P}')$ имеет вид

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{\mathcal{P}} = \int \mathbf{E}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}} f(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \sqrt{-g^{(B)}(\mathcal{P}')}\, d^4x'. \tag{35.73}$$

1. Покажите, что существует некая величина $g^{(B)\,\alpha'}_{\mu}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$, у которой индекс со штрихом преобразуется как у тензора в точке $\mathcal{P}'$, а индекс без штриха как тензор в точке $\mathcal{P}$; при этом (если $\mathbf{E}$ — тензор второго ранга)

$$E_{\alpha\beta}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}} = g^{(B)\mu'}_{\alpha} g^{(B)\nu'}_{\beta} E_{\mu'\nu'}(\mathcal{P}'). \tag{35.74}$$

Эта величина называется «бивектором параллельного переноса вдоль геодезической», см. [224] или [235].

2. Переписав выражение (37.73) на координатном языке в виде

$$\langle E_{\alpha\beta}(x) \rangle = \int g^{(B)\mu'}_{\alpha}(x, x')\, g^{(B)\nu'}_{\beta}(x, x')\, E_{\mu'\nu'}(x') \times$$
$$\times f(x, x') \sqrt{-g^{(B)}(x')}\, d^4x', \tag{35.73'}$$

выведите три правила усреднения, которые были перечислены в начале § 35.15. (Решение см. в работе [231].)

35.15. Геометрическая оптика

Разработайте геометрическую оптику для гравитационных волн малой амплитуды, распространяющихся на искривленном фоне, по образцу геометрической оптики для электромагнитных волн (§ 22.5). В частности, допустите, что $\bar{h}_{\mu\nu}$ имеет медленно меняющуюся амплитуду (масштаб изменения $\ell \lesssim \mathcal{R}$) и быстро меняющуюся фазу ($\theta_{,\hat{\alpha}} \sim 1/\lambda$). Разложите амплитуду по степеням λ/ℓ, так что

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\{A_{\mu\nu} + \varepsilon B_{\mu\nu} + \varepsilon^2 C_{\mu\nu} + \ldots\} e^{i\theta/\varepsilon}. \tag{35.75}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Здесь ε — формальный параметр разложения, в действительности равный единице, который напоминает о том, что члены, содержащие ε^n, пропорциональны $(\lambda/\mathscr{R})^n$. Дадим определение следующих величин (здесь $A^*_{\mu\nu}$ обозначает величину, комплексно сопряженную $A_{\mu\nu}$):

$$\text{«волновой вектор»:}\quad k_\alpha \equiv \theta_{,\alpha}, \tag{35.76а}$$

$$\text{«скалярная амплитуда»:}\quad \mathscr{A} \equiv \left(\frac{1}{2} A^*_{\mu\nu} A^{\mu\nu}\right)^{1/2}, \tag{35.76б}$$

$$\text{«поляризация»:}\quad e_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\nu}/\mathscr{A}. \tag{35.76в}$$

Подставляя выражение (35.75) в условие калибровки (35.66) и в уравнение распространения волн (35.68), выведите основные уравнения геометрической оптики, которые следуют ниже.

а. Лучи (кривые, перпендикулярные поверхностям постоянной фазы) являются нулевыми геодезическими, т. е.

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \tag{35.77а}$$

$$k_{\alpha\,|\,\beta} k^\beta = 0. \tag{35.77б}$$

б. Поляризация ортогональна лучам и переносится вдоль них, оставаясь параллельной самой себе:

$$e_{\mu\alpha} k^\alpha = 0, \tag{35.77в}$$

$$e_{\mu\nu\,|\,\alpha} k^\alpha = 0. \tag{35.77г}$$

в. Когда лучи расходятся, скалярная амплитуда уменьшается согласно уравнению

$$\mathscr{A}_{,\alpha} k^\alpha = -\frac{1}{2} k^\alpha{}_{|\alpha} \mathscr{A}, \tag{35.77д}$$

т. е.

$$(\mathscr{A}^2 k^\alpha)_{|\alpha} = 0 \quad \text{(«сохранение числа гравитонов»)}. \tag{35.77е}$$

г. Поправка к амплитуде $B_{\mu\nu}$ подчиняется соотношениям

$$B_{\mu\alpha} k^\alpha = i A_{\mu\alpha}{}^{|\alpha}, \tag{35.77ж}$$

$$B_{\mu\nu|\alpha} k^\alpha = -\frac{1}{2} k^\alpha_{|\alpha} B_{\mu\nu} + \frac{1}{2} i A_{\mu\nu|\alpha}{}^\alpha + i R^{(B)}_{\alpha\mu\beta\nu} A^{\alpha\beta}. \tag{35.77з}$$

Выберете, согласно упражнению 35.13, такую специальную калибровку, чтобы $\bar{h} = 0$, т. е.

$$e_\alpha{}^\alpha = 0. \tag{35.77и}$$

Покажите далее, что тензор энергии-импульса (35.70′) для этих волн есть

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} \mathscr{A}^2 k_\mu k_\nu. \tag{35.77к}$$

Он имеет ту же форму, что и тензор энергии-импульса для пучка частиц с нулевой массой покоя (см. § 5.4). Покажите в явном виде, что $T^{(GW)\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$.

35.16. Гравитоны

Покажите, что геометрическая оптика, развитая в предыдущем упражнении, эквивалентна следующему утверждению: «Постулируется, что гравитон представляет собой частицу с нулевой массой покоя и 4-импульсом $\mathbf{p}$, которая движется вдоль нулевой геодезической ($\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0$). С ней связан переносимый параллельно самому себе ($\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{e} = 0$), поперечный ($\mathbf{e}\cdot\mathbf{p} = 0$) со следом, равным нулю ($e_\alpha{}^\alpha = 0$), тензор поляризации $\mathbf{e}$. Геометрическая оптика есть теория, описывающая поток таких гравитонов, движущихся в пространстве-времени». Выявите связь величин в этой трактовке геометрической оптики с соответствующими величинами в предшествующей трактовке (например, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, где $\hbar$ — приведенная постоянная Планка $h/2\pi$).

35.17. Гравитационное отклонение гравитационных волн

Покажите, что гравитационные волны с малой длиной волны, проходя через Солнечную систему, испытывают красное смещение и гравитационное отклонение такие же, как свет. (Вы должны уметь вывести это непосредственно из упражнения 35.15.)

35.18. Калибровочная инвариантность тензора $T^{(GW)}_{\mu\nu}$

Покажите, что тензор энергии-импульса $T^{(GW)}_{\mu\nu}$, определяемый выражением (35.70), инвариантен относительно калибровочных преобразований вида (35.65).

35.19. Тензор $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ как среднее от псевдотензора энергии-импульса

Выпишите среднее по нескольким длинам волн от псевдотензора энергии-импульса Ландау — Лифшица [выражение (20.22)] для гравитационных волн с $\lambda\!\!\!^{-}/\mathscr{R} \ll 1$. Результат должен быть равным $T^{(GW)}_{\mu\nu}$. (*Указание*. Чтобы облегчить вычисления, работайте в калибровке, в которой $\bar{h}_{\mu|}{}^\alpha{}_\alpha = \bar{h} = 0$.)

35.20. Коротковолновое приближение с вариационной точки зрения

Читатели, ознакомившиеся с вариационным подходом к теории гравитации в гл. 21, возможно, заинтересуются приводимым ниже выводом основных уравнений коротковолнового приближения.

УПРАЖНЕНИЯ

Этот вывод разработали независимо Шандор Ковач и Бернард Шутц, а также Брайс Де Витт [1]). Мак-Коллом и Тауб дают трактовку, отличную от трактовки Палатини.

а. Определите

$$g_{\mu\nu} = g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{(B)}_{\mu\nu} h, \tag{35.78а}$$

$$W^{\mu}{}_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}_{(B)} (h_{\alpha\beta|\gamma} + h_{\alpha\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\alpha}). \tag{35.78б}$$

Поднимайте и опускайте индексы в $h_{\mu\nu}$ и $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ с помощью фоновой метрики. Воспользовавшись результатом упражнения 35.11, выведите следующее выражение для лагранжиана гравитационного поля:

$$\mathscr{L} \equiv \frac{1}{16\pi} (-g)^{1/2} R = \mathscr{L}' + \begin{pmatrix} \text{полная дивергенция} \\ \text{вида } \partial \mathscr{L}^{\alpha}/\partial x^{\alpha} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \text{поправки порядка} \\ \mathscr{A}^3/\lambda^2,\ R^{(B)}_{\mu\nu}\mathscr{A} \\ \text{и меньше} \end{pmatrix}, \tag{35.78в}$$

где

$$\mathscr{L}' \equiv \frac{1}{16\pi} (-g^{(B)})^{1/2} [R^{(B)} - \bar{h}^{\mu\nu} (W^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} - W^{\alpha}_{\mu\alpha|\nu}) + \\ + g^{(B)\mu\nu} (W^{\alpha}{}_{\beta\alpha} W^{\beta}{}_{\mu\nu} - W^{\alpha}{}_{\beta\nu} W^{\beta}{}_{\mu\alpha})]. \tag{35.78г}$$

[*Указание*. Напомним, что

$$(-g^{(B)})^{1/2} B^{\alpha}{}_{|\alpha} = \partial [(-g^{(B)})^{1/2} B^{\alpha}]/\partial x^{\alpha}$$

для любого B^{α}.] Отбросьте в выражении для $\mathscr{L}$ поправки порядка $\mathscr{A}^3/\lambda^2$ и, заранее зная, что уравнения поля потребуют, чтобы $R^{(B)}_{\mu\nu} \sim \mathscr{A}^2/\lambda^2$, отбросьте также поправки порядка $R^{(B)}_{\mu\nu}\mathscr{A}$. Зная, что полная дивергенция не дает вклада при вычислении экстремума, отбросьте этот член в выражении для $\mathscr{L}$. После этого $\mathscr{L}'$ будет единственной оставшейся частью лагранжиана $\mathscr{L}$.

б. Найдите экстремум интеграла $I \equiv \int \mathscr{L}' \, d^4x$ методом Палатини (§ 21.2), т. е. забудьте (на время) определение (35.78б) величины $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ и найдите экстремум I по всем независимым вариациям $W^{\mu}{}_{\beta\gamma} = W^{\mu}{}_{\gamma\beta}$, $\bar{h}^{\mu\nu} = \bar{h}^{\nu\mu}$ и $g^{\mu\nu}_{(B)} = g^{\nu\mu}_{(B)}$. Покажите, что экстремизация по $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ вновь приводит к уравнению (35.78б), которое выражает $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ через $h_{\mu\nu}$. Покажите, что экстремизация по $\bar{h}^{\mu\nu}$ совместно с уравнениями (35.78а), (35.78б) приводит к уравнению

---

[1]) Не опубликовано, 1971 г.

распространения гравитационных волн (35.64). Покажите, что экстремизация по $g^{(B)\mu\nu}$ совместно с уравнениями (35.78а), (35.78б) и с уравнением распространения (35.64) после усреднения по нескольким длинам волн приводит к уравнению

$$G^{(B)}_{\mu\nu} = 8\pi T^{(GW)}_{\mu\nu},$$

где $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ дается выражением (35.70). (*Предостережение.* Если с самого начала не наложить калибровочных условий $\bar{h} = \bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} = 0$, то алгебраические преобразования в этом упражнении станут невообразимо громоздкими.)

36. ГЕНЕРАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Материя описывается кривизной, но не всякая кривизна в действительности описывает материю: кривизна может существовать «в пустоте».

ЛЕМЕТР

§ 36.1. КВАДРУПОЛЬНАЯ ПРИРОДА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Массы внутри изолированной системы, которая носит почти ньютоновский характер, движутся одна относительно другой. Сколько гравитационного излучения они испускают?

Исследование генерации гравитационных волн с помощью аналогии с электромагнитными волнами

Для порядковой оценки можно применить формулы для излучения, знакомые из электромагнитной теории, произведя в них замену $e^2 \to -m^2$, при которой статический закон Кулона превращается в закон тяготения Ньютона. При такой процедуре гравитация рассматривается не как тензорное поле со спином 2, а как векторное поле со спином 1; следовательно, при таком рассмотрении возникают заметные ошибки в численных множителях и в угловом распределении излучения. Но при этом получается правильная оценка полной мощности излучения.

В электромагнитной теории основную роль играет излучение электрического диполя; при этом излучаемая мощность, или «светимость», L (см. § 4.4 и фиг. 4.6) для отдельной частицы, имеющей ускорение $\boldsymbol{a}$, дается выражением

$$L_{\text{эл. диполь}} = (^2/_3)\, e^2 \boldsymbol{a}^2,$$

а дипольный момент изменяется как $\ddot{\boldsymbol{d}} = e\ddot{\boldsymbol{x}} = e\boldsymbol{a}$. Для произвольной системы с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$

$$L_{\text{эл. диполь}} = (^2/_3)\, \ddot{\boldsymbol{d}}^2.$$

[Геометрические единицы: светимость измеряется в см массы-энергии, деленных на см времени, определяемого по распространению света; заряд измеряется в см, $e = (G^{1/2}/c^2)\, e_{\text{обычн}} = (2{,}87 \cdot 10^{-25}$ см/ед. СГСЭ) $(4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ) $= 1{,}38 \cdot 10^{-34}$ см, ускорение измеряется в см расстояния, дважды деленных на см

времени. В обычных единицах, где e измеряется в единицах СГСЭ или в $(\text{г}\cdot\text{см}^3/\text{с}^2)^{1/2}$, надо подставить в правую часть множитель c^{-3}, и мы получим L в эрг/см.] Гравитационным аналогом электрического дипольного момента служит дипольный момент масс

$$\boldsymbol{d} = \sum_{\text{по частицам } A} m_A \boldsymbol{x}_A.$$

Почему гравитационные волны не могут быть дипольными

Его первая производная по времени (скорость изменения) есть полный импульс системы

$$\dot{\boldsymbol{d}} = \sum_{\text{по частицам } A} m_A \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}.$$

Вторая производная (скорость изменения скорости) должна обращаться в нуль вследствие закона сохранения импульса $\ddot{\boldsymbol{d}} = \dot{\boldsymbol{p}} = 0$. Поэтому *в гравитационной физике не может быть дипольного излучения, создаваемого диполем масс.*

Следующими по мощности типами электромагнитного излучения являются магнитное дипольное и электрическое квадрупольное. Магнитное дипольное излучение генерируется второй производной по времени от магнитного момента $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$. Здесь вновь в качестве гравитационного аналога выступает интеграл движения — момент импульса

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_A (\text{положение точки } A) \times (\text{ток, обусловленный движением } A) = \sum_A \boldsymbol{r}_A \times (m\boldsymbol{v}_A) = \boldsymbol{J};$$

следовательно, этот тип гравитационного излучения также невозможен. Таким образом, *гравитационного дипольного излучения какого бы то ни было сорта не может существовать.*

Если мы обратимся к квадрупольному излучению, то, наконец, получим ненулевой результат (фиг. 36.1). Выходящее излучение, предсказываемое электромагнитной теорией,

$$L_{\text{эл. квадруполь}} = \frac{1}{20}\dddot{\boldsymbol{Q}}^2 \equiv \frac{1}{20}\dddot{Q}_{jk}\dddot{Q}_{jk},$$

$$Q_{jk} \equiv \sum_A e_A\left(x_{Aj}x_{Ak} - \frac{1}{3}\delta_{jk}r_A^2\right)$$

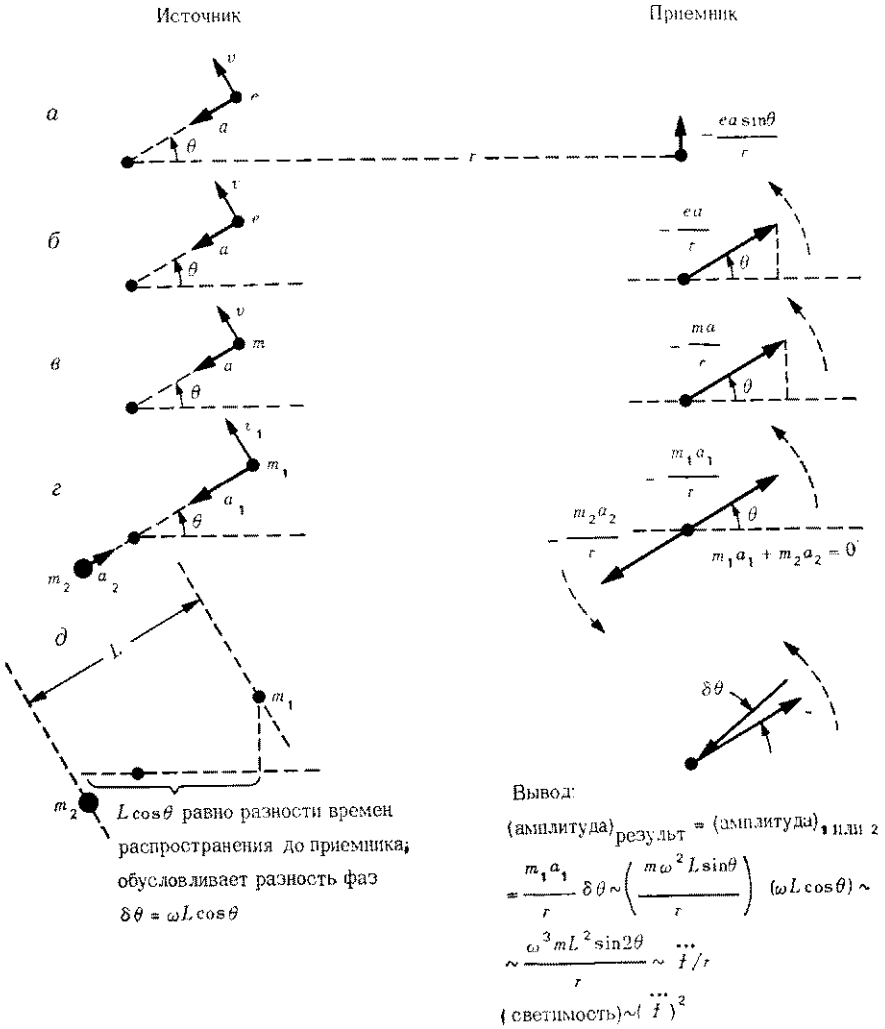
(часто в литературе используется утроенное значение Q_{jk}) имеет гравитационный аналог

Выражение мощности излучаемых гравитационных волн через «приведенный квадрупольный момент» источника

$$L_{\text{масс. квадруполь}} = \frac{1}{5}\langle \dddot{\mathfrak{I}}^2 \rangle \equiv \frac{1}{5}\langle \dddot{\mathfrak{I}}_{jk}\dddot{\mathfrak{I}}_{jk}\rangle, \tag{36.1}$$

$$\mathfrak{I}_{jk} = \sum_A m_A\left(x_{Aj}x_{Ak} - \frac{1}{3}\delta_{jk}r_A^2\right) = \int \rho\left(x_j x_k - \frac{1}{3}\delta_{jk}r^2\right) d^3x. \tag{36.2}$$

Формула (36.1) содержит правильный множитель $^1/_5$, получающийся в тензорных вычислениях (§ 36.10), вместо множителя $^1/_{20}$,



получаемого из электромагнитной теории; правая часть (36.1) усреднена по нескольким характерным периодам источника в соответствии с тем, что энергию гравитационного излучения невозможно локализовать внутри одной длины волны.

Замечание. Здесь нет неоднозначности в определении «*второго момента распределения масс*»

$$I_{jh} = \int \rho x_j x_k \, d^3x.$$

ФИГ. 36.1.

Причина, по которой гравитационное излучение обычно слабо: вклады в амплитуду расходящейся волны от двух массовых дипольных моментов для разнесенных масс взаимно уничтожаются, $(m_1a_1 + m_2a_2)/r = 0$ (закон равенства действия и противодействия).

а — излучение от ускоренно движущегося заряда (см. § 4.4 и фиг. 4.6).

б — описание поля на больших расстояниях r посредством типичной для электротехники диаграммы с вращающимся вектором; однако здесь для большей наглядности *вертикальная* проекция вращающегося вектора дает наблюдаемое поле (обычное дипольное поле, создаваемое зарядом, движущимся по круговой орбите).

в — соответствующая диаграмма с вращающимся вектором в случае гравитационного излучения, основанная на упрощенной модели гравитационного поля в виде поля со спином 1, или векторного поля (в противоположность истинному тензорному характеру этого поля; следовательно, детали углового распределения и полное излучение даются этой упрощенной диаграммой неправильно, но порядок величины светимости оказывается верным).

г — две массы m_1 и m_2, удерживающие друг друга на орбите, дают равные, но противоположные по знаку вклады в амплитуду расходящейся волны вследствие равенства действия и противодействия. (В электромагнитном излучении от атома водорода соответствующие амплитуды излучения взаимно не уничтожаются:

$$e_{\text{электр}}a_{\text{электр}} + e_{\text{прот}}a_{\text{прот}} \sim e_{\text{электр}}a_{\text{электр}} \neq 0.$$

д — в более хорошем приближении следует учесть различие во времени прихода к приемнику сигналов от двух масс. Два вектора, которые первоначально имели противоположные направления, теперь изображаются наклоненными по отношению друг к другу на фазовый угол $\delta\theta$. Амплитуда результирующего поля пропорциональна $\ddot{I}$, где I — приведенный квадрупольный момент, а светимость пропорциональна $\ddot{I}^2$.

Нет неопределенности и в построении тензора инерции $\mathcal{I}_{jk}$ по второму моменту распределения масс:

$$\mathcal{I}_{jk} = \delta_{jk}\,\mathrm{Sp}\,(I_{ab}) - I_{jk} = \int \rho\,(r^2\delta_{jk} - x_jx_k)\,d^3x.$$

Моменты, характеризующие источник квадрупольного гравитационного излучения, берутся здесь также однозначным образом в виде той *части второго момента распределения масс, след которой равен нулю*:

$$I_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}\,\mathrm{Sp}\,(I_{ab}) = I_{jk} - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}I =$$

$$= \int \rho\left(x_jx_k - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}r^2\right)d^3x. \qquad (36.3)$$

Это правило упрощает формулы, упрощает вычисления и прекрасно согласуется с литературой по теории гравитационных волн (например, [236, 237]); кроме того, его легко запомнить. Величина I_{jk} называется также *приведенным квадрупольным моментом*. Эта терминология позволяет четко отличать используемые здесь величины от утроенных по сравнению с ними величин, приводимых в классической книге Ландау и Лифшица [2] и в литературе по квадрупольным моментам ядер, а также от в $^3/_2$ раза бо́льших

величин, используемых в теории сферических гармоник:

$$Q_{zz}\begin{pmatrix}\text{в книге Ландау — Лифшица; также}\\ \text{ядерные квадрупольные моменты}\end{pmatrix}=\int \rho\,(3z^2-r^2)\,d^3x,$$

$$Q_{zz}(\text{теория сферических гармоник})=\int \rho\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}r^2\right)d^3x,$$

$$I_{zz}\begin{pmatrix}\text{приведенный квадрупольный момент;}\\ \text{принятая здесь величина, однозначно}\\ \text{определяющая интенсивность источника}\end{pmatrix}=$$

$$=\int \rho\left(z^2-\frac{1}{3}r^2\right)d^3x.$$

Таким образом, принятое здесь обозначение I_{jk} позволяет избежать неоднозначности определения квадрупольного момента, существующей в литературе.

Почему гравитационные волны обычно имеют квадрупольный характер

Тот факт, что электромагнитное излучение является преимущественно дипольным (индекс сферической гармоники $l=1$), а гравитационное излучение — квадрупольным ($l=2$), есть следствие общей теоремы. Рассмотрим классическое поле излучения; связанные с ним квантовомеханические частицы имеют целочисленный спин S и нулевую массу покоя. Разложим это поле излучения по сферическим гармоникам, т. е. по мультипольным моментам. Все компоненты с $l<S$ обратятся в нуль; в общем случае остаются компоненты с $l\geqslant S$, и это не зависит от природы источника (см., например, [238]). Поскольку в общем случае для медленно движущегося источника (скорость много меньше c) преобладают низшие не равные нулю мультиполи, электромагнитное излучение ($S=1$) является обычно дипольным ($l=S=1$), а гравитационное излучение ($S=2$) обычно носит квадрупольный характер ($l=S=2$). С этой теоремой тесно связана «теорема о топологическом запрете» (см., например, [239]), которая позволяет различать скалярные, векторные и тензорные поля. Скалярному возмущению, например такому, как волна сжатия, ничто не мешает иметь сферически симметричный источник. Это значит, что для сферы большого радиуса r можно без труда иметь поле давлений, которое в каждый отдельный момент времени принимает всюду на сфере одно и то же значение p. В отличие от этого на поверхности 2-сферы невозможно разместить непрерывное векторное поле, величина которого была бы отлична от нуля и всюду одинакова («невозможно гладко причесать волосы на бильярдном шаре»). Точно так же невозможно уложить на поверхности 2-сферы непрерывное поперечное 2×2 матричное поле со следом, равным нулю, которое для разных точек отличается самое большее вращением. Таким образом, топология исключает возможность какого бы то ни было сферически симметричного источника гравитационного излучения.

§ 36.2. МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВЫРАЖЕННАЯ ЧЕРЕЗ ВНУТРЕННИЙ ПОТОК МОЩНОСТИ

Выражение (36.1) для выходящей мощности излучения можно переписать в такой форме, в которой легче делать порядковые оценки. Заметим, что приведенный квадрупольный момент

$$\dddot{I}_{jk} \sim \frac{\begin{pmatrix}\text{масса движущейся}\\ \text{части системы}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{размер}\\ \text{системы}\end{pmatrix}^2}{\begin{pmatrix}\text{время, за которое массы перемещаются}\\ \text{от одного конца системы до другого}\end{pmatrix}^3} =$$

$$= \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{M(R/T)^2}{T} \sim \frac{\begin{pmatrix}\text{несферическая часть}\\ \text{кинетической энергии}\end{pmatrix}}{T};$$

$$\dddot{I}_{jk} \sim L_{\text{внутр}} \equiv \begin{pmatrix}\text{мощность, перетекающая от одного}\\ \text{конца системы до другого}\end{pmatrix}. \qquad (36.4)$$

Излучаемая мощность, выраженная через внутренний поток мощности источника

Следовательно, выражение (36.1) гласит: *мощность выходящих гравитационных волн* («*светимость*»), *грубо говоря, равна квадрату внутреннего потока мощности*:

$$L_{GW} \sim (L_{\text{внутр}})^2. \qquad (36.5)$$

Если это уравнение покажется сумасшедшим (кто в здравом уме приравняет мощность квадрату мощности?), то напомним, что в геометрических единицах мощность есть величина безразмерная. Коэффициент перехода к обычным единицам равен

$$L_0 \equiv c^5/G = 3{,}63 \cdot 10^{59} \text{ эрг/с} = 2{,}03 \cdot 10^5 M_\odot c^2/c. \qquad (36.6)$$

При желании всегда можно подставить этот коэффициент $L_0 = 1$, чтобы придать уравнениям более удобный вид. Например, уравнение (36.5) можно переписать в виде

$$L_{GW}/L_{\text{внутр}} \sim L_{\text{внутр}}/L_0. \qquad (36.7)$$

Уравнение $L_{GW} \sim (L_{\text{внутр}})^2$ следует применять с большой осторожностью, поскольку было бы ошибкой учитывать те внутренние потоки мощности, которые не могут излучать, так как не сопровождаются изменениями квадрупольного момента со временем. Например, в звезде не следует учитывать внутренние потоки мощности, связанные со сферической пульсацией и с аксиально симметричным вращением.

Закон сохранения энергии гарантирует, что силы реакции излучения уменьшают внутреннюю энергию системы с той же скоростью, с какой гравитационные волны уносят энергию наружу

Характерный масштаб времени для эффектов реакции излучения

(дополнение 19.1). Характерное время, за которое реакция излучения существенно изменит энергию системы, равно

$$\tau_{\text{реакц}} \sim [1/(\text{скорость потери энергии})] \times [\text{энергия излучающих движений}] \sim [1/L_{GW}] \times [(L_{\text{внутр}}) \times (\text{характерный период внутренних движений } T)] \sim (L_{\text{внутр}}/L_{GW})\, T \sim (L_0/L_{\text{внутр}})T. \quad (36.8)$$

Следовательно, *реакция излучения играет важную роль на одном характерном периоде лишь в том случае, если внутренний поток мощности в системе достигает чрезвычайно большой величины*:

$$L_{\text{внутр}} \gtrsim L_0 = 3{,}63 \cdot 10^{59} \text{ эрг/с} = 1!$$

§ 36.3. ЛАБОРАТОРНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Мощность, излучаемая стальной болванкой

Рассмотрим в качестве лабораторного генератора гравитационных волн массивную стальную болванку радиуса $r = 1$ м и длины $l = 20$ м, имеющую плотность $\rho = 7{,}8$ г/см^3, массу $M = 4{,}9 \cdot 10^8$ г (490 тонн) и предел прочности на растяжение $t = 3 \cdot 10^9$ дин/см^2. Пусть болванка вращается вокруг своего центра (так что один ее конец вращается вокруг другого) с угловой скоростью ω, которая ограничена сверху равновесием между центробежной силой и пределом прочности на растяжение

$$\omega = (8t/\rho l^2)^{1/2} = 28 \text{ рад/с}.$$

Внутренний поток мощности

$$L_{\text{внутр}} = \left(\frac{1}{2} I\omega^2\right)\omega = \frac{1}{24} M l^2 \omega^3 \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ эрг/с} \approx 10^{-41} L_0.$$

Излучаемая мощность по порядку величины равна

$$L_{GW} \sim (10^{-41})^2\, L_0 \sim 10^{-23} \text{ эрг/с}. \quad (36.9)$$

[Точное решение по формуле (36.1) дает $2{,}2 \cdot 10^{-22}$ эрг/с; упражнение 36.1.] Очевидно, создание лабораторного генератора гравитационного излучения представляет собой малопривлекательную задачу, если не использовать принципиально новую технику или какую-то свежую идею, или и то и другое вместе.

Воспользоваться астрофизическим источником и построить либо лабораторный детектор, либо детектор в Солнечной системе — вот более естественный план действий, который стоит рассмотреть. Детектирование будет рассмотрено в следующей главе. Здесь же мы сосредоточим внимание на астрофизических источниках [1]).

[1]) О современном состоянии проблемы лабораторных генераторов гравитационных волн см. в статьях [494, 495].— *Прим. ред.*

36.1. Гравитационные волны от вращающейся болванки УПРАЖНЕНИЕ

Длинная стальная болванка длины l и массы M вращается вокруг оси, перпендикулярной ее длине, с угловой скоростью ω. Покажите, что излучаемая мощность гравитационного излучения равна

$$L_{GW} = \frac{2}{45} M^2 l^4 \omega^6. \tag{36.10}$$

Воспользуйтесь этой формулой, чтобы убедиться в том, что болванка, описанная в тексте, излучает $2{,}2 \cdot 10^{22}$ эрг/с.

§ 36.4. АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН: ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим астрофизическую систему, обладающую в высшей степени динамическим характером (пульсирующая и быстро вращающаяся звезда, коллапсирующая или взрывающаяся звезда, хаотическая система из большого числа звезд). Если масса системы M, а ее размер R, то, согласно теореме вириала (упражнение 39.6), ее кинетическая энергия $\sim M^2/R$. Характерный масштаб времени T, за которое масса перемещается от одного конца системы к другому, составляет

$$T \sim \frac{R}{\text{средняя скорость}} \sim \frac{R}{(M/R)^{1/2}} = \left(\frac{R^3}{M}\right)^{1/2} \tag{36.11а}$$

(порядка времени свободного падения или поворота на один радиан на кеплеровской орбите; гл. 25). Следовательно, внутренний поток мощности равен

$$L_{\text{внутр}} \sim \frac{(\text{кинетическая энергия})}{T} \sim \left(\frac{M^2}{R}\right)\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^{5/2}. \tag{36.11б}$$

Мощность излучения гравитационных волн, или «светимость», равняется квадрату этой величины, или

$$L_{GW} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5 L_0. \tag{36.11в}$$

Мощность, излучаемая сильными астрофизическими источниками, выраженная через их массу и радиус

(Если система достаточно симметрична или лишь малая часть ее массы участвует в движении, то ее квадрупольный момент меняется слабо, и оценку L_{GW} необходимо соответственно уменьшить. Амплитуда волны падает пропорционально доле массы, участвующей в движении, а мощность уменьшается пропорционально квадрату этой доли.)

Ясно, что *максимальная мощность получится в том случае, когда размер системы близок к ее гравитационному радиусу*; поскольку

Верхний предел излучаемой мощности

ку ничто на свете, даже гравитационные волны, не может вырваться из-под гравитационного радиуса, максимальная *мощность излучения* $\sim L_0 = 3{,}63 \cdot 10^{59}$ эрг/с *независимо от природы системы*!

В действительности при этом выводе верхнего предела мощности излучения и в выражении (36.11в) используются некоторые приближения к общей теории относительности, которые вблизи гравитационного радиуса теряют смысл. [При выводе классической формулы (36.1) для L_{GW} (§ 36.7) требуется малость скоростей по сравнению со скоростью света; при доказательстве теоремы вириала, которая используется в (36.11а), так же как при выводе формулы для L_{GW}, требуется, чтобы поля были почти ньютоновскими.] Тем не менее по порядку величины выражение (36.11в) справедливо вплоть до радиуса, близкого к шварцшильдовскому, скажем до $R \sim 3M$; внутри этого радиуса тяготение становится столь сильным, что никакая система не может противостоять коллапсу в течение эффективного промежутка времени, много большего, чем $T \sim M$.

Реакция излучения в астрофизических источниках

Время, которое требуется для того, чтобы силы реакции излучения существенно подействовали на систему [выражение (36.8)], порядка

$$\tau_{\text{реакц}} \sim (L_0/L_{\text{внутр}})\, T \sim (R/M)^{5/2}\, T, \qquad (36.11\text{г})$$

где T — характерное время (36.11а) вращения или же свободного падения. (Заметим, что множитель $L_0 = 1$ мы можем подставлять или убирать по желанию!) Следовательно, *действие реакции излучения, проинтегрированное по одному периоду, не существенно, если размеры системы не близки к ее гравитационному радиусу*.

Когда система, такая, как пульсирующая звезда, подходит к состоянию равновесия, реакция излучения тормозит внутренние движения в системе. С другой стороны, когда система типа двойной звезды далека от состояния равновесия, потеря энергии (и углового момента) на излучение при определенных условиях может ускорять вращение или увеличивать скорость внутренних движений, усиливая тем самым излучение.

§ 36.5. ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС, ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ, СВЕРХНОВЫЕ И ПУЛЬСАРЫ КАК ИСТОЧНИКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Гравитационные волны: 1) от коллапса звезды и образования черной дыры

Поскольку $L_{GW} \sim (M/R)^5\, L_0$, самые интенсивные гравитационные волны, достигающие Земли, должны приходить от динамической деформированной системы с размерами, близкими к ее гравитационному радиусу (L_{GW} уменьшается в 100 000 раз при увеличении радиуса R в 10 раз!). Фиг. 24.3 дает представление о некоторых динамических процессах, которые не только могут иметь место, но, вероятно, обязательно происходят в дей-

ствительности. Изображенная там схематически последовательность событий включает импульсы гравитационного излучения, чередующиеся с интервалами непрерывного излучения с постепенно растущей частотой. Импульс номер один приходит в момент, когда звезда, имеющая ядро типа белого карлика, сначала коллапсирует до нейтронной звезды, имеющей форму блина. Детальная картина того, что происходит дальше, крайне сильно зависит от первоначальной массы и углового момента этого «блина». На фиг. 24.3 он распадается на созвездие вращающихся в одном направлении нейтронных звезд, которые затем одна за другой испытывают «погоню и стремительное погружение».

При такой последовательности событий или при другой, пожалуй, наиболее предпочтительным источником гравитационного излучения является звезда (или первоначальный короткоживущий «блин», или один из его фрагментов), коллапсирующая под свой гравитационный радиус сильно несферическим образом. Такая звезда должна окончить свою жизнь последним всплеском гравитационных волн, которые уносят заметную долю ее массы покоя. Поэтому оценка по порядку величины дает

$$\text{(излученная энергия)} = \int L_{GW}\,dt \sim$$

$$\sim L_0 \begin{pmatrix}\text{время, в течение которого}\\ \text{имеет место пик светимости}\end{pmatrix} \sim L_0 M \sim M. \quad (36.12)$$

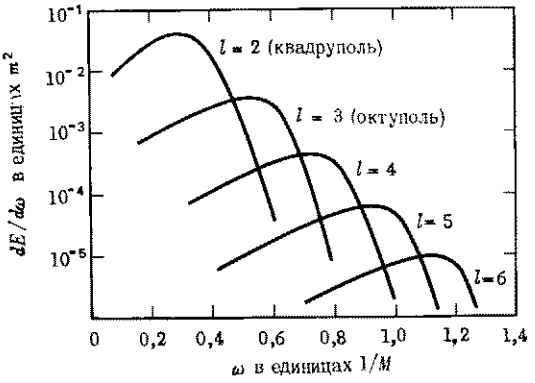
(Равна ли излученная энергия $0{,}9M$, или $0{,}1M$, или $0{,}01M$, в настоящее время с определенностью сказать нельзя, но она должна лежать в этом диапазоне порядков величины.) Излучение должно быть слабым на низких частотах, достигать пика на частоте, немного меньшей чем $1/M$, и затем испытывать резкое обрезание на частотах выше $\omega \sim 1/M$.

2) от падения осколков вещества в черную дыру

Вещество («осколки», фиг. 24.3), падающее в черную дыру, также может являться важным источником гравитационных волн. Падающее вещество будет излучать лишь слабо, когда оно находится вдали от гравитационного радиуса, но незадолго до пересечения гравитационного радиуса (между $r \sim 4M$ и $r = 2M$) оно должно испускать мощный импульс излучения. Если m — масса падающего сгустка вещества, а M — полная масса черной дыры, то полная энергия этого последнего импульса равна

$$E_{\text{излуч}} \sim m^2/M, \quad (36.13)$$

и эта энергия испускается за время $\sim M$, так что излучаемая мощность $L_{GW} \sim (m/M)^2 L_0$ (упражнение 36.2.) На самом деле это очень грубая оценка излучаемой энергии. В пределе, когда падающий сгусток мал как по размерам, так и по массе [(размер сгустка) $\ll$ (гравитационного радиуса черной дыры), $m \ll M$; «сгусток в виде дельта-функции»], можно вычислить спектр и излучаемую энергию, рассматривая сгусток и волны как малые возмущения шварцшильдовской геометрии черной дыры. Основы



ФИГ. 36.2.
Спектр гравитационного излучения, испущенного сгустком вещества в виде «дельта-функции», который имеет массу m и падает в черную дыру массы $M \gg m$. Полная излученная энергия распределена между различными мультиполями согласно эмпирической формуле

$$(\text{энергия волн } l\text{-мультиполя}) \approx (0{,}44 m^2/M)\, e^{-2l},$$

а пик спектра соответствует частоте

$$\omega_{\text{макс}} = 0{,}32/M.$$

При получении этих результатов сгусток вещества и гравитационные волны рассматривались как малые возмущения шварцшильдовской геометрии черной дыры. Необходимые уравнения теории возмущений были выведены Зерилли [135] и решены численно для получения этих результатов Дэвисом, Руффини, Прессом и Прайсом [136].

такого рассмотрения были заложены Зерилли [135]. Формула Зерилли была исправлена и применена в случае лобового столкновения Дэвисом, Руффини, Прессом и Прайсом [136]. Спектры, предсказываемые этими авторами, показаны на фиг. 36.2; полный выход энергии равен

$$E_{\text{излуч}} = 0{,}0104\, m^2/M \qquad (36.14)$$

при $m \ll M$ и (размер сгустка) $\ll M$.

3) от столкновения черных дыр

Столкновение между черными дырами должно также приводить к сильному импульсу гравитационных волн, но такие столкновения происходят, по-видимому, крайне редко!

4) от взрыва сверхновой

Не так редко, хотя и не часто, происходят взрывы сверхновых (приблизительно один взрыв на Галактику за 100 лет). Согласно современной теории, которая подтверждается наблюдениями пульсаров, явление сверхновой вызывается коллапсом ядра звезды, прошедшей большой путь эволюции (§ 24.3). Коллапс и последующее очень быстрое вращение сколлапсировавшего ядра (нейтронной звезды) должны создавать короткий мощный импульс гравитационных волн [1]). Характеристики этого импульса по

[1]) Об излучении при взрыве сверхновой см. также [496].— *Прим. ред.*

оценке, даваемой формулами (36.11), в предположении сильных отклонений от сферичности таковы:

$$\begin{aligned}
&\text{излученная энергия} \sim \text{энергия связи нейтронной звезды} \sim \\
&\qquad \sim M^2/R \sim 0{,}1M \sim 10^{53} \text{ эрг}, \\
&\text{средняя частота} \sim 1/T \sim (M/R^3)^{1/2} \sim \\
&\qquad \sim 0{,}03M^{-1} \sim 3000 \text{ Гц}, \qquad (36.15) \\
&\text{мощность излучения} \sim (M/R)^5 L_0 \sim \\
&\qquad \sim 10^{-5} L_0 \sim 3 \cdot 10^{54} \text{ эрг/с},
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{время, необходимое гравитационному излу-}\\ \text{чению, чтобы затормозить движение, если}\\ \text{турбулентность, теплопроводность и другие}\\ \text{эффекты не сделают этого быстрее}\end{array}\right) =$$

$$= \tau \sim M\,(M/R)^{-4} \sim 0{,}1 \text{ с} \sim 300 \text{ периодов}.$$

На последних стадиях звездных пульсаций, когда амплитуда $\xi = \delta r$ уменьшается настолько, что $\delta r/r \ll 1$, можно точно вычислить частоты пульсаций и времена затухания, рассматривая движение среды и гравитационные волны как малые возмущения, наложенные на равновесную модель звезды. Результаты таких расчетов, которые прекрасно согласуются с приведенными выше грубыми оценками, приведены в дополнении 36.1.

Когда проходит много времени после затухания пульсаций нейтронной звезды за счет гравитационного излучения и других причин, звезда продолжает вращаться, и при этом вращении, обладая магнитным моментом, не совпадающим по направлению с осью вращения, звезда испускает радиоволны, свет и рентгеновское излучение, отождествляемые астрономами с «излучением пульсара». В этой пульсарной фазе гравитационное излучение существенно только в том случае, если звезда деформирована относительно оси симметрии (аксиальная симметрия соответствует постоянному квадрупольному моменту, т. е. отсутствию гравитационных волн). Согласно оценкам, сделанным в упражнении 36.3, деформация, содержащая всего 0,001 массы звезды, в случае самого молодого из всех известных пульсаров (Крабовидная туманность) могла бы излучать 10^{38} эрг/с; неизбежно присутствующая при этом реакция излучения могла бы быть существенной причиной замедления пульсара. Однако в настоящее время (1973 г.) вовсе не очевидно и кажется даже неправдоподобным, что нейтронная звезда может поддерживать даже такую малую деформацию.

5) от молодых пульсаров

Большинство источников, рассмотренных в этом параграфе, являются «импульсными» источниками в противоположность непрерывным (звезда, коллапсирующая под гравитационный радиус, осколки вещества, падающие в черную дыру, столкнове-

ние между черными дырами, взрыв сверхновой). Эти источники дают всплески гравитационных волн. Метод расчета таких всплесков по порядку величины разбирается в дополнении 36.2.

Очень трудно и рискованно переходить от подобного описания процессов, которые должны генерировать гравитационные волны, к оценке характеристик самих волн, действительно падающих на Землю. Такая оценка была сделана в 1972 г. [240]; она подлежит пересмотру по мере совершенствования наших представлений о Вселенной.

УПРАЖНЕНИЯ

36.2. Гравитационные волны от вещества, падающего в черную дыру

Сгусток вещества массы m падает в черную дыру массы M. Покажите, что продолжительность импульса гравитационных волн $\sim M$, а его мощность $L_{GW} \sim (m/M)^2 L_0$, так что полная излученная энергия определяется по порядку величины выражением (36.13).

36.3. Гравитационные волны от пульсирующей нейтронной звезды

В качестве идеализации нейтронной звезды возьмите сферу из несжимаемой жидкости массы M и радиуса R, структура которой подчиняется ньютоновскому закону тяготения. Пусть звезда пульсирует на основной квадрупольной моде. Воспользовавшись ньютоновской теорией, вычислите: угловую частоту пульсаций ω; энергию пульсаций $E_{\text{пульс}}$; величину $^1/_5 \langle \dddot{I}^2 \rangle$, которая, согласно (36.1), представляет собой мощность, излученную в виде гравитационных волн, L_{GW}; время τ, за которое энергия пульсаций уменьшается в e раз за счет уноса энергии излучением, $\tau = E_{\text{пульс}}/L_{GW}$. Сравните полученные ответы с выражениями (36.5), основанными на значительно более грубом приближении, а также с результатами, полученными в дополнении 36.1, которые основаны на значительно лучшем приближении. (Решение см. в работе [241], табл. 13.)

36.4. Замедление пульсара

Пульсар NP0532 в Крабовидной туманности обладает периодом 0,033 с и замедляется со скоростью $dP/dt = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$ с/год. Предполагая, что пульсар представляет собой типичную нейтронную звезду, вычислите скорость, с какой он теряет энергию вращения. Если эта потеря энергии обусловлена в первую очередь реакцией гравитационного излучения, то какова величина неаксиальной деформации звезды? (Решение см. в работе [242], а строгий анализ для случая сильного поля — в работе [243].)

Дополнение 36.1. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ ПУЛЬСИРУЮЩИХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

В приведенной здесь таблице, заимствованной из работы [244], показаны различные характеристики квадрупольных колебаний нескольких типичных моделей нейтронных звезд. Отметим, что гравитационные волны, испускаемые наиболее массивными из всех моделей, 1) имеют частоты $\nu = 1/T_n \sim 3000$ Гц, 2) длятся в течение времени $\sim 1/3$ с, 3) приводят к затуханию колебаний звезды всего лишь за ~ 1000 периодов колебаний и 4) уносят полную энергию $\sim(10^{54}$ эрг$)\cdot(\delta R/R)^2$, где $\delta R/R$ — начальная относительная амплитуда пульсаций поверхности звезды.

Эти результаты получены *не* на основе почти ньютоновского формализма медленных движений, изложенного в этой главе [соотношение (36.1), § 36.7 и 36.8], поскольку этот формализм неприменим в рассматриваемой области: приведенная длина волны излучения $\lambda\!\!\!^{-} \sim 15$ км для волн от наиболее массивной звезды сравнима с гравитационным радиусом звезды $2M \sim 6$ км, а внутреннее гравитационное поле в звезде не является слабым (M/R достигает 0,29). Вот почему эти результаты были получены иными методами, пригодными для случая быстрых движений и сильных гравитационных полей, но при использовании которых предполагается малость возмущений, наложенных на равновесную модель звезды. Детали см. в работе [244] и в цитированных там работах.

Квадрупольные пульсации нейтронных звезд

Уравнение состояния	ρ_c, г/см³	$M/M_\odot$	$2M/R$	n	T_n, мс	τ_n, с	τ_n/T_n	$\frac{E_m}{\langle(\delta R/R)^2\rangle}$, эрг	$\frac{\text{мощность}}{\langle(\delta R/R)^2\rangle}$, эрг/с	$\frac{(\delta R/R)}{(\delta r/r)_c}$	$\delta\theta_s/\delta\theta_c$
Г—У	$3\cdot10^{14}$	0,405	0,0574	0	1,197	13,0	11 000	$7{,}8\cdot10^{50}$	$1{,}2\cdot10^{50}$	+7,4	+3,1
Г—У	$6\cdot10^{15}$	0,682	0,240	0	0,3109	0,19	610	$2{,}8\cdot10^{52}$	$2{,}9\cdot10^{53}$	+5,2	+3,7
				1	0,1713	0,28	1 600	$3{,}6\cdot10^{51}$	$2{,}6\cdot10^{52}$	—14,0	—3,3
				2	0,1179	1,3	11 000	$2{,}6\cdot10^{50}$	$3{,}9\cdot10^{50}$	+55,0	+5,9
				3	0,0938	24,0	250 000	$8{,}9\cdot10^{48}$	$7{,}0\cdot10^{47}$	—350,0	—24,0
V_γ	$5{,}15\cdot10^{14}$	0,677	0,159	0	0,6991	1,7	2 400	$5{,}7\cdot10^{52}$	$7{,}0\cdot10^{52}$	+1,4	+1,3
				1	0,2358	11,0	47 000	$6{,}0\cdot10^{50}$	$1{,}1\cdot10^{50}$	—38,0	—4,7
V_γ	$3\cdot10^{15}$	1,954	0,580	0	0,3777	0,22	600	$1{,}7\cdot10^{54}$	$1{,}6\cdot10^{55}$	+1,9	+3,1
				1	0,1556	1,6	10 000	$1{,}5\cdot10^{54}$	$1{,}9\cdot10^{54}$	—2,1	—0,66
				2	0,1026	2,6	25 000	$5{,}2\cdot10^{53}$	$4{,}0\cdot10^{53}$	+2,9	+0,40

Различные колонки в таблице имеют следующие значения:

Уравнение состояния — уравнение состояния p (ρ), используемое при построении равновесной модели звезды и при вычислении индекса адиабаты $\gamma = [(\rho + p)/p]\, dp/d\rho$; Г — У — уравнение состояния Гаррисона — Уилера, табулированное Хартлем и Торном [245], табл. 1; V_γ — уравнение состояния Левинджера — Симмонса — Цурута — Камерона, табулированное Хартлем и Торном [245], табл. 2.

ρ_c — центральная плотность полной массы-энергии для равновесной модели звезды.

$M/M_\odot$ — полная масса-энергия равновесной модели (т. е. масса, которая определяется по удаленным кеплеровским орбитам) в единицах солнечной массы.

$2M/R = 2GM/Rc^2$ — отношение гравитационного радиуса равновесной модели к ее действительному радиусу (радиусы определяются соотношением $4\pi R^2$-площадь поверхности).

n —«порядок» изучаемой нормальной моды пульсаций [для всех приведенных здесь моделей n является также числом узлов в радиальной собственной функции относительного возмущения $\delta r/r$; $n = 0$ — основная (квадрупольная) мода].

$T_n = 2\pi/\omega_n$ — период пульсаций квазинормальной моды, измеренный в миллисекундах.

τ_n — время затухания нормальной моды, измеренное в секундах.

$\tau_n/T_n = \omega_n\tau_n/2\pi$ — число пульсаций, необходимых для того, чтобы амплитуда уменьшилась в e раз.

$E_M/\langle(\delta R/R)^2\rangle$ — энергия пульсации звезды, деленная на квадрат относительной, усредненной по поверхности амплитуды радиального движения поверхности звезды.

Мощность/$\langle(\delta R/R)^2\rangle$ — излученная в виде гравитационных волн мощность, деленная на средний по поверхности квадрат относительной амплитуды движения поверхности звезды.

$(\delta R/R)\ (\delta/r/r)_c^{-1}$ — относительная амплитуда радиального движения поверхности звезды, деленная на относительную амплитуду ее центра.

$\delta\theta_s/\delta\theta_c = \delta\phi_s/\delta\phi_c$ — амплитуда углового смещения жидкого вещества звезды на ее поверхности, деленная на аналогичную амплитуду в центре звезды.

Дополнение 36.2. АНАЛИЗ ВСПЛЕСКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ

	Электромагнетизм	Гравитация
Характерный момент, ответственный за излучение	$d_x(t)$	$I_{xx}(t)$
Его фурье-образ	$(2\pi)^{-1/2}\int d_x \exp[i\omega t]\,dt$	$(2\pi)^{-1/2}\int I_{xx}\exp[i\omega t]\,dt$
Обозначение этой величины	$d_x(\omega)$	$I_{xx}(\omega)$
Разложение полной потери энергии на излучение ΔE по времени	$c^{-3}\int \ddot{d}^2(t)\,dt$	$Gc^{-5}\int \dddot{I}^2(t)\,dt$
Разложение ΔE по круговой частоте	$c^{-3}\int \ddot{d}^2(\omega)\,d\omega$	$Gc^{-5}\int \dddot{I}^2(\omega)\,d\omega$

Продолжение

	Электромагнетизм	Гравитация
Выражение под интегралом почти постоянно от $\omega=0$ до критического значения $\omega_{кр}$, за которым излучение резко падает	$\omega_{кр} \sim 1/\Delta t$	$\omega_{кр} \sim 1/\Delta t$
$-d\Delta E/d\omega$ для $\omega < \omega_{кр}$	$\sim c^{-3}\ddot{d}^2(0)$	$\sim Gc^{-5}\dddot{I}^2(0)$
Момент с нулевой частотой, входящий в эту формулу	$\sim (e_1\Delta v_{x1}+e_2\Delta v_{x2})$	Δ («кинетическая энергия»)$_{xx}$
Переписанное выражение для $-d\Delta E/d\omega$	$\sim (e\Delta v)^2/c^3$	$\sim G\,[\Delta\,(\text{«к.э.»})_{xx}]^2/c^5$
Полная энергия, заключенная в импульсе	$\sim \dfrac{\text{(предыдущее выражение)}}{\Delta t}$	$\sim \dfrac{\text{(предыдущее выражение)}}{\Delta t}$

Дополнение заимствовано из книги Уилера [139], стр. 113, 114.

В качестве образца применения этого анализа Уилер [139] приводит следующий расчет:

Параметр	Один атомный распад с энергией 180 МэВ	Атомная бомба в 17 килотонн при к.п.д. 10%	Удар метеорита о Землю при скорости, равной второй космической	Взрыв звезды, при котором высвобождается 10^{-4} ее массы
Масса, г	$4\cdot10^{-22}$	10^4	10^9	$2\cdot10^{33}$
Скорость, см/с	$1{,}2\cdot10^8$	$4\cdot10^8$	$11\cdot10^5$	$4\cdot10^8$
Энергия, эрг	$2{,}9\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{20}$	$6\cdot10^{20}$	$1{,}8\cdot10^{50}$
Предполагаемая доля вещества, ответственная за излучение	1	0,1	1	0,1
Интеграл от этого момента по времени =				
«к.э.»$_{xx}$, эрг	$29\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{19}$	$6\cdot10^{20}$	$1{,}8\cdot10^{49}$
«к.э.»$_{xx}/c^2$, г	$3{,}2\cdot10^{-25}$	0,08	0,67	$2\cdot10^{28}$
$\dfrac{dE}{d\omega}\sim\dfrac{G}{c}\left(\dfrac{\text{к.э.}_{xx}}{c^2}\right)$, эрг/(рад/с)	$2{,}3\cdot10^{-67}$	$1{,}4\cdot10^{-20}$	$1{,}0\cdot10^{-18}$	$9\cdot10^{38}$
Δt, с	10^{-21}	10^{-8}	10^{-3}	10^4
$\Delta\omega\sim 1/\Delta t$, рад/с	10^{21}	10^8	10^3	10^{-4}
$\Delta E_{\text{излуч}}$, эрг	10^{-46}	10^{-12}	10^{-15}	10^{35}
Предполагаемое расстояние до детектора, см	10^3	10^3	10^9	10^{23}
$\Delta E/4\pi r^2$, эрг/см^2	10^{-53}	10^{-19}	10^{-34}	10^{-12}

Читатель может найти весьма полезным продолжить эту таблицу для всплесков гравитационных волн, испущенных: 1) осколками вещества, падающими в черную дыру, 2) столкновением двух черных дыр и 3) взрывом сверхновой, при котором звезда с массой в две солнечные массы сжимается до ядерной плотности, выбрасывая в этом процессе половину своей массы.

§ 36.6. ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ КАК ИСТОЧНИКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Двойные звезды в качестве источников гравитационных волн:

Самыми многочисленными источниками слабых гравитационных волн являются двойные системы. Больше того, приблизительно половина всех звезд входит в состав двойных или других кратных систем (см., например, [246]). Согласно кеплеровским законам, если две звезды с массами m_1 и m_2 вращаются одна относительно другой с угловой скоростью ω и разделены расстоянием a, то ω и a связаны соотношением

$$\omega^2 a^3 = m_1 + m_2 \equiv M.$$

Кинетическая энергия этого движения

$$\text{кинетическая энергия} = -\frac{1}{2}\,\text{потенциальная энергия} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{a}.$$

Мощность, излучаемая этими двумя звездами в виде гравитационных волн, может быть грубо оценена как квадрат мощности, соответствующей круговому движению, $L \sim \omega \times$ (кинетическая энергия) : таким образом,

$$L_{GW} \sim \frac{\mu^2 M^3}{4a^5} L_0,$$

где $\mu = m_1 m_2/M$ — приведенная масса, а $M = m_1 + m_2$ — полная масса двойной системы.

Точное вычисление, основанное на уравнении (36.1), дает результат, который отличается на множитель ~ 30; для двойной системы с большой полуосью a и эксцентриситетом ε излучаемая мощность, усредненная по периоду орбитального вращения, составляет

1) излучаемая мощность

$$L_{GW} = \frac{32}{5}\frac{\mu^2 M^3}{a^5} f(\varepsilon) L_0, \qquad (36.16а)$$

где $f(\varepsilon)$ — безразмерная «поправочная функция»:

$$f(\varepsilon) = \left[1 + \frac{73}{24}\varepsilon^2 + \frac{37}{96}\varepsilon^4\right](1-\varepsilon^2)^{-7/2}. \qquad (36.16б)$$

(См. упражнение 36.6 в конце § 36.8, а также работу [247].)

2) эффекты, связанные с реакцией излучения

По мере того как двойная система теряет энергию за счет гравитационного излучения, звезды по спирали приближаются друг к другу (уменьшение энергии; увеличение гравитационной связи). Для круговых орбит энергия $E = -\frac{1}{2} m_1 m_2/a = -\frac{1}{2}\mu M/a$ уменьшается как

$$dE/dt = {}^1/_2\,(\mu M/a^2)\,(da/dt) = -L_{GW} = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2 M^3}{a^5}.$$

Следовательно, изменение радиуса орбиты дается формулой

$$a = a_0 (1 - t/\tau_0)^{1/4}, \tag{36.17а}$$

где $a_0 = a_{\text{сегодня}}$ и

$$\tau_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{-E}{L_{GW}} \right)_{\text{сегодня}} = \frac{5}{256} \frac{a_0^4}{\mu M^2} . \tag{36.17б}$$

Таким образом, если не вмешиваются негравитационные силы, две звезды, двигаясь по спирали, достигают друг друга за время τ_0 (*время движения по спирали*). Для эллиптических орбит изменяется также эксцентриситет. Излучение испускается главным образом в периастре. Поэтому действие тормозящих сил реакции излучения максимально как раз в периастре. Эффект этих сил состоит в том, что у звезд отбирается некоторая часть кинетической энергии, связанной с изменением расстояния между звездами («радиальной кинетической энергии»). Вследствие этого орбита все более приближается к круговой. (Детальные расчеты см. в работе [247].)

В дополнении 36.3 приводятся следующие вычисленные величины: излучаемая мощность, поток у Земли и времена затухания для нескольких известных двойных систем и для нескольких интересных гипотетических случаев. Заметим, что в наиболее благоприятных случаях период составляет несколько часов, время затухания порядка возраста Вселенной (может быть, отсутствие более мощных источников обусловлено тем, что их разрушила реакция излучения?); мощность, излучаемая в виде гравитационных волн $\sim 10^{30}$—10^{32} эрг/с (что приближается к мощности светового излучения Солнца, $3{,}9 \cdot 10^{33}$ эрг/с); вычисленный поток у Земли $\sim 10^{-10}$—10^{-12} эрг/с·см^2 (слишком мал, чтобы его можно было детектировать в 1973 г., но, возможно, несколько десятилетий спустя он уже не будет считаться слишком малым; см. гл. 37).

3) конкретные двойные, наблюдаемые астрономами

Гипотетические случаи, рассмотренные в дополнении 36.3, иллюстрируют выведенные в § 36.4 общие соотношения для астрофизических систем, а именно L_{GW} приближается к L_0 только тогда, когда система приближается к своему гравитационному радиусу, и только тогда затухание приводит к потере почти всей энергии за один период.

§ 36.7. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЧТИ НЬЮТОНОВСКИХ МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ

Перейдем теперь от наглядных астрофизических источников к строгим формулам, справедливым для широкого класса источников. Одна из таких формул (36.1) уже была выписана:

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \langle \dddot{I}_{jk} \dddot{I}_{jk} \rangle,$$

Дополнение 36.3. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ[1])

Тип системы	Название	Период	$\frac{m_1}{M_\odot}$	$\frac{m_2}{M_\odot}$	Расстояние от Земли, пс	Время падения по спирали [2])	L_{GM}, эрг/с	Поток у Земли, эрг/с·см^2
Солнечная система (Солнце + Юпитер)	Солнечная система	11,86 лет	1,0	$9{,}56\cdot10^{-4}$	Земля находится в ближней зоне	$2{,}5\cdot10^{23}$ лет	$5{,}2\cdot10^{10}$	—
Типичные двойные системы, разрешаемые на компоненты [248]	ηCas	480 лет	0,94	0,58	5,9	$9{,}5\cdot10^{24}$	$5{,}6\cdot10^{10}$	$1{,}4\cdot10^{-29}$
	ξ Boo	149,95 лет	0,85	0,75	6,7	$3{,}8\cdot10^{23}$	$3{,}6\cdot10^{12}$	$6{,}7\cdot10^{-28}$
	Сириус	49,94 лет	2,28	0,98	2,6	$7{,}2\cdot10^{21}$	$1{,}1\cdot10^{15}$	$1{,}3\cdot10^{-24}$
	Fu 46	13,12 лет	0,31	0,25	6,5	$3{,}2\cdot10^{21}$	$3{,}6\cdot10^{14}$	$7{,}1\cdot10^{-26}$
Типичные затменные двойные системы [249[	β Лиры	12,925 сут	19,48	9,74	330	$7{,}0\cdot10^{11}$	$0{,}057\cdot10^{30}$	$0{,}0004\cdot10^{-11}$
	UWC Ma	4,395 сут	40,0	31,0	1470	$8{,}2\cdot10^{9}$	$49\cdot10^{30}$	$0{,}019\cdot10^{-11}$
	β Персея	2,867 сут	4,70	0,94	30	$3{,}2\cdot10^{11}$	$0{,}014\cdot10^{30}$	$0{,}013\cdot10^{-11}$
	WU Ma	0,33 сут	0,76	0,57	110	$6{,}2\cdot10^{9}$	$0{,}47\cdot10^{30}$	$0{,}032\cdot10^{-11}$
Наиболее благоприятные случаи [250]	UV Leo	0,6 сут	1,36	1,25	68	$1{,}0\cdot10^{10}$	$0{,}63\cdot10^{30}$	$0{,}012\cdot10^{-11}$
	V Pup	1,45 сут	16,6	9,8	390	$2{,}3\cdot10^{9}$	$65\cdot10^{30}$	$0{,}36\cdot10^{-11}$
	i Boo	0,268 сут	1,35	0,68	12	$2{,}0\cdot10^{9}$	$3{,}2\cdot10^{30}$	$18\cdot10^{-11}$
	YY Eri	0,321 сут	0,76	0,50	42	$6{,}6\cdot10^{9}$	$0{,}42\cdot10^{30}$	$0{,}20\cdot10^{-11}$
	SW Lac	0,321 сут	0,97	0,83	75	$3{,}5\cdot10^{9}$	$1{,}5\cdot10^{30}$	$0{,}21\cdot10^{-11}$
	WZ Sge	81 мин	0,6	0,03	100	$1{,}1\cdot10^{9}$ лет	$0{,}5\cdot10^{30}$	$0{,}04\cdot10^{-11}$
Гипотетические двойные системы (нейтронные звезды или черные дыры)	10^4 км	12,2 с	1,0	1,0	1000	3,2 лет	$3{,}25\cdot10^{41}$	$2{,}7\cdot10^{-3}$
	10^3 км	0,39 с	1,0	1,0	1000	2,8 час.	$3{,}25\cdot10^{46}$	$2{,}7\cdot10^{2}$
	10^2 км	12,2 мс	1,0	1,0	1000	1,0 с	$3{,}25\cdot10^{51}$	$2{,}7\cdot10^{7}$
	10 км	0,39 мс	1,0	1,0	1000	0,10 мс	$3{,}25\cdot10^{56}$	$2{,}7\cdot10^{12}$

1) Основано на таблицах из работ Брагинского [250], а также Руфини и Уилера [115].
2) Время падения по спирали τ_0, даваемое формулой (36.17б), есть время, за которое две звезды, двигаясь по спирали, достигают друг друга при условии, что негравитационные силы на движение не влияют.

но вывод этой формулы еще не был дан, не обсуждалась и область ее применимости.

Эта формула для излучаемой мощности справедлива для любого «почти ньютоновского медленно движущегося источника», а именно она применима к любому источнику, для которого

«Почти ньютоновское приближение медленного движения» для исследования источников гравитационных волн

$$(\text{размер источника})/(\text{приведенная длина волны}) \ll 1, \quad (36.18а)$$

$$|\,\text{ньютоновский потенциал}\,| \ll \frac{(\text{размер источника})}{(\text{приведенная длина волны})}, \quad (36.18б)$$

$$\frac{(\text{характерная величина напряжения})}{(\text{плотность массы})} \ll \frac{(\text{размер источника})}{\left(\begin{array}{l}\text{приведенная длина}\\ \text{волны}\end{array}\right)}. \quad (36.18в)$$

Формула не справедлива (может быть применима лишь приближенно) для источников, обладающих большими скоростями движения или сильными полями. Более того, в настоящее время не существует формализма, позволяющего эффективно исследовать *общий* случай быстрого движения или сильного поля.

Оставшаяся часть этой главы посвящена исследованию гравитационных волн от почти ньютоновских медленно движущихся источников. Но этому анализу (курс 2, § 36.9—36.11) предшествует обзор, который относится к курсу 1 и занимает этот и следующий параграфы.

Для любого источника размера R со средней скоростью внутреннего движения v характерная приведенная длина волны ($\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$) испущенного излучения такова, что $\lambda\!\!\!^{-} \sim$ (амплитуда движения)$/v \lesssim R/v$. Следовательно, требование (36.18а), чтобы было $R/\lambda\!\!\!^{-} \ll 1$ [т. е. чтобы источник был ограничен малой областью, лежащей глубоко внутри ближней (неволновой) зоны], накладывает ограничение на скорость движения

$$v \ll 1.$$

Все мыслимые в настоящее время лабораторные генераторы гравитационных волн удовлетворяют этим двум взаимосвязанным условиям $v \ll 1$ и $R \ll \lambda\!\!\!^{-}$. Никто еще не придумал способа, как заставить макроскопическую массу двигаться со скоростью $v \sim 1$. Любая гравитационно связанная система также удовлетворяет этим условиям. Таким образом, для такой системы массы M условие гравитационной связанности $\frac{1}{2}Mv^2 \lesssim M^2/R$ гарантирует, что $v \lesssim (M/R)^{1/2} \ll 1$.

Условиям $M/R \ll R/\lambda\!\!\!^{-}$ и $|T^{jk}|/T^{00} \ll R/\lambda\!\!\!^{-}$ удовлетворяют любые почти ньютоновские источники, представляющие интерес. Для типичных источников (например, двойных звезд)

$$\frac{M}{R} \sim \frac{|T^{jk}|}{T^{00}} \sim \left(\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^2 \ll \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$$

(теорема вириала). В тех редких случаях, когда (M/R или $|T^{jk}|/T^{00}$) $\gtrsim R/\lambda$ (например, медленно пульсирующая звезда, находящаяся на пределе устойчивости), движение настолько медленно, что излучение является слишком слабым и не представляет большого интереса.

Определения массы, дипольного момента и приведенного квадрупольного момента для медленно движущегося источника

Для почти ньютоновской медленно движущейся системы имеется область пространства-времени, которая, с одной стороны, лежит глубоко внутри ближней неволновой зоны ($r \ll \lambda$), а с другой — вне границы источника ($r > R$); в этой области почти справедлива ньютоновская теория гравитации для вакуума. Наблюдатель, находящийся в этой ньютоновской области, может измерить ньютоновский потенциал Φ и разложить его по степеням $1/r$:

$$\Phi = -\left(\frac{M}{r} + \frac{d_j n^j}{r^2} + \frac{3\mathcal{I}_{jk} n^j n^k}{2r^3} + \dots\right), \quad \text{где } n^j = x^j/r. \tag{36.19а}$$

Он может дать названия коэффициентам этого разложения:

$M \equiv$ «полная масса-энергия» = «тяготеющая масса»,

$d_j \equiv$ «дипольный момент» (если наблюдатель специальным образом выберет начало координат, он может получить $d_j = 0$), (36.19б)

$\mathcal{I}_{jk} \equiv$ «приведенный квадрупольный момент» [поскольку система почти ньютоновская, $\mathcal{I}_{jk}$ дается выражением (36.3)].

В волновой зоне статическая часть потенциала ($-M/r - d_j n^j/r^2$) сохраняет свою ньютоновскую форму неизменной. Но динамическая часть ($-\frac{3}{2}\,\mathcal{I}_{jk} n^j n^k/r^3$) перестает описываться на ньютоновском языке. По мере того как становятся заметными эффекты запаздывания (при растущих значениях r), динамическая часть постепенно превращается в расходящиеся гравитационные волны, которые следует описывать либо с помощью неупрощенной общей теории относительности, либо линеаризованной теории, либо с использованием «коротковолнового приближения», изложенного в § 35.13.

Свойства гравитационных волн, выраженные через приведенный квадрупольный момент:

Если мы предпочли использовать в волновой зоне линеаризованную теорию и если мы наложили в этой зоне условия поперечной калибровки со следом, равным нулю, ($h^{TT}_{0\mu} = 0$, $h^{TT}_{jj} = 0$. $h^{TT}_{jk,\,k} = 0$), то гравитационные волны принимают вид

1) волновое поле h^{TT}_{jk}

$$h^{TT}_{jk} = \frac{2}{r}\ddot{\mathcal{I}}^{TT}_{jk}(t-r) + \text{поправки порядка } \left[\frac{1}{r^2}\dot{\mathcal{I}}^{TT}_{jk}(t-r)\right] \tag{36.20}$$

[это выражение выводится ниже, см. (36.47)]. Здесь $\ddot{\mathcal{I}}^{TT}_{jk}$ — вторая производная по времени от той части квадрупольного момента,

которая поперечна и имеет равный нулю след (поперечна радиальному направлению; см. § 35.4); таким образом,

$$\overset{\cdot\cdot}{I}{}^{TT}_{jk} = P_{ja}\overset{\cdot\cdot}{I}_{ab}P_{bk} - \frac{1}{2}P_{jk}P_{ab}\overset{\cdot\cdot}{I}_{ab},$$

$$P_{ab} = (\delta_{ab} - n_a n_b) \text{ (оператор проекции)}, \qquad (36.21)$$

$$n_a = x^a/r \text{ (единичный радиальный вектор)}.$$

Эффективный тензор энергии-импульса для этих расходящихся волн (§ 35.7) имеет ту же форму, что и для совокупности частиц с нулевой массой покоя, движущихся по радиусам наружу со скоростью света; на больших расстояниях компоненты этого тензора наинизшего неисчезающего порядка равны

$$T^{(GW)}_{00} = -T^{(GW)}_{0r} = T^{(GW)}_{rr} = \frac{1}{32\pi}\langle \dot{h}^{TT}_{jk,0}\dot{h}^{TT}_{jk,0}\rangle = \frac{1}{8\pi r^2}\langle \dddot{I}{}^{TT}_{jk}\dddot{I}{}^{TT}_{jk}\rangle =$$

2) эффективный тензор энергии-импульса

$$= \frac{1}{8\pi r^2}\langle \dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk} - 2n_i\dddot{I}_{ij}\dddot{I}_{jk}n_k + \frac{1}{2}(n_j\dddot{I}_{jk}n_k)^2\rangle. \qquad (36.22)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по нескольким длинам волн. (Напомним, что энергию гравитационных волн нельзя локализовать в области меньше длины волны!) Полная мощность, протекающая через сферу радиуса r в момент времени t, составляет

$$L_{GW}(t, r) = \int T^{(GW)0r}r^2\,d\Omega = \frac{1}{5}\langle \dddot{I}_{jk}(t-r)\,\dddot{I}_{jk}(t-r)\rangle \qquad (36.23)$$

3) полная излучаемая мощность

[см. упражнение (36.9)]. Это и есть формула (36.1), с которой начиналась данная глава.

Волновые фронты имеют не точно сферическую форму. Например, для двойной звездной системы волновые фронты в экваториальной плоскости должны представлять собой спирали. Это означает, что поток имеет слабую нерадиальную компоненту импульса, которая уменьшается с расстоянием как $1/r^3$. С этим нерадиальным импульсом непосредственно связана плотность момента импульса (момента импульса относительно центра системы $r = 0$), спадающая наружу как $1/r^2$ (см. [236] с поправками, внесенными в работе [251], стр. 286)

$$\mathcal{J}^i = \frac{1}{8\pi r^2}\varepsilon^{ijk}\langle -6n_j\dddot{I}_{km}\dddot{I}_{mp}n_p + 9n_j\dddot{I}_{km}n_m n_p\dddot{I}_{pq}n_q\rangle. \qquad (36.24)$$

4) плотность момента импульса

Интеграл от этой величины по сфере представляет собой полный момент импульса, уносимый наружу за единицу времени

$$-dJ_j/dt = \int \mathcal{J}_j r^2\,d\Omega = \frac{2}{5}\varepsilon^{jk\ell}\langle \dddot{I}_{ka}\dddot{I}_{a\ell}\rangle \qquad (36.25)$$

5) полный излучаемый момент импульса

(см. упражнение 36.9).

§ 36.8. РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКАХ[1])

Граничное условие для расходящейся волны приводит к потенциалу реакции излучения ньютоновского типа

Законы сохранения, обсуждавшиеся в дополнении 19.1 и выведенные в § 20.5, гарантируют, что источник теряет энергию и момент импульса с той же скоростью, с какой гравитационные волны уносят их наружу. Непосредственным агентом, который создает эти потери, является малая компонента пространственно-временной кривизны внутри источника, меняющая свой знак на обратный, если перейти от (реалистического) граничного условия на бесконечности для расходящейся волны к обратному (нереалистическому) граничному условию для сходящейся волны. Если источник подчиняется условиям (36.18), т. е. является почти ньютоновским и медленно движущимся, то эти части кривизны, обусловливающие «реакцию излучения», могут быть описаны на ньютоновском языке.

В динамическую часть ньютоновского потенциала в ее «классическом виде»

$$\Phi = -\frac{3}{2} I_{jk}(t)\, n_j n_k / r^3 + O(1/r^4)$$

[выражение (36.18)] запаздывание не входит. (Ньютоновская теория предполагает дальнодействие!) Следовательно, классический потенциал невозможно выбрать так, чтобы на больших радиусах он сшивался с расходящимися или со сходящимися волнами. Не поддающийся такому сшиванию классический потенциал допускает, однако, промежуточный путь — сшивание со стоячими волнами (половина расходящихся волн плюс половина сходящихся). Но это не то, что требуется. Оказывается (см. § 36.11), что осуществить сшивание с чисто расходящимися волнами можно в том и только в том случае, если к Φ добавить малый потенциал «реакции излучения»:

Вид и величина потенциала реакции излучения

$$\Phi = \Phi_{\text{класс. ньют. теор}} + \Phi^{(\text{реакц})}, \tag{36.26а}$$

$$\Phi^{(\text{реакц})} = \frac{1}{5} \frac{d^5 I_{jk}}{dt^5} x^j x^k. \tag{36.26б}$$

Если вместо этого положить $\Phi = \Phi_{\text{класс}} - \Phi^{(\text{реакц})}$, то потенциал будет сшиваться с чисто сходящимися волнами.

По порядку величины потенциал реакции излучения есть

$$\Phi^{(\text{реакц})} \sim \frac{1}{\lambda^5}(MR^2) r^2 \sim \frac{MR^2}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^5. \tag{36.27}$$

---

[1]) Описываемые в этом параграфе понятия и формализм были разработаны Бурке [252], Торном [253], а также Чандрасекаром и Эспозито [254]. Предвестниками этих идей послужили работы Петерса [236] и Переса и Розена [237].

Следовательно, вблизи источника он очень мал по сравнению с классическим ньютоновским потенциалом [меньше на множитель $(R/\lambda)^5 \sim v^5$!]. Однако на внутренней границе волновой зоны ($r \sim \lambda$) он одного порядка величины с динамической квадрупольной частью классического потенциала.

Эффекты, связанные с потенциалом:

Потенциал реакции излучения как часть ньютоновского потенциала играет ту же роль в создании ускорений, что и любая другая часть ньютоновского потенциала. Любая частица в ньютоновской области испытывает гравитационное ускорение, которое дается выражением

$$a_j = -\Phi_{,j} = -\Phi_{\text{класс},\,j} - \Phi^{(\text{реакц})}_{,j}. \tag{36.28}$$

1) ускорения, вызываемые реакцией излучения

Внутри источника это ускорение приводит к потерям энергии и углового момента, которые определяются выражениями

$$dE/dt = \int \rho a_j v_j \, d^3x, \tag{36.29а}$$

$$dJ_j/dt = \int \varepsilon_{jk\ell} x_k \rho a_\ell \, d^3x. \tag{36.29б}$$

(Здесь ρ — плотность, v_j — скорость и a_j, как и выше,— ускорение вещества в источнике.) В классической ньютоновской теории энергия и момент импульса источника сохраняются. Поэтому потери обусловливаются лишь той частью потенциала, которая соответствует реакции излучения:

2) потери энергии и момента импульса

$$\begin{aligned} dE/dt &= -\int \rho \Phi^{(\text{реакц})}_{,j} v_j d^3x, \\ dJ_j/dt &= -\int \varepsilon_{jk\ell} x_k \rho \Phi^{(\text{реакц})}_{,j} \, d^3x. \end{aligned} \tag{36.30}$$

Непосредственное вычисление (упражнение 36.5) с использованием выражения (36.26б) для потенциала реакции излучения дает усредненные по времени потери энергии и момента импульса

$$\begin{aligned} dE/dt &= -\frac{1}{5} \langle \dddot{I}_{jk} \dddot{I}_{jk} \rangle, \\ dJ_j/dt &= -\frac{2}{5} \varepsilon_{jk\ell} \langle \dddot{I}_{ka} \dddot{I}_{a\ell} \rangle. \end{aligned} \tag{36.31}$$

Заметим, что эти результаты совпадают с энергией и моментом импульса, уносимыми излучением, согласно (36.1) и (36.25). Это совпадение является абсолютно обязательным. Этого требуют законы сохранения полной энергии и момента импульса.

Потенциал реакции излучения для электромагнитных волн

Медленно движущаяся электромагнитная система, испускающая дипольное излучение электрического типа, обладает потенциалом реакции излучения

$$A_j^{(\text{реакц})} = 0, \qquad A_0^{(\text{реакц})} = -\Phi^{(\text{реакц})} = \frac{2}{3} \dddot{d}_j x^j, \tag{36.32}$$

который аналогичен $\Phi^{(\text{реакц})}$ в теории гравитации (см., например, [255]). Однако обычно главное внимание обращают не на этот потенциал и не на создаваемые им силы реакции излучения. Вместо этого в центре внимания находится, как правило, сила реакции излучения в частном случае, когда изолированный заряд ускоряется неэлектромагнитными силами. Сила реакции для такого заряда равна

$$F^{(\text{реакц})} = \frac{2}{3} e^2 \dddot{x}. \tag{36.33}$$

В теории гравитации подобной формулы не существует, поскольку не существует такого объекта, как гравитационно изолированная излучающая частица (т. е. частица, которая ускоряется под действием сил, никак не связанных с гравитацией).

УПРАЖНЕНИЯ

36.5. Потери энергии и момента импульса вследствие реакции излучения

Выведите выражения (36.31) для скорости, с которой торможение гравитационным излучением истощает запасы энергии и момента импульса медленно движущегося источника. При выводе за основу возьмите уравнения (36.26б) и (36.30).

36.6. Гравитационные волны от двойных звезд

Примените весь формализм, изложенный выше в § 36.7 и 36.8, к двойной звездной системе с круговыми орбитами. Рассчитайте угловое распределение гравитационного излучения, полную излучаемую мощность, полный излучаемый момент импульса, силы реакции излучения и потери энергии и момента импульса вследствие реакции излучения. Сравните ответы с результатами, полученными в § 36.6. (Более подробное решение см. в работе [247].)

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. В качестве подготовки к ней необходима гл. 20 (законы сохранения). Она будет весьма полезна для изучения гл. 39 (постньютоновский формализм), но не является обязательной для каких бы то ни было других глав.

§ 36.9. ПРИНЦИПЫ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ ВЫВОДА ФОРМУЛ ДЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Вывод формулы для поля гравитационного излучения медленно движущегося источника:

Перейдем теперь от самих формул для излучения почти ньютоновских медленно движущихся систем к выводу этих формул. Сначала (в этом параграфе) воспользуемся неупрощенной общей теорией относительности без каких бы то ни было аппроксимаций, не будем предполагать даже медленности движения. Наложим лишь

2

то ограничение, что источник является изолированным и пространство-время вдали от него асимптотически плоское.

Воспользуемся системой координат, которая быстро, насколько позволяет кривизна пространства-времени, переходит в асимптотически лоренцеву систему по мере удаления от источника в радиальном направлении. Повсюду в этой системе координат, даже внутри источника, который может быть релятивистским, определим величины

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \tag{36.34}$$

Ясно, что $h_{\mu\nu}$ не являются компонентами тензора. Не являются компонентами истинного метрического тензора и $\eta_{\mu\nu}$. Тем не менее мы можем поднимать и опускать индексы в $h_{\mu\nu}$ с помощью $\eta_{\mu\nu}$ и *определить*

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad h = h_\alpha{}^\alpha = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}. \tag{36.35}$$

1) определение $\bar{h}_{\mu\nu}$

Более того, всегда можно подобрать координаты так, чтобы всюду, включая область внутри источника, $\bar{h}_{\mu\nu}$ точно удовлетворяло четырем условиям

$$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0. \tag{36.36}$$

При этих определениях и соглашениях $\bar{h}_{\mu\nu}$ вдали от источника переходит в гравитационное поле линеаризованной теории; это справедливо и для области внутри источника, если гравитация там слаба. Но если внутреннее гравитационное поле является сильным ($|\bar{h}_{\mu\nu}|$ не $\ll 1$), то $\bar{h}_{\mu\nu}$ во внутренней области не имеет никакого отношения к линеаризованной теории.

Точные эйнштейновские уравнения поля могут быть записаны через $\bar{h}^{\mu\nu}$ [ср. § 20.3; в частности, объединяя уравнения (20.14), (20.18) и (20.3) и налагая координатные условия (36.36)] в виде

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = -16\pi(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \tag{36.37}$$

2) уравнения поля в $\bar{h}_{\mu\nu}$

где $T^{\mu\nu}$ — компоненты тензора энергии-импульса, а $t^{\mu\nu}$ — величины (компоненты «псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля») второго или более высокого порядка по $\bar{h}_{\mu\nu}$. Напомним «точку зрения контролируемого неведения», развитую в § 19.3. Мы столь несведущи, что нигде до сих пор даже не выписывали явного выражения для $t^{\mu\nu}$ через $\bar{h}^{\alpha\beta}$, но это наше неведение контролируется таким образом, что это выражение в последующих вычислениях нам никогда не понадобится! Более конкретно, напряженность расходящейся волны пропорциональна интегралу от сложного выражения по внутренней области системы, где «гравитационные натяжения» могут быть сравнимы с натяжениями вещества ($|t^{jk}| \sim |T^{jk}|$. Но это неважно. На излучение влияет лишь квадрупольная часть поля. Кроме того, квадрупольный момент определяется эмпирически с помощью чисто

3) «точка зрения контролируемого неведения»

ньютоновских измерений в ньютоновской области, которая лежит 1) далеко внутри волновой зоны, но 2) далеко за пределами источника. Чтобы определить массу звезды (влияние на кеплеровские орбиты вне звезды), не обязательно знать, что происходит внутри нее; не обязательно это знать и для определения квадрупольного момента, *каким он воспринимается снаружи.*

Уравнения Эйнштейна (36.37), дополненные граничным условием для расходящейся волны, эквивалентны интегральным уравнениям

4) уравнения поля в интегральной форме

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = 4 \int\limits_{\substack{\text{по всему} \\ \text{пространству}}} \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}]_{\text{запазд}}}{|x - x'|} d^3x', \qquad (36.38)$$

где

$$|x - x'| \equiv [\sum_j (x^j - x^{j'})^2]^{1/2}, \qquad d^3x' \equiv dx^{1'}\, dx^{2'}\, dx^{3'},$$

а индекс «запазд» означает, что величина берется в запаздывающем событии пространства-времени

$$(t' = t - |x - x'|, x^{j'}).$$

Эти уравнения являются интегральными, поскольку неизвестные $\bar{h}^{\mu\nu}$ появляются как вне интеграла, так и под интегралом (под интегралом они входят в $t^{\mu\nu}$). Заметим, что при переходе от волновых уравнений (36.37) к интегральным уравнениям (36.38) мы обращались с величинами $\bar{h}^{\mu\nu}$ так, как будто они являются полями в плоском пространстве-времени. Это, конечно, неверно, но математические преобразования тем не менее не перестают быть корректными, и интегральные уравнения (36.38) справедливы для любой точки (t, x^j) даже внутри источника.

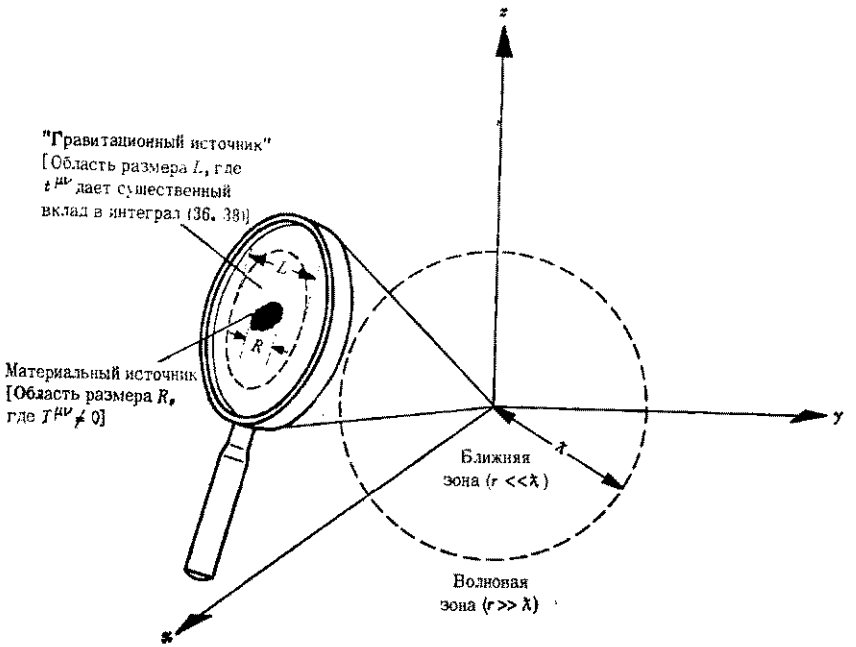
§ 36.10. РАСЧЕТ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

5) конкретизация для случая медленного движения

До сих пор рассмотрение было точным. Теперь необходимо сделать предположение о медленности движения, о котором шла речь в § 36.7, т. е. положить $R \ll \lambda$.

Поместим начало пространственных координат внутри источника, как показано на фиг. 36.3. В случае медленно движущихся систем существенный вклад в запаздывающие интегралы (36.38) дает лишь область, лежащая глубоко внутри ближней зоны (область размером $L \sim R \ll \lambda$; фиг. 36.3). Ограничимся рассмотрением «полевых точек» (т. е. точек наблюдения) x^j, лежащих далеко от «области источника»,

$$|x| \equiv r \gg L \gtrsim |x'| \qquad (36.39a)$$



ФИГ. 36.3.
Медленно движущийся источник, излучающий гравитационные волны. Начало пространственных координат расположено внутри источника. Размер источника R очень мал по сравнению с приведенной длиной волны $R \ll \lambda$. Существенный вклад в запаздывающий интеграл для $\bar{h}^{\mu\nu}$ (36.38) дает лишь область размером $L \sim R \ll \lambda$ вокруг источника, поскольку вне источника, но еще в ближней зоне ($R \ll r \ll \lambda$) «псевдотензор энергии-импульса» $t^{\mu\nu}$ убывает как $1/r^4$ (см. упражнение 36.7).

В волновой зоне $t^{\mu\nu}$ уже не убывает как $1/r^4$, а начинает убывать как $1/r^2$; поэтому он претендует на то, чтобы описывать энергию, уносимую гравитационными волнами (но в действительности не может этого сделать без соответствующего усреднения). Если источник излучает волны достаточно долго, то вклады от волновой зоны в запаздывающий интеграл (36.38) могут стать заметными:

$$[t^{\mu\nu}]_{\text{запазд}} \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow \int [t^{\mu\nu}]_{\text{запазд}}\, d^3x' \sim \int \frac{1}{r'^2}\, r'^2\, d\Omega\, dr'.$$

для $r > \lambda$

может иметь заметный вклад от больших r'

В тексте при расчете излучаемых волн подобные вклады не учитываются, поскольку они не имеют отношения к самому процессу излучения. Скорее их можно отнести к процессам распространения, рассматриваемым в предыдущей главе. Они включают фоновую кривизну, создаваемую за счет энергии-импульса гравитационных волн, рассеяние волн на фоновой кривизне, рассеяние волн друг на друге и т. д.; все они несущественны в окрестности самого источника (например, при $r \lesssim 1000\lambda$), так как медленно движущийся источник излучает очень слабо.

и разложим запаздывающий интеграл (36.38) по степеням отношения x'/r — точно так же, как это делалось в § 19.1. (Такое разложение обосновывается предположением о медленности движения $\lambda/R \sim \lambda/L \ll 1$.) В результате получаем

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x) = \frac{4}{r}\int [T^{\mu\nu}(x', t-r) + t^{\mu\nu}(x', t-r)]\, d^3x' + \\ + O\left\{\frac{x^j}{r^2\lambda}\int x^{j'}\,[T^{\mu\nu}(x', t-r) + t^{\mu\nu}(x', t-r)]\, d^3x'\right\}. \quad (36.40)$$

б) вычисление $\bar{h}^{jk}$ в волновой зоне

Из десяти компонент $\bar{h}^{\mu\nu}$ нас интересуют только шесть пространственных компонент $\bar{h}^{jk}$, поскольку лишь они необходимы при проекции, в результате которой получается поперечное поле излучения с равным нулю следом $\bar{h}^{TT}_{jk}$. Пространственные компоненты определяются выражениями (36.40) через интегралы по «распределению натяжений» $T^{jk} + t^{jk}$. Для сравнения с ньютоновской теорией удобнее выразить $\bar{h}^{jk}$ через интегралы по «распределению энергии» $T^{00} + t^{00}$. Этот переход можно осуществить с помощью точных уравнений движения $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, которые в используемой системе координат [см. (36.36) и (36.37), а также § 20.3] принимают вид

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0. \quad (36.41)$$

Применяя эти уравнения дважды, получаем тождество

$$(T^{00} + t^{00})_{,00} = -(T^{0\ell} + t^{0\ell})_{,\ell 0} = -(T^{\ell 0} + t^{\ell 0})_{,0\ell} = \\ = +(T^{\ell m} + t^{\ell m})_{,m\ell}.$$

С учетом элементарных правил многократного дифференцирования отсюда следует

$$[(T^{00} + t^{00})\, x^j x^k]_{,00} = (T^{\ell m} + t^{\ell m})_{,m\ell}\, x^j x^k = \\ = [(T^{\ell m} + t^{\ell m})\, x^j x^k]_{,m\ell} - \\ - 2\,[(T^{\ell j} + t^{\ell j})\, x^k + (T^{\ell k} + t^{\ell k})\, x^j]_{,\ell} + \\ + 2\,(T^{jk} + t^{jk}),$$

откуда

$$\int (T^{jk} + t^{jk})\, d^3x = \frac{1}{2}\,(d^2 I_{jk}/dt^2). \quad (36.42a)$$

где

$$I_{jk} \equiv \int [T^{00}(t, x) + t^{00}(t, x)]\, x^j x^k\, d^3x. \quad (36.42б)$$

Введем теперь допущение о почти ньютоновском характере источника. Это гарантирует, что вклад гравитации в полную энергию составляет лишь малую долю:

7) конкретизация для случая почти ньютоновских источников

$$t^{00} \sim (\Phi_{,j})^2 \sim M^2/R^4 \sim \left(\frac{M}{R}\right) T^{00} \ll T^{00};$$

следовательно,

$$I_{jk}(t) = \int T^{00}(t, \mathbf{x})\, x^j x^k\, d^3x. \qquad (36.42б')$$

Таким образом, величина I_{jk} представляет собой второй момент распределения масс.

Комбинируя уравнения (36.42) и (36.40) и замечая, что внутри источника $|\, t^{jk}\,| \sim |\, \Phi_{,j}\Phi_{,k}\,| \sim T^{00}\,|\,\Phi\,|$, получаем

$$\bar{h}^{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2} + O\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + |\Phi|\right)\frac{R}{\lambda}M\right] =$$

$$= \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2}\left\{1 + O\left[\underbrace{\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + \frac{M}{R}}\right]\frac{\lambda}{R}\right\}. \qquad (36.43)$$

пренебрежимо мало согласно (36.18)

Но нам нужно получить h^{TT}_{jk}, а не $\bar{h}^{jk}$. Это можно сделать, сначала опуская индексы и используя $\eta_{\ell m} = \delta_{\ell m}$, а затем с помощью проекции выделяя поперечную с равным нулю следом часть $\bar{h}^{jk}$ (TT-часть); при этом используется оператор проекции для распространяющихся по радиусу волн

8) переход с помощью проекции к h^{TT}_{jk}

$$P_{\ell m} = \delta_{\ell m} - n_\ell n_m; \qquad n^\ell = x^\ell/r \qquad (36.44)$$

(см. дополнение 35.1). (Поскольку $\bar{h}_{jk}$ и h_{jk} отличаются лишь свертками, они имеют одинаковые TT-части. В результате получаем

$$h^{TT}_{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 I^{TT}_{jk}(t-r)}{dt^2}, \qquad (36.45а)$$

где

$$I^{TT}_{jk} = P_{j\ell} I_{\ell m} P_{mk} - \frac{1}{2} P_{jk}(P_{\ell m} I_{m\ell}). \qquad (36.45б)$$

Это не самая лучшая форма, в которой может быть записан ответ, поскольку внешний наблюдатель не может непосредственно измерить второй момент распределения масс I_{jk}. К счастью, I_{jk} можно заменить приведенным квадрупольным моментом

9) выражение h^{TT}_{jk} через приведенный квадрупольный момент

$$\mathfrak{I}_{jk} \equiv I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk} I = \int (T^{00} + t^{00})\left(x^j x^k - \frac{1}{3}\delta_{jk} r^2\right) d^3x \qquad (36.46)$$

и написать

$$h^{TT}_{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 \mathfrak{I}^{TT}_{jk}(t-r)}{dt^2}. \qquad (36.47)$$

Такая замена допустима, поскольку TT-части величин I_{jk} и $\mathcal{I}_{jk}$ тождественны друг другу (упражнение 36.8).

Приведенный квадрупольный момент $\mathcal{I}_{jk}$ обладает вполне определенным простым физическим смыслом для наблюдателя, находящегося вне источника. В ближней зоне ($r \ll \lambda$), но вне источника, так что с большой точностью справедлива ньютоновская теория для вакуума, ньютоновский потенциал

$$\Phi = -\frac{1}{2} h_{00} = -\frac{1}{2} h^{00} = -\frac{1}{2}\left(\bar{h}^{00} + \frac{1}{2}\bar{h}\right) = -\frac{1}{4}(\bar{h}^{00} + \bar{h}^{jj}) =$$
$$= -\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \frac{[T^{00} + t^{00} + T^{jj} + t^{jj}]_{\text{запазд}}}{|x - x'|}\, d^3x'$$

[см. уравнение (36.38)]. Любой почти ньютоновский медленно движущийся источник удовлетворяет неравенству

$$|\, t^{00} + T^{jj} + t^{jj}\,| \ll T^{00}$$

(напомним, что $t^{\alpha\beta} \sim (\Phi_{,j})^2 \sim T^{00}\,|\,\Phi\,|$). Следовательно, можно написать

$$\Phi(x, t) = -\int \frac{[T^{00}(x', t)]}{|x - x'|}\, d^3x'. \tag{36.48}$$

Разлагая $|\,x - x'\,|^{-1}$ в ряд по степеням $1/r$, получаем

$$\Phi = -\left(\frac{M}{r} + \frac{d_j x^j}{r^3} + \frac{3\mathcal{I}_{jk} x^j x^k}{2r^5} + \ldots\right) \tag{36.49а}$$

при $r \ll \lambda$, но тем не менее при достаточно большом r, так что справедлива ньютоновская теория для вакуума; здесь

$$M = (\text{полная масса-энергия источника}) = \int T^{00}\, d^3x,$$

$$d_j \equiv (\text{дипольный момент источника}) = \int T^{00} x^j dx^3, \tag{36.49б}$$

$$\mathcal{I}_{jk} \equiv (\text{приведенный квадрупольный момент источника}) =$$
$$= \text{выражение (36.46)}.$$

Таким образом, *величины $\mathcal{I}_{jk}$, вторые производные которых по времени определяют поле излучения посредством уравнения (36.47), в точности совпадают с компонентами приведенного квадрупольного момента звезды, измеренными наблюдателем, который исследует ньютоновский потенциал Φ глубоко внутри ближней зоны ($r \ll \lambda$)* («эмпирический квадрупольный момент»).

Окончательный ответ (36.47) для поля излучения, выраженный через $\mathcal{I}_{jk}^{TT}$, приведен в кратком перечислении результатов в § 36.7. Там же приведены выражения для эффективного тензора энергии-импульса излучения и излучаемых энергии и момента импульса [выражения (36.22) — (36.25)]. Эти выражения можно вывести, используя формализм коротковолнового приближения (см. упражнение 36.9).

УПРАЖНЕНИЯ

36.7. Величина $t^{\mu\nu}$

Рассмотрите медленно движущийся источник гравитационных волн. Покажите, что вдали от источника, но в ближней зоне ($R \ll r \ll \lambda$) компоненты «псевдотензора энергии-импульса» $t^{\mu\nu}$ спадают с расстоянием как $1/r^4$, но в волновой зоне ($r \gg \lambda$) они спадают лишь как $1/r^2$.

36.8. Доказательство тождественности поперечных бесследовых частей величин $\mathfrak{t}_{jk}$ и I_{jk}

Докажите непосредственным вычислением, что TT-части I_{jk} (36.42б) и $\mathfrak{t}_{jk}$ (36.46) тождественны независимо от того, где находится наблюдатель, совершающий проекцию, в результате которой получаются эти части (т. е. независимо от вида единичного вектора $\boldsymbol{n}$ в операторе проекции).

36.9. Излучаемые энергия и момент импульса

а. Для гравитационных волн в асимптотически плоском пространстве-времени, описываемых уравнением (36.47), вычислите «размазанный» по пространству-времени тензор энергии-импульса $T^{(GW)}_{\mu\nu}$, даваемый выражением (35.23). [*Ответ*: выражение (36.22).]

б. Выполните интегрирование в (36.23) и (36.25), чтобы получить полные излучаемые мощность и момент импульса. [*Указание*. Выведите и воспользуйтесь следующими усредненными по сфере величинами:

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i\, d\Omega = 0, \quad \frac{1}{4\pi}\int n_i n_j\, d\Omega = \frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad \frac{1}{4\pi}\int n_i n_j n_k\, d\Omega = 0.$$

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i n_j n_k n_l\, d\Omega = \frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Здесь $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{x}/|\,\boldsymbol{x}\,|$ — единичный радиальный вектор.]

§ 36.11. ВЫВОД ПОТЕНЦИАЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Вывод формулы для потенциала реакции излучения:

Обратимся в заключение к выводу результатов, относящихся к реакции излучения и изложенных в § 36.8. Расчет начнем с решения (36.43) для пространственной части поля излучения в первоначальной калибровке (т. е. не в TT-калибровке)

$$\bar{h}^{jk}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t-r). \tag{36.50}$$

Хотя это решение первоначально выводилось путем отбрасывания всех членов, убывающих с расстоянием быстрее чем $1/r$,

в действительности оно представляет собой точное решение вакуумных уравнений поля $\bar{h}^{jk}{}_{,\alpha}{}^{\alpha}=0$ линеаризованной теории. Это значит, что оно справедливо как в волновой зоне, так и в промежуточной и ближней зонах ($r \ll \lambda$, но $r > R$).

Если бы мы заменили граничное условие для расходящихся волн на граничное условие для сходящихся волн на бесконечности, то следовало бы заменить точное решение (36.50) на

$$\bar{h}^{jk}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\,\ddot{I}_{jk}(t+r).$$

1) формула для $\bar{h}_{jk}$ всюду вне источника в присутствии расходящейся или сходящейся волны

Таким образом, чтобы выявить эффекты, обусловленные наложением граничного условия для расходящихся волн, мы можем записать точное решение в виде

$$\bar{h}_{jk}(t, \boldsymbol{x}) = \bar{h}^{jk}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\,\ddot{I}_{jk}(t-\varepsilon r), \quad \varepsilon = \pm 1, \qquad (36.51)$$

и затем сконцентрировать внимание на эффектах, связанных со знаком ε.

В ближней зоне ($r \ll \lambda$), но вне источника, который носит почти ньютоновский характер, это решение для $\bar{h}_{jk}$ при разложении по степеням r принимает вид

2) конкретизация $\bar{h}_{jk}$ для ближней зоны

$$\bar{h}_{jk} = 2\left[\frac{I^{(2)}_{jk}}{r} - \varepsilon I^{(3)}_{jk} + \frac{I^{(4)}_{jk} r}{2!} - \varepsilon\frac{I^{(5)}_{jk} r^2}{3!} + \ldots\right], \qquad (36.52а)$$

где

$$I^{(n)}_{jk} \equiv d^n I_{jk}(t)/dt^n.$$

Отсюда можно получить соответствующие выражения для $\bar{h}_{0j}$ и $\bar{h}_{00}$ при калибровочных условиях $\bar{h}^{\beta}_{\alpha,\,\beta} = 0$, т. е. при $\bar{h}_{j0,\,0} = \bar{h}_{jk,\,k}$ и $\bar{h}_{00,\,0} = \bar{h}_{0j,\,j}$. В результате находим

3) $\bar{h}_{00}$ и $\bar{h}_{0j}$ в ближней зоне, вычисленные с помощью условий калибровки

$$\bar{h}_{0j} = 2\left[-\frac{I^{(1)}_{jk}x^k}{r^3} + \frac{I^{(3)}_{jk}x^k}{2!r} - \varepsilon\frac{2I^{(4)}_{jk}x^k}{3!} + \frac{3I^{(5)}_{jk}x^k r}{4!} - \varepsilon\frac{4I^{(6)}_{jk}x^k r^2}{5!}\right] +$$
$$+ (\text{статические члены, не связанные с излучением}); \qquad (36.52б)$$

$$\bar{h}_{00} = 2\left[\frac{(3x^jx^k - r^2\delta^{jk})}{r^5} I_{jk} - \frac{(x^jx^k - r^2\delta^{jk})}{2!r^3} I^{(2)}_{jk} - \varepsilon\frac{2}{3!} I^{(3)}_{jj} + \right.$$
$$\left. + \frac{3(x^jx^k + r^2\delta^{jk})}{4!r} I^{(4)}_{jk} - \varepsilon\frac{4(2x^jx^k + r^2\delta^{jk})}{5!} I^{(5)}_{jk} + \ldots\right] +$$
$$+ (\text{статические и линейные по времени члены, не связанные с излучением}). \qquad (36.52в)$$

Главный член в этих выражениях при приближении к источнику возрастает как $1/r^3$:

$$\bar{h}_{00} \approx \frac{2(3x^jx^k - r^2\delta^{jk})}{r^5} I_{jk} = \frac{6I_{jk}n^jn^k}{r^3}.$$

Он в точности совпадает с динамической квадрупольной частью ньютоновского потенциала $\Phi = -\frac{1}{2}h_{00} = -\frac{1}{4}\bar{h}_{00}$. Все другие члены, не содержащие ε, являются поправками к ньютоновскому потенциалу. Они создают эффекты, подобные смещению перигелия Меркурия, которые никак не влияют на запасы энергии и момента импульса системы.

4) выделение потенциалов реакции излучения из $\bar{h}_{\alpha\beta}$

Члены с ε связаны с реакцией излучения. Выберем из них главные члены и назовем их «потенциалами реакции излучения»:

$$\bar{h}_{jk}^{(\text{реакц})} = -2I_{jk}^{(3)} - \frac{1}{3}I_{jk}^{(5)}r^2,$$

$$\bar{h}_{0j}^{(\text{реакц})} = -\frac{2}{3}I_{jk}^{(4)}x^k - \frac{1}{15}I_{jk\ell}^{(6)}x^k r^2, \qquad (36.53)$$

$$\bar{h}_{00}^{(\text{реакц})} = -\frac{2}{3}I_{jj}^{(3)} - \frac{1}{15}(2x^j x^k + r^2\delta^{jk})I_{jk}^{(5)}.$$

Соответствующие возмущения метрики $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\alpha\beta}$ равны

$$h_{jk}^{(\text{реакц})} = -2I_{jk}^{(3)} + \frac{2}{3}I_{\ell\ell}^{(3)}\delta_{jk} + O(I_{jk}^{(5)}r^2),$$

$$h_{0j}^{(\text{реакц})} = -\frac{2}{3}I_{jk}^{(4)}x^k + O(I_{jk}^{(6)}r^3), \qquad (36.54)$$

$$h_{00}^{(\text{реакц})} = -\frac{4}{3}I_{\ell\ell}^{(3)} - \frac{1}{15}(x^j x^k + 3r^2\delta_{jk})I_{jk}^{(5)}.$$

Смысл этих потенциалов можно представить себе более ясно, если изменить калибровку таким образом, чтобы привести их к ньютоновскому виду. Положим для этого

5) переход к потенциалам реакции излучения в ньютоновской калибровке

$$x_{\text{нов}}^{\mu} = x_{\text{стар}}^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad h_{\mu\nu_{\text{нов}}} = h_{\mu\nu_{\text{стар}}} - \xi_{\mu,\,\nu} - \xi_{\nu,\,\mu},$$

где

$$\xi_j = -I_{jk}^{(3)}x^k + \frac{1}{3}I_{\ell\ell}^{(3)}x^j,$$

$$\xi_0 = -\frac{2}{3}I_{\ell\ell}^{(2)} + \frac{1}{6}I_{jk}^{(4)}x^j x^k - \frac{1}{6}I_{\ell\ell}^{(4)}r^2. \qquad (36.55)$$

Тогда в новой калибровке

$$h_{jk}^{(\text{реакц})} = O(I_{jk}^{(5)}r^2), \qquad h_{0j}^{(\text{реакц})} = O(I_{jk}^{(6)}r^3),$$

$$h_{00}^{(\text{реакц})} = -\frac{2}{5}I_{jk}^{(5)}x^j x^k. \qquad (36.56)$$

Эта калибровка идеально подходит для ньютоновской интерпретации, поскольку в ней уравнение геодезических для медленно дви-

жущихся частиц имеет вид

$$d^2x^j/dt^2 = -\Phi^{(\text{реакц})}_{,j} + \begin{pmatrix}\text{члены, нечувствительные}\\ \text{к граничным условиям для}\\ \text{расходящейся волны}\end{pmatrix}, \qquad (36.57)$$

где

$$\Phi^{(\text{реакц})} = -\frac{1}{2}\, h^{(\text{реакц})}_{00} = \frac{1}{5}\, I^{(5)}_{jk} x^j x^k. \qquad (36.58)$$

Таким образом, главные эффекты реакции излучения (с относительными ошибками $\sim [\lambda/r]^2$) могут быть описаны в ближней зоне почти ньютоновского источника, если к ньютоновскому потенциалу добавить член $\frac{1}{5} I^{(5)}_{jk} x^j x^k$. Получающийся в результате формализм и краткое изложение проведенного здесь вывода были даны в § 36.8.

37. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Я часто говорю, что, если вы можете измерить то,
о чем рассказываете, и выразить это в числах,
вы кое-что знаете об этом предмете;
но если вы не можете провести измерения,
если вы не можете выразить это в числах,
ваши познания скудны и недостаточны;
они могут послужить началом настоящих знаний,
но чисто умозрительно, и о чем бы ни шла речь,
вы едва ли продвинулись до стадии науки.

ВИЛЬЯМ ТОМСОН, лорд КЕЛЬВИН ([256], стр. 73)

37.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПАДАЮЩИЕ ВОЛНЫ

Если мы имеем дело с гравитационными волнами в рамках общей теории относительности, то исследовать детектор проще, чем исследовать генератор или распространение волн. Все детекторы, которые потенциально могут быть созданы человеком, располагаются в Солнечной системе, где тяготение настолько слабо и пространство-время настолько близко к неискривленному, что падающая извне плоская гравитационная волна практически остается плоской. (Угол отклонения фронта волны, проходящей вблизи Солнца, составляет всего 1″,75.) Кроме того, ближайший источник значительного гравитационного излучения столь далек, что для всех практических целей можно считать, что волны, достигающие Земли, действительно имеют плоские фронты. Следовательно, волны, распространяющиеся в направлении z до попадания на детектор, с высокой точностью можно описывать следующими поперечными бесследовыми (TT) линеаризованными выражениями:

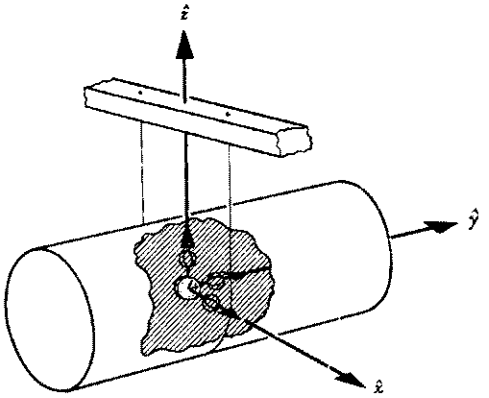
Линеаризованное описание гравитационных волн, распространяющихся у Земли

возмущение метрики

$$h^{TT}_{xx} = -h^{TT}_{yy} = A_+(t-z), \quad h^{TT}_{xy} = h^{TT}_{yx} = A_\times(t-z), \tag{37.1а}$$

тензор Римана

$$\begin{aligned} R_{x0x0} &= -R_{y0y0} = -\frac{1}{2}\ddot{A}_+(t-z), \\ R_{x0y0} &= R_{y0x0} = -\frac{1}{2}\ddot{A}_\times(t-z), \end{aligned} \tag{37.1б}$$



ФИГ. 37.1.
Собственная система отсчета детектора в виде колеблющейся болванки. Болванка подвешена с помощью проволоки к поперечной балке, которая покоится на вертикальных опорах (не показанных), врытых в землю. Следовательно, болванка испытывает 4-ускорение, заданное в момент, которому соответствует изображение, соотношением $\mathbf{a} = g\,(\partial/\partial\hat{z})$, где g —«локальное гравитационное ускорение» ($g \approx 980$ см/с^2). Позднее пространственные оси будут поворачиваться относительно болванки («эффект маятника Фуко», создаваемый вращением Земли), поэтому компоненты 4-ускорения $\mathbf{a}$ (но не его величина) будут изменяться. Собственная система отсчета основывается на воображаемых часах и трех воображаемых гироскопах, расположенных в центре масс болванки. Координатное время равно собственному времени, измеренному по этим часам, а направления пространственных осей $\partial/\partial\hat{x}^{\hat{j}}$ жестко связаны с гироскопами. Силы, препятствующие падению гироскопов в гравитационном поле Земли, должны быть приложены к центрам масс каждого гироскопа (вращательные моменты отсутствуют).

тензор энергии-импульса

$$T^{(GW)}_{\hat{0}\hat{0}} = T^{(GW)}_{\hat{z}\hat{z}} = -T^{(GW)}_{\hat{0}\hat{z}} = \frac{1}{16\pi}\langle \dot{A}_+^2 + \dot{A}_\times^2 \rangle_{\text{ср. по вр}} \qquad (37.1\text{в})$$

(см. упражнение 37.1).

Отклик детектора на эти падающие волны легче всего исследовать, используя вместо системы координат, соответствующей ТТ-калибровке $\{x^{\alpha}\}$ (которая «подобрана» специально для описания волн), систему координат $\{x^{\hat{\alpha}}\}$, «подобранную» специально для экспериментатора и его детектора. Детектором может быть вибрирующая болванка, колеблющаяся Земля или изогнутая трубка, наполненная жидкостью (фиг. 37.1 и 37.2). Но что бы ни представлял собой детектор, он имеет центр масс. Начало пространственных координат $x^{\hat{j}} = 0$ закрепим в этом центре масс и *ортонормированные* пространственные оси $\partial/\partial x^{\hat{j}}$ свяжем с гироскопами (возможно, воображаемыми), помещенными в этом центре масс (фиг. 37.1). Пусть детектор испытывает ускорение (т. е. не нахо-

Собственная система отсчета детектора

дится в состоянии свободного падения); заставим гироскопы двигаться с тем же ускорением, прикладывая к их центрам масс необходимые для этого силы (никакого вращательного момента!). В качестве временной координаты воспользуемся собственным временем $x^{\hat{0}} = \tau$, измеренным по часам, расположенным в начале пространственных координат. Наконец, распространим эти локально определенные координаты $x^{\hat{\alpha}}$ на все пространство-время наиболее «непосредственным» образом. (Все детали см. в § 13.6 из курса 2.) Метрика в этой *собственной системе отсчета детектора* имеет вид

$$ds^2 = -(1 + 2a_{\hat{j}} x^{\hat{j}})\,(dx^{\hat{0}})^2 + \delta_{\hat{j}\hat{k}}\, dx^{\hat{j}}\, dx^{\hat{k}} + O(|x^{\hat{j}}|^2)\, dx^{\hat{\alpha}}\, dx^{\hat{\beta}} \qquad (37.2)$$

[выражение (13.71) при $\omega^{\hat{\ell}} = 0$]. Здесь $a_{\hat{j}}$ — пространственные компоненты 4-ускорения детектора. (Поскольку **a** должно быть ортогонально 4-скорости детектора, $a_{\hat{0}}$ обращается в нуль. Заметим, что с точностью до члена, связанного с ускорением, в $g_{\hat{0}\hat{0}}$ («члена, описывающего гравитационное красное смещение»; см. § 38.5 и упражнение 6.6) эта система отсчета является локально лоренцевой.

УПРАЖНЕНИЯ

37.1. Плоская волна общего типа в ТТ-калибровке

Покажите, что плоскую волну самого общего типа можно описать в поперечной бесследовой калибровке в линеаризованной теории с помощью выражений (37.1). [*Указание.* Выразите плоскую волну как суперпозицию (интеграл Фурье) монохроматических плоских волн и опишите каждую монохроматическую волну выражениями (35.16). Используйте уравнения (35.10) и (35.23) для вычисления $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $T^{(GW)}_{\mu\nu}$.]

37.2. Движение пробной частицы в собственной системе отсчета

Покажите, что медленно движущаяся пробная частица, свободно падающая в собственной системе отсчета, определяемой выражением (37.2), подчиняется следующему уравнению движения (уравнению геодезических):

$$d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 = -a_{\hat{j}} + O(|x^{\hat{k}}|).$$

Поэтому величину $-a_{\hat{j}}$ можно интерпретировать как «локальное гравитационное ускорение» (см. подпись к фиг. 37.1).

§ 37.2. УСКОРЕНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ ДЕТЕКТОРАХ

Уравнения движения для механического детектора

Собственная система отсчета, заданная выражением (37.2), наиболее близка к той системе отсчета, в которой при анализе детектора можно было бы пользоваться ньютоновской физикой. В действительности она настолько близка к ньютоновской системе отсчета, что (согласно анализу, проведенному в дополнении 37.1) *уравнения движения для механического детектора, записанные в этой собственной системе отсчета, принимают классическую ньютоновскую форму, и их можно рассматривать и работать с ними чисто ньютоновским образом, за одним лишь исключением: гравитационные волны создают вынуждающую силу неньютоновского происхождения, которая дается известным уравнением для отклонения геодезических*

$$\left(\begin{array}{c}\text{сила на единицу массы (т. е. ускорение)}\\ \text{частицы в точке } x^{\hat{j}} \text{ относительно центра}\\ \text{масс детектора } x^{\hat{j}}=0\end{array}\right) = \left(\frac{d^2x^{\hat{j}}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{за счет волн}} = -(R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{за счет волн}} x^{\hat{k}}. \qquad (37.3)$$

Чтобы пользоваться этим уравнением и вычислять поперечные сечения детекторов, необходимо знать компоненты тензора кривизны $R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ и тензор энергии-импульса гравитационных волн $T^{(GW)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ в собственной системе отсчета детектора. Невозможно вычислить $R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ непосредственно из метрических коэффициентов $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, которые даются выражением (37.2); чтобы сделать это, нам понадобились бы неизвестные поправки $O(|x^{\hat{j}}|^2)$. Однако легко получить $R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ и $T^{(GW)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ из соответствующих компонент в ТТ-системе координат [формулы (37.1)], применяя матрицу преобразования $\| \partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}} \|$. Чтобы сделать преобразование тривиальным, выберем ориентацию системы координат таким образом, чтобы с точностью до $O(|h_{\mu\nu}|) \ll 1$ она совпадала с собственной системой отсчета детектора вблизи его центра масс в интересующий нас момент времени $t = \hat{t} = 0$. Тогда матрица преобразования будет

иметь вид

$$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}} = \delta^{\alpha}_{\mu} + O(h_{\mu\nu}) + O(a_{\hat{j}} x^{\hat{j}}) + O(|a|\hat{t}). \qquad (37.4)$$

поправки, обусловленные рябью в пространстве-времени, создаваемой гравитационными волнами

поправки за счет красного смещения

поправки, обусловленные относительными скоростями систем отсчета, возникающими в результате ускорения детектора

Испытываемое детектором ускорение имеет характерное значение

$$|a| = \text{«гравитационное ускорение на Земле»} = 980 \text{ см/с} \sim 1/(\text{световой год}).$$

Описание волн в системе отсчета детектора

Поэтому с огромной точностью $\| \partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}} \| = \| \delta^{\alpha}_{\mu} \|$ и компоненты тензоров в этих двух системах отсчета одинаковы:

$$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = -\frac{1}{2}\ddot{A}_{+}, \qquad R_{\hat{x}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = R_{\hat{y}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = -\frac{1}{2}\ddot{A}_{\times},$$

$$T^{(GW)}_{\hat{0}\hat{0}} = T^{(GW)}_{\hat{z}\hat{z}} = -T^{(GW)}_{\hat{0}\hat{z}} = \frac{1}{16\pi}\langle \dot{A}_{+}^2 + \dot{A}_{\times}^2 \rangle_{\text{ср. по вр}} \qquad (37.5)$$

[см. формулы (37.1)].

Явный вид ускорений, обусловленных гравитационными волнами

Комбинируя формулы (37.3) и (37.5), получаем выражения для вызванных волной ускорений относительно центра масс детектора

$$\left(\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{за счет волн}} = -R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\hat{x} - R_{\hat{x}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\hat{y} = \frac{1}{2}(\ddot{A}_{+}\hat{x} + A_{\times}\hat{y}),$$

$$\left(\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{за счет волн}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\hat{y} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\hat{x} = = \frac{1}{2}(-\ddot{A}_{+}\hat{y} + \ddot{A}_{\times}\hat{x}), \qquad (37.6)$$

$$\left(\frac{d^2\hat{z}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{за счет волн}} = 0.$$

Этот анализ справедлив только для «малых» детекторов ($L \ll \lambda$)

Эти выражения, подобно уравнениям отклонения геодезических, справедливы лишь в областях, малых по сравнению с длиной волны. В областях размером $L \gtrsim \lambda$ вторые производные от метрики (т. е. компоненты тензора Римана) уже не определяют отклонение геодезических и силы, обусловленные волнами. Поэтому при

исследовании больших детекторов ($L \gtrsim \lambda$) необходимо отказаться от «локальной математики» тензора кривизны и заменить ее «глобальной математикой», например проводить исследование в ТТ-системе координат, используя метрические компоненты $h_{\mu\nu}$. Пример приведен в упражнении 37.6.

Все высокочувствительные детекторы, разработанные до настоящего времени (1973 г.), малы по сравнению с длиной волны, поэтому их можно исследовать методами ньютоновской физики с помощью вынуждающих сил (37.6).

Полезно выработать физическое представление об этих силах — $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}}$, создаваемых гравитационными волнами различных поляризаций. В этом могут помочь фиг. 35.2 и дополнение 37.2. (Читателя может заинтересовать изучение, сравнение и приведение в соответствие между собой фиг. 35.2 и дополнения 37.2.)

УПРАЖНЕНИЯ

37.3. Коэффициенты связности в собственной системе отсчета

а. Вычислите $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ для метрики (37.2) без учета поправок $O(|x^{\hat{j}}|)$. [Ответ: формулы (13.69) с $\omega^{\hat{i}} = 0$.]

б. Вычислите $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$, используя классическую формулу (8.44) и оставляя невычисленными пространственные производные коэффициентов связности, поскольку неизвестны поправки $O(|x^{\hat{j}}|)$ в $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$. [Ответ: $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0},\hat{k}} - a^{\hat{j}}\,a^{\hat{k}}$.]

в. Воспользуйтесь последним ответом для вычисления поправки $O(|x^{\hat{j}}|)$ к $\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}}$. [Ответ:

$$\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}} = a^{\hat{j}}(1 + a_{\hat{k}}x^{\hat{k}}) + R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}} + O(|x^{\hat{k}}|^2).] \qquad (37.7)$$

37.4. Почему $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$?

Объясните происхождение поправки $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ в уравнении (5б) дополнения 37.1. [*Указание.* Поставьте себя на место наблюдателя, покоящегося в начале пространственных координат, который следит за тем, как две свободно падающие частицы движутся под действием силы инерции. В момент времени $\hat{t} = 0$ поместите одну частицу в начале координат, а другую — в точке $x^{\hat{j}}$. С течением времени расстояние, разделяющее частицы в их общей лоренцевой системе отсчета, остается фиксированным, поэтому, с точки зрения наблюдателя, в $x^{\hat{j}} = 0$ происходит лоренцево сокращение.]

37.5. Ориентация диаграмм поляризации

Выведите соотношение (2) дополнения 37.2.

Дополнение 37.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ДЕТЕКТОРА

Рассмотрим «элемент массы» механического детектора (например кубик алюминия, каждое ребро которого равно 1 мм, если детектор представляет собой болванку, показанную на фиг. 37.1, или элемент жидкости объемом 1 мм^3, если детектором служит трубка, заполненная жидкостью, см. фиг. 37.2). Этот элемент массы испытывает сжатия и растяжения под действием окружающего вещества и электромагнитных полей по мере того, как вещество, из которого состоит детектор, колеблется или течет, или с ним происходит что-либо еще, предусмотренное его конструкцией. Пусть

$$\mathbf{f} \equiv \begin{pmatrix} \text{4-сила на единицу массы, действующая на элемент массы} \\ \text{со стороны окружающего вещества и электромагнитных полей} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Эта 4-сила придает элементу массы 4-ускорение $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ или на языке компонент в собственной системе отсчета детектора $f^{\hat{j}} = Du^{\hat{j}}/d\hat{\tau}$. Предположим, что такой элемент массы обладает очень малой скоростью ($v \ll 1$) относительно собственной системы отсчета детектора (т. е. относительно его центра масс). Тогда, отбрасывая члены порядка $O(v^2)$, $O(|x^{\hat{j}}|^2)$ и $O(|x^{\hat{j}}|v)$, имеем [см. (37.2)]

$$d\hat{t}/d\tau = u^{\hat{0}} = 1 = a_{\hat{j}}x^{\hat{j}} \equiv 1 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} \qquad (2)$$

и

$$f^{\hat{j}} = d^2x^{\hat{j}}/d\tau^2 + \Gamma^{\hat{j}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}u^{\hat{\alpha}}u^{\hat{\beta}} = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 + \Gamma^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{0}})(1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}). \qquad (3)$$

В упражнении 37.3 $\Gamma^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{0}}$ вычисляется с точностью до $O(|x^{\hat{j}}|)$. Подставляя результаты этого упражнения, после преобразований находим

$$d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 = (1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^{\hat{j}} - a^{\hat{j}}(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}} \qquad (4)$$

(*уравнение движения элемента массы*).

Рассмотрим это уравнение сначала с точки зрения теории Эйнштейна, а затем с точки зрения теории Ньютона.

В теории Эйнштейна $d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2$ рассматривается как «координатное ускорение» элемента массы, но при этом имеется в виду, что с точностью до $O(|x^{\hat{j}}|^2)$ координатные длины и истинные длины совпадают [см. формулу (37.2)]. Координатное ускорение $d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2$ обусловлено тремя причинами: 1) *внешней приложенной силой*

$$(1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^{\hat{j}} = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{внешн. сила}} = (1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(d^2x^{\hat{j}}/d\tau^2)_{\text{внешн. сила}} \qquad (5а)$$

(происхождение поправки $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ объясняется просто преобразованием от координатного времени к собственному времени), 2) «силой инерции», обусловленной ускорением системы отсчета,

$$-a^{\hat{j}}(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{сила инерции}} \qquad (5б)$$

(см. упражнение 37.4, где объясняется поправка $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$), и 3) «*силой, связанной с римановой кривизной*», в которую входит риманова кривизна, обусловленная локальными ньютоновскими гравитационными полями (поля Земли, Солнца, Луны и т. д.),

и риманова кривизна, обусловленная падающими на детектор гравитационными волнами,

$$-(R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{волны}}x^{\hat{k}} - (R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{ньют. поля}}x^{\hat{k}} = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{кривизна}} \tag{5в}$$

(линейная суперпозиция, поскольку гравитационные поля в Солнечной системе очень слабы). Конечно, элемент массы не «чувствует» эту «силу, связанную с римановой кривизной»; эта сила не создает 4-ускорения. Вместо этого, подобно силе инерции, она связана с выбором системы отсчета. Пространственные координаты $x^{\hat{j}}$ определяют истинное расстояние и направление от центра масс детектора; риманова кривизна пытается изменить эти истинное расстояние и направление («относительное ускорение», «отклонение геодезических»).

В теории Ньютона уравнение движения (4) рассматривается с иной точки зрения. Поскольку известно, что пространственные координаты $x^{\hat{j}}$ определяют истинное расстояние и направление от центра масс детектора, физик-ньютонианец представляет их себе как классические эвклидовы пространственные координаты ньютоновской теории. Тогда уравнение (4) может быть переписано в виде

$$d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 = F^{\hat{j}} - (R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{волны}}x^{\hat{k}}, \tag{6}$$

где

$$F^{\hat{j}} \equiv \begin{pmatrix}\text{ньютоновская сила на единицу массы,}\\ \text{действующая на элемент массы}\end{pmatrix} =$$

$$= (1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^{\hat{j}} - a^{\hat{j}}(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - (R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{ньют. поля}}x^{\hat{k}}. \tag{7}$$

Физик-ньютонианец может выразить $F^{\hat{j}}$ в более знакомой ему форме, чем эта. Он может не обращать внимание на «эффекты красного смещения», связанные с $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$, так как они 1) малы

$$|a^{\hat{j}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})| \sim |f^{\hat{j}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})| \leqslant |(R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{волны}}x^{\hat{k}}| \tag{8}$$

и 2) постоянны во времени и, следовательно, в противоположность столь же малым силам, вызванным волной, не могут возбуждать резонансных движений в детекторе. Он может также выделить в «инерциальном ускорении»— $a^{\hat{j}}$ вклад от локального гравитационного ускорения в центре масс детектора $-(\partial\Phi/\partial x^{\hat{j}})_{x^{\hat{j}}=0}$ и вклад $-a^{\hat{j}}_{\text{абс}}$, обусловленный ускорением детектора относительно «абсолютного пространства» ньютоновской теории. Наконец, он может переписать риманову кривизну, обусловленную ньютоновским тяготением, в знакомой форме $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \partial^2\Phi/\partial x^{\hat{j}}\partial x^{\hat{k}}$. Окончательный результат имеет вид

$$F^{\hat{j}}\begin{bmatrix}\text{полная ньютоновская сила на единицу}\\ \text{массы, действующая на элемент массы}\end{bmatrix} =$$

$$= f^{\hat{j}}\begin{bmatrix}\text{ньютоновская сила на единицу массы, создаваемая}\\ \text{окружающим веществом и электромагнитными полями}\end{bmatrix} -$$

$$-a^{\hat{j}}{}_{\text{абс}}\left[\begin{array}{l}\text{сила инерции на единицу массы, обусловленная ускорением}\\ \text{детектора относительно ньютоновского абсолютного пространства}\end{array}\right]-$$

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\hat{j}}}\right)_{\text{в элементе массы}}\left[\begin{array}{l}=-(\partial\Phi/\partial x^{\hat{j}})_{x^{\hat{j}}=0}-(\partial^2\Phi/\partial x^{\hat{j}}\,\partial x^{\hat{k}})\,x^{\hat{k}}=\\ =\text{ньютоновское гравитационное ускорение}\end{array}\right]. \qquad (9)$$

Вывод. Уравнение движения элемента массы механического детектора, записанное в собственной системе отсчета детектора, имеет обычную ньютоновскую форму (6) с обычными ньютоновскими вынуждающими силами (9), к которым нужно прибавить вынуждающую силу, обусловленную гравитационными волнами, которая определяется выражением

$$(d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{за счет волн}}=-(R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{волны}}\,x^{\hat{k}}. \qquad (10)$$

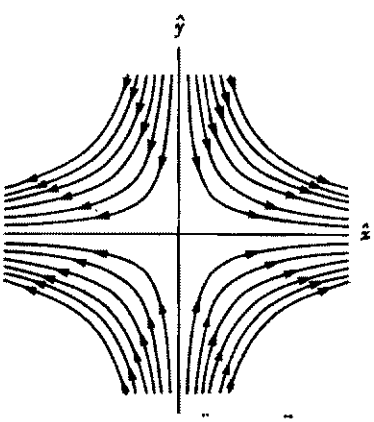
Дополнение 37.2. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ДЛЯ УСКОРЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ

А. Основная идея

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении $\hat{z}$. Исследуем эту волну, пользуясь исключительно собственной системой отсчета детектора. Относительные ускорения, вызванные волной, чисто поперечны. Ускорения относительно центра масс детектора (начала пространственных координат) равны

$$\begin{aligned}d^2\hat{x}/d\hat{t}^2&=\tfrac{1}{2}(\ddot{A}_+\hat{x}+\ddot{A}_\times\hat{y}),\\ d^2\hat{y}/d\hat{t}^2&=\tfrac{1}{2}(-\ddot{A}_\times\hat{y}+\ddot{A}_+\hat{x}),\\ d^2\hat{z}/d\hat{t}^2&=0.\end{aligned} \qquad (1)$$

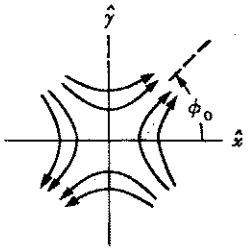
Заметим, что эти ускорения имеют равную нулю дивергенцию. Следовательно, они могут быть представлены «силовыми линиями», аналогичными тем, которые используются для электрического поля в вакууме. При том значении $\hat{t}-\hat{z}$, для которого $\ddot{A}_\times=0$ (так что имеется только поляризация $\mathbf{e}_+$), силовые линии представляют собой гиперболы, показанные на рисунке *а*. Направление ускорения в каждой точке совпадает с направлением стрелки в этом месте, а величина ускорения равна плотности силовых линий. Поскольку ускорение пропорционально расстоянию от центра масс, то при удвоении расстояния от начала координат плотность силовых линий становится в два раза больше. Когда $\ddot{A}_+$ положительно, стрелки на силовых линиях выглядят так, как



Силовые линии для $\ddot{A}_\times=0$, $\ddot{A}_+>0$

а

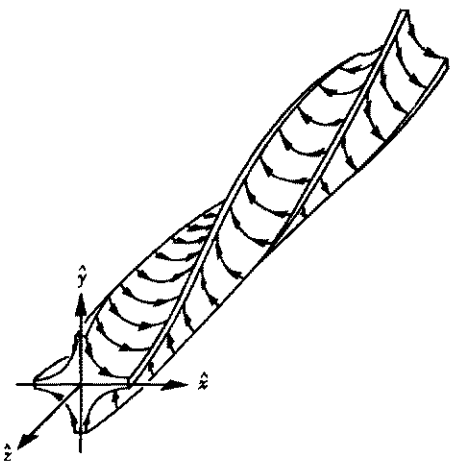
показано на рисунке *а*; когда оно отрицательно, направление стрелок меняется на противоположное. По мере того как $|\ddot{A}_+|$ увеличивается, силовые линии сгущаются к началу координат, так что их плотность возрастает; при уменьшении $|\ddot{A}_+|$ силовые линии расходятся по направлению к бесконечности и их плотность падает.



б

Для поляризации $\mathbf{e}_\times$ картина силовых линий повернута на 45° по отношению к рассмотренной диаграмме. Для промежуточной поляризации (т. е. для значений $\hat{t} - \hat{z}$, при которых ни $\ddot{A}_+$, ни $\ddot{A}_\times$ не обращаются в нуль), диаграмма повернута на промежуточный угол (рисунок *б*)

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\ddot{A}_\times/\ddot{A}_+). \qquad (2)$$



Б. Трехмерная диаграмма

При каждом значении $\hat{t} - \hat{z}$ создаваемые волной ускорения обладают определенной поляризацией (т. е. определенным углом ориентации ϕ_0 на рисунке *б*) и определенной амплитудой (плотность силовых линий). Изобразим силовые линии на трехмерной диаграмме $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ при фиксированном $\hat{t}$. Тогда с течением времени форма всей диаграммы будет оставаться неизменной, но она будет распространяться со скоростью света в направлении $\hat{z}$.

На рисунке *в* показана подобная диаграмма для волн с правой круговой поляризацией и постоянной амплитудой. *Замечание.* Авторы не знали о диаграммах, подобных приведенным на рисунках *а* — *в*, и об их использовании при исследовании отклика детектора до сообщения Пресса [257].

§ 37.3. ТИПЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ДЕТЕКТОРОВ

Восемь типов механических детекторов:

На фиг. 37.2 показано восемь различных типов механических детекторов гравитационных волн. (Под «механическим детектором» имеется в виду такой детектор, действие которого основано на относительных движениях вещества. Немеханические детекторы описываются в § 37.9. Эти восемь детекторов, а также все прочие легко анализировать с помощью диаграмм силовых линий, приведенных в дополнении 37.2. Ниже дается *качественное* описание каждого из этих восьми детекторов. (Полное количественное исследование каждого из них повлекло бы за собой изложение

экспериментальных методов, к которым общая теория относительности не имеет никакого отношения и которые выходят за рамки этой книги. Однако некоторые количественные детали рассмотрены в § 37.5 — 37.8.)

1. Относительные движения двух свободных тел

1) свободно падающие тела

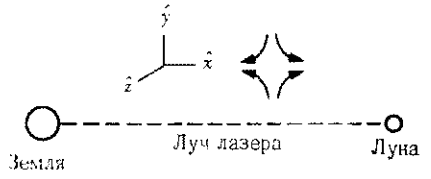
При прохождении гравитационной волны мимо двух свободных тел собственное расстояние между телами осциллирует (фиг. 37.3). Это приводит к соответствующим осцилляциям красного смещения и времени, за которое электромагнитные сигналы распространяются от одного тела до другого и обратно. Как эффект осцилляций красного смещения, так и эффект осцилляций времени распространения электромагнитных сигналов в принципе могут быть использованы для детектирования гравитационных волн. Примерами подобных детекторов могут служить такие системы двух тел, как Земля — Луна [расстояние между которыми определяется с помощью лазера (фиг. 37.2, *а*)], Земля — космический корабль (расстояние измеряется радиолокационными методами) и две пробные массы в лаборатории, которая обращается по орбите вокруг Земли (для определения расстояния могут использоваться измерения красного смещения или лазерная интерферометрия). Некоторые характерные особенности таких детекторов исследуются в упражнениях 37.6 и 37.7. Как показано в упражнении 37.7, подобные детекторы обладают столь низкой чувствительностью, что едва ли представляют интерес.

2. Нормальные моды колебаний Земли и Луны

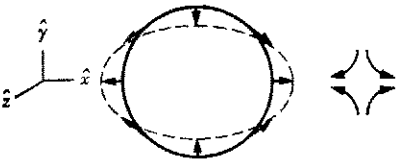
2) Земля и Луна

Гравитационная волна, проносящаяся мимо Земли, будет возбуждать квадрупольные моды колебаний Земли, поскольку вынуждающие силы в волне имеют квадрупольное пространственное распределение (фиг. 37.2, *б*). Основная квадрупольная мода Земли имеет период 54 мин, в то время как для Луны период составляет 15 мин. Таким образом, Земля и Луна должны селективно выхватывать из любого проходящего мимо них волнового цуга 54-минутную и 15-минутную компоненты соответственно. В § 37.7 будет количественно проанализировано взаимодействие между волной и колебаниями твердых тел. Сопоставляя такой анализ с данными исследований колебаний Земли с помощью сейсмографов, Вебер [258] наложил первое наблюдательное ограничение на космический поток гравитационных волн:

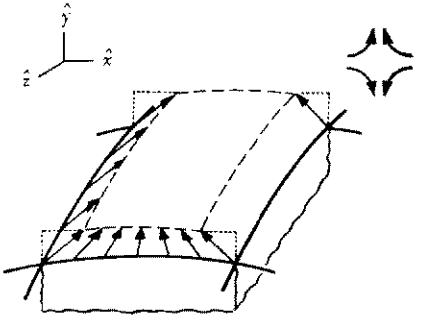
$$I_\nu \equiv \frac{d(\text{поток})}{d(\text{частота})} < 3\cdot 10^7 \text{ эрг}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Гц}^{-1} \text{ при } \nu = 3{,}1\cdot 10^{-4} \text{ Гц}. \tag{37.8}$$



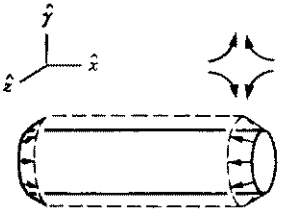
а



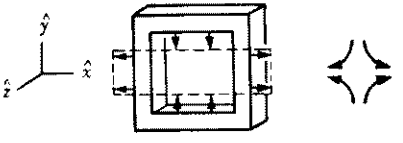
б



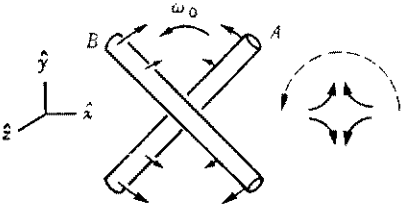
в



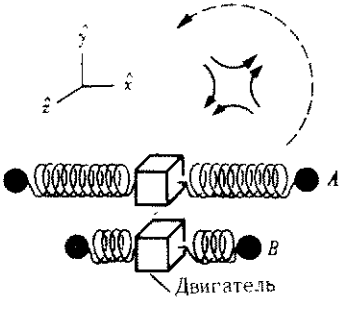
г



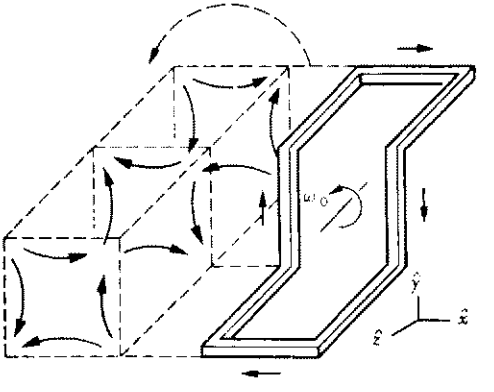
д



е



ж



з

3. Колебания земной коры

3) земная кора

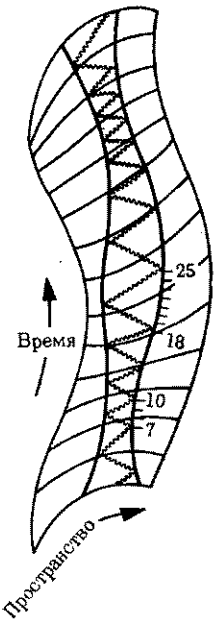
Если нейтронная звезда в пульсаре слегка деформирована с нарушением аксиальной симметрии, то ее вращение будет создавать гравитационные волны. Период этих волн равен половине периода пульсара (поворот звезды на 180° создает один период волны), т. е. этот период должен лежать в диапазоне от 0,017 с для NP0532 (пульсар в Крабовидной туманности) до 1,87 с для NP0527. Подобные волновые цуги не могут возбуждать 54-минутное квадрупольное колебание или какую-либо другую низкочастотную нормальную моду колебаний Земли. Тот тип колебаний, который *может* возбуждаться этими цугами, в принципе допускает описание на языке нормальных мод. Однако эти колебания удобнее представлять себе как колебания локализованных областей Земли или, более конкретно, как колебания земной коры.

Дайсон [259] проанализировал отклик упругого твердого тела, подобного Земле, на падающую нерезонансную гравитационную волну. Он показал, что отклик зависит от нерегулярностей в модулях упругости для сдвиговых волн и что наиболее сильный отклик соответствует свободной поверхности (фиг. 37.2, *в*). Для доли энергии гравитационной волны, пересекающей плоскую поверхность, которая превращается в энергию упругого движения твердого тела, он получил следующее выражение:

$$(8\pi G\rho/\omega)^2\,(s/c)^3 \times \sin^2\theta\,|\cos\theta|^{-1}\,[1+\cos^2\theta+(s/v)\sin^2\theta]. \quad (37.9)$$

Здесь s и v — скорости волн сдвига и сжатия соответственно, а θ — угол между направлением распространения волн и нормалью к поверхности. Рассматривая поток $2\cdot10^{-5}$ эрг/(см^2·с) (оптимистическое, но вполне разумное значение для излучения пульсара), падающий горизонтально ($\theta = \pi/2$, фактор $|\cos\theta|^{-1}$ выпадает из окончательного результата вычислений!), и принимая $s = 4{,}5\cdot10^5$ см/с, а $\omega = 6$ рад/с, он вычислил, что горизонтальное смещение поверхности на частоте 1 Гц имеет амплитуду $\xi_0 \sim 2\cdot10^{-17}$ см, которая слишком мала (примерно в 10^5 раз), чтобы

ФИГ. 37.2.
Различные типы детекторов гравитационных волн:
а — осцилляции расстояния между Землей и Луной (см. упражнение 37.7);
б — нормальная мода колебаний Земли и Луны [258];
в — колебания земной коры [259];
г — нормальная мода колебаний упругой болванки (см. [260] и указанную там литературу);
д — нормальные моды колебаний квадратной рамки обруча или камертона [261];
е — угловые ускорения вращающихся стержней («гетеродинный детектор») [262];
ж — угловые ускорения осцилляторов, совершающих вынужденные колебания;
з — пульсирующая жидкость в трубке, изогнутой в виде петли [257], трубка вращается с той же угловой скоростью, что и волны, так что положение трубки относительно право поляризованных силовых линий остается все время фиксированным.



ФИГ. 37.3.

Время распространения сигнала от одной геодезической до другой и обратно реагирует на колебание кривизны пространства-времени [схематический рисунок, изображающий лазерный импульс, посылаемый с Земли к уголковому отражателю, расположенному на Луне, и движущийся затем обратно к Земле, в то время как мимо проходит очень мощная и длинная гравитационная волна; волна должна быть мощной, так как непосредственное измерение расстояния с точностью лучше 10 см весьма затруднительно, а при такой точности получается индикатор гравитационных волн, значительно менее чувствительный, чем колебания длины веберовской болванки (10^{-14} см или меньше); см. упражнение 37.7]. Геодезические искривляются по направлению друг к другу в областях, где соответствующая компонента тензора кривизны Римана $R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}$ имеет один знак, и искривляются друг от друга в других областях, где эта компонента имеет противоположный знак. Этот рисунок позволяет с одного взгляда найти ответ на часто выражаемое недоумение: не является ли изменение времени распространения сигнала туда и обратно сущим вздором? Возмущение метрики $\delta h_{\mu\nu}$ в волне немного изменяет масштабы расстояний, но соответственно изменяет и масштабы времени. Поэтому не исчезает ли возможность существования какого-либо реального ощутимого и измеримого эффекта? *Ответ*: 1. Увеличение расстояния между геодезическими есть эффект не локальный а кумулятивный. Он не является непосредственным следствием локального значения $\delta h_{\mu\nu}$ или даже локального значения кривизны. Он возникает как результат накопления отклонений на протяжении целого полупериода гравитационной волны. 2. Изменение расстояния между геодезическими представляет собой истинное изменение собственного расстояния, и оно проявляется в истинном изменении собственного времени (см. «отметки» на мировой линии одной из частиц; упражнение 37.6). *Замечание.* Исследуя расстояние между геодезическими на протяжении не одного, как здесь, а многих периодов, мы обнаружим систематически накапливающееся весьма медленное загибание быстро осциллирующих геодезических по направлению друг к другу. Это малое ускорение «притяжения» в гравитационной физике указывает на существование эффективной энергии-импульса, переносимой гравитационными волнами (гл. 35).

ее можно было заметить на фоне сейсмического шума. Он указывает на возможные улучшения оценок, особенно благодаря резонансу (упругие волны, испытывающие многократное отражение между двумя поверхностями, например в антарктическом ледовом покрове).

4. Нормальные моды колебаний упругой болванки

4) упругая болванка

Наиболее часто обсуждаемый тип детектора (в 1972 г.) представляет собой алюминиевую болванку, предложенную Джозефом Вебером [263, 264] (фиг. 37.1 и 37.2, *г*). Веберовские болванки имеют цилиндрическую форму, длину 153 см, диаметр 66 см и вес $1{,}4 \cdot 10^6$ г. Каждая болванка подвешивается на проволоке в вакууме и механически изолирована от окружающей среды. Вокруг средней части болванки прикреплены пьезоэлектрические датчики деформаций, которые соединены с электрическими цепями, чувствительными к основной моде колебаний болванки (частота $\nu = 1660$ Гц). Когда гравитационная волна падает на болванку сбоку, как показано на фиг. 37.2, *г*, относительные ускорения, вызываемые волной, возбуждают основную моду колебаний болванки. Вебер наблюдал внезапные и одновременные возбуждения двух таких болванок, одна из которых находилась в Мэрилендском университете около Вашингтона, а другая — в Аргоннской национальной лаборатории вблизи Чикаго [260, 265, 266]. Никто пока не предложил удовлетворительного объяснения этих совпадений помимо гравитационных волн, приходящих из космоса. Однако история физики богата примерами, когда предполагаемые новые эффекты в конце концов оказывались объяснимыми давно известными явлениями. Поэтому эти наблюдения нельзя считать проверенными. Эти наблюдения были бы вполне убедительными, если бы они подтвердились при использовании другого оборудования, или при повторении эксперимента при других условиях, или и то и другое одновременно; эксперименты, призванные подтвердить веберовские, в настоящее время (1972 г.) находятся на пути к завершению [1]). Делая такие предварительные замечания о наблюдениях Вебера, нельзя в то же время не выразить огромное восхищение мастерством экспериментатора, энергией и незаурядной настойчивостью, проявленными Джозефом Вебером на протяжении более чем десятилетнего поиска самого неуловимого излучения из известных в физике.

Механические детекторы четырех описанных выше типов представляют собой системы, на которых уже проводились измерения;

---

[1]) Положительные результаты, полученные в схеме совпадений в опытах Дж. Вебера, не были подтверждены в последующих измерениях (1972—1974 гг.), выполненных в ряде лабораторий в СССР, США, Англии, Франции, Италии и ФРГ.— *Прим. ред.*

таким образом, можно правильно оценить практические трудности и реальные уровни шумов. В ходе продолжающихся поисков более совершенных методов приема гравитационных волн рассматриваются более сложные детекторы; в 1972 г. уже можно перечислить, как это сделано ниже, целый ряд интересных предложений. Что касается предлагаемых детекторов, то очень трудно заранее сказать, сколько усилий потребуется для их разработки, прежде чем будут достигнуты желаемые характеристики.

5. Нормальные моды колебаний упругих тел различной формы

5) упругие тела другой формы

Веберовская «болванка» не обязательно должна иметь цилиндрическую форму. В работе [261] рассматриваются детекторы в форме полого квадрата, обруча или камертона; основная частота подобных детекторов может быть подобрана так, чтобы при заданной массе или при заданном максимальном размере отклик детектора был оптимальным. В § 37.4 и 37.7, а также в упражнениях 37.9—37.12 подробно исследуется работа детектора в виде «колеблющейся болванки» произвольной формы (см. также [267]).

6. Угловые ускорения вращающихся болванок

6) вращающиеся стержни («гетеродинный детектор»)

Все потенциально возможные детекторы, описанные до сих пор, реагируют на приливные ускорения, вызванные гравитационной волной, самым тривиальным образом: относительные расстояния колеблются, уменьшаясь и увеличиваясь. Но приливные ускорения помимо компонент, изменяющих длину, содержат также тангенциальные компоненты, вызывающие вращение. В дополнении 37.2 на рисунке *а* компоненты, изменяющие длину, преобладают вблизи осей $\hat{x}$ и y, в то время как компоненты, вызывающие вращение, преобладают посредине между этими осями. Такой детектор, реагирующий на вращательные ускорения, впервые был предложен Брагинским [262, 268]. Он состоит из двух металлических стержней, ориентированных перпендикулярно друг другу и свободно вращающихся с угловой скоростью ω_0 в одной плоскости (фиг. 37.2, *е*). (Вращение происходит относительно гироскопов, связанных с собственной системой отсчета детектора, что эквивалентно вращению относительно локально лоренцевой системы отсчета детектора.) Пусть монохроматические гравитационные волны с угловой частотой $\omega = 2\omega_0$ (изменение фазы волны за единицу времени равно удвоенной угловой скорости поворота картины силовых линий) падают перпендикулярно плоскости, в которой вращаются стержни. Тогда компонента волны с правой круговой поляризацией будет вращаться вместе со стержнем, так что ориентация стержней на диаграмме силовых линий для этой компоненты будет оставаться все время фиксированной. При ориентации, показанной на фиг. 37.2, *е*, стержень A будет испытывать угловое ускорение, в то время как стержень B будет замед-

лять свое вращение. Экспериментатор может измерять постоянное относительное угловое ускорение этих двух стержней (постоянное до тех пор, пока угол между стержнями не будет существенно отличаться от 90°). Еще лучше, если экспериментатор выберет скорость вращения ω_0 такой, чтобы она не точно совпадала с удвоенной частотой волны (это весьма просто). Тогда в течение $^1/_2\omega_0/|\,\omega - 2\omega_0\,|$ оборотов стержень A будет ускоряться, а стержень B — замедляться, затем следующие $^1/_2\omega_0/|\,\omega - 2\omega_0\,|$ оборотов стержень A будет замедляться, а стержень B — ускоряться и так далее (биение частоты). Экспериментатор может следить за относительной ориентацией стержней. Не следует считать, что в этом эксперименте появятся какие-то помехи, обусловленные волнами с левой круговой поляризацией. Поскольку они не вращаются вместе со стержнями, вызываемые ими угловые ускорения, усредненные по одному периоду, обращаются в нуль.

Такой прибор называется «гетеродинным детектором» Брагинского. Брагинский предусматривает возможность размещения подобных детекторов на спутниках Земли в конце 70-х годов. Гетеродинные детекторы были бы наиболее эффективными при приеме длинных монохроматических волновых цугов, подобных тем, которые испускаются пульсарами, но даже для коротких всплесков волн они могут быть более чувствительными, чем колеблющиеся болванки [268].

7. Угловые ускорения осцилляторов, совершающих вынужденные колебания

7) вращение осцилляторов, совершающих вынужденные колебания

Был предложен еще один тип детектора, реагирующего на угловые ускорения под действием гравитационных волн[1]). Вместо двух вращающихся стержней этот детектор состоит из двух одинаковых осцилляторов, совершающих вынужденные колебания, которые первоначально параллельны друг другу и не вращаются, а осциллируют не в фазе друг с другом. Каждый из осцилляторов испытывает угловое ускорение в одном направлении при одной фазе проходящей волны и в противоположном направлении при следующей фазе, но вращательный момент при этом не уравновешивается. При максимальном удлинении осциллятор испытывает больший вращательный момент (ускорение $\sim$ длине; вращательный момент $\sim$ длине^2), чем при максимальном сжатии. Следовательно, если осцилляторы, совершающие вынужденные колебания, обладают той же частотой, что и проходящая монохроматическая волна, и если фазы такие, как показано на фиг. 37.2, *ж*, то осциллятор A получит угловое ускорение вправо, а осциллятор B — влево.

---

[1]) Неопубликованная работа, цитируемая в статье [268].

8. Пульсация жидкости во вращающейся трубке, изогнутой в виде петли

8) жидкость в трубке

Третий тип детектора, реагирующего на угловое ускорение, описал Пресс [257]. Этот детектор, по-видимому, намного менее чувствителен, чем остальные, и поэтому его не стоит строить, но он интересен новизной замысла и иллюстрирует те особенности гравитационных волн, которые не используются в других детекторах. Детектор Пресса состоит из изогнутой в виде петли трубки, заполненной сверхтекучей жидкостью. Форма трубки и ее постоянная скорость вращения выбраны так, чтобы гравитационная волна заставляла жидкость пульсировать по кругу внутри трубки. Одна из возможных конструкций трубки (неудачная с точки зрения практического осуществления, но легко поддающаяся анализу) показана на фиг. 37.2, *з*. Заметим, что используются изменения приливного ускорения как вдоль направления распространения волны, так и в перпендикулярном направлении. Чтобы проанализировать отклик этой жидкости на волну с правой круговой поляризацией, можно мысленно наложить вращающуюся трубку на трехмерную диаграмму силовых линий, приведенную в дополнении 37.2.

УПРАЖНЕНИЯ

37.6. Относительное движение свободных тел как детектор гравитационных волн (фиг. 37.2, *а* и 37.3)

Рассмотрите два пробных тела, которые первоначально покоятся одно относительно другого в плоском пустом пространстве-времени. (Случай, когда поблизости находятся другие гравитирующие тела, может быть рассмотрен без серьезных дополнительных трудностей, но в этом упражнении имеется в виду лишь самый простой пример.) На эти тела в направлении z падает плоская почти монохроматическая волна с угловой частотой ω и поляризацией $\mathbf{e}_+$. Как показано в упражнении 35.5, тела всегда остаются в состоянии покоя относительно ТТ-координат, которые до прихода волны представляли собой глобальную инерциальную систему отсчета этих тел. Для произвольных расстояний $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, разделяющих пробные тела, вычислите красное смещение и время распространения фотонов от одного тела до другого и обратно. Сравните ответ для больших Δx, Δy, Δz с тем ответом, который получился бы, если пользоваться (необоснованно!) уравнением отклонения геодезических. В чем физическая причина того, что правильный ответ *осциллирует* с увеличением расстояния? Обсудите осуществимость и потенциальную чувствительность подобного детектора при использовании современной техники.

37.7. Разнесенные Земля и Луна как детектор гравитационных волн

УПРАЖНЕНИЯ

В начале 70-х годов появилась возможность измерять расстояние между Землей и Луной с помощью лазера с точностью до 10 см при промежутках между последовательными наблюдениями, равных по меньшей мере времени, за которое свет доходит от Земли до Луны и обратно. Допустим, что не наблюдается никаких осцилляций этого промежутка времени, за исключением вариаций (с довольно большими периодами), которых можно ожидать от гравитационного взаимодействия между Землей, Луной, Солнцем и планетами. Какие в этом случае можно наложить ограничения на поток энергии гравитационных волн, проходящих мимо Земли? Ответ должен давать численно

$$\text{поток} \leqslant 10^{18}\ \text{эрг/(см}^2\cdot\text{с)}\ \text{для}\ 0{,}3\ \text{период/с} \leqslant \nu \leqslant 1\ \text{период/сут}, \tag{37.10а}$$

что соответствует следующему пределу на плотность массы гравитационных волн:

$$\text{плотность} \leqslant 10^{-13}\ \text{г/см}^3. \tag{37.10б}$$

Почему это ограничение не представляет интереса?

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. В качестве подготовки к ней не требуется никакого предшествующего материала, относящегося к курсу 2, и она сама не обязательна для всех последующих глав.

§ 37.4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ДЕТЕКТОРЫ: ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В остающейся части этой главы (за исключением § 37.9) дается детальный анализ колебательных механических детекторов (Земля, веберовская болванка, «болванки» сложной формы и т. д.)

Конкретные детали анализа и его применения критически зависят от двух безразмерных величин: 1) от отношения τ_{GW}/τ_0, где

$$\tau_{GW} \equiv \begin{pmatrix}\text{характерный масштаб времени изменения}\\ \text{амплитуды и спектра гравитационной волны}\end{pmatrix}, \tag{37.11а}$$

$$\tau_0 \equiv \begin{pmatrix}\text{время, за которое колебания детектора затухают}\\ \text{в } e \text{ раз вследствие внутреннего трения (в интере-}\\ \text{сующей нас нормальной моде)}\end{pmatrix}, \tag{37.11б}$$

и 2) от отношения $\bar{E}_{\text{колеб}}/kT$, где

$$\bar{E}_{\text{колеб}} \equiv \begin{pmatrix}\text{среднее значение энергии колебаний детектора}\\ \text{(в интересующей нас нормальной моде) за время}\\ \text{прохождения и воздействия волн на детектор}\end{pmatrix}, \tag{37.12а}$$

$$kT \equiv \begin{pmatrix}\text{постоянная}\\ \text{Больцмана}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{температура}\\ \text{детектора}\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix}\text{средняя энергия в интересующей нас нормальной}\\ \text{моде, когда гравитационные волны не возбуждают ее}\end{pmatrix}. \tag{37.12б}$$

Определения: «стационарный поток», «волны, действующие подобно удару молотка», «радиационно доминированный детектор», «шумовой детектор»

Когда $\tau_{GW} \gg \tau_0$, излучение воспринимается детектором в виде «стационарного потока» и отклик детектора представляет собой стационарные колебания; когда $\tau_{GW} \ll \tau_0$ (короткий всплеск излучения), гравитационные волны действуют на детектор «подобно удару молотка». Если $\bar{E}_{\text{колеб}} \gg kT$, то вынуждающая сила, с которой волны действуют на детектор, преобладает над силами, создаваемыми хаотическим внутренним броуновским шумом в детекторе (*радиационно доминированный детектор*); если $\bar{E}_{\text{колеб}} \lesssim kT$, то вынуждающая сила должна «конкурировать» с хаотическими силами внутреннего броуновского шума (*шумовой детектор*).

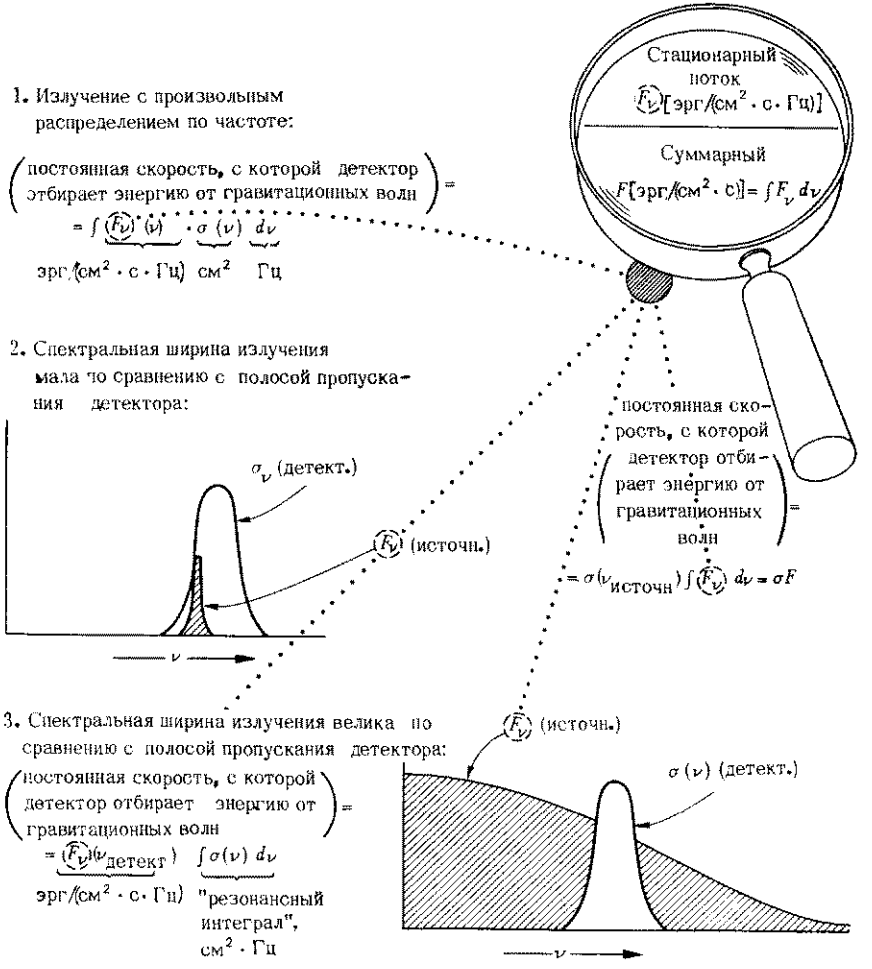
В § 37.5—37.7 рассматриваются радиационно доминированные детекторы ($E_{\text{колеб}} \gg kT$). Основные результаты этих параграфов приведены в дополнении 37.3, которое фигурирует здесь как предварительный беглый обзор (хотя пока не все в нем может оказаться понятным). В § 37.8 рассматриваются шумовые детекторы.

Для проектирования детекторов требуется многое помимо понятия поперечного сечения

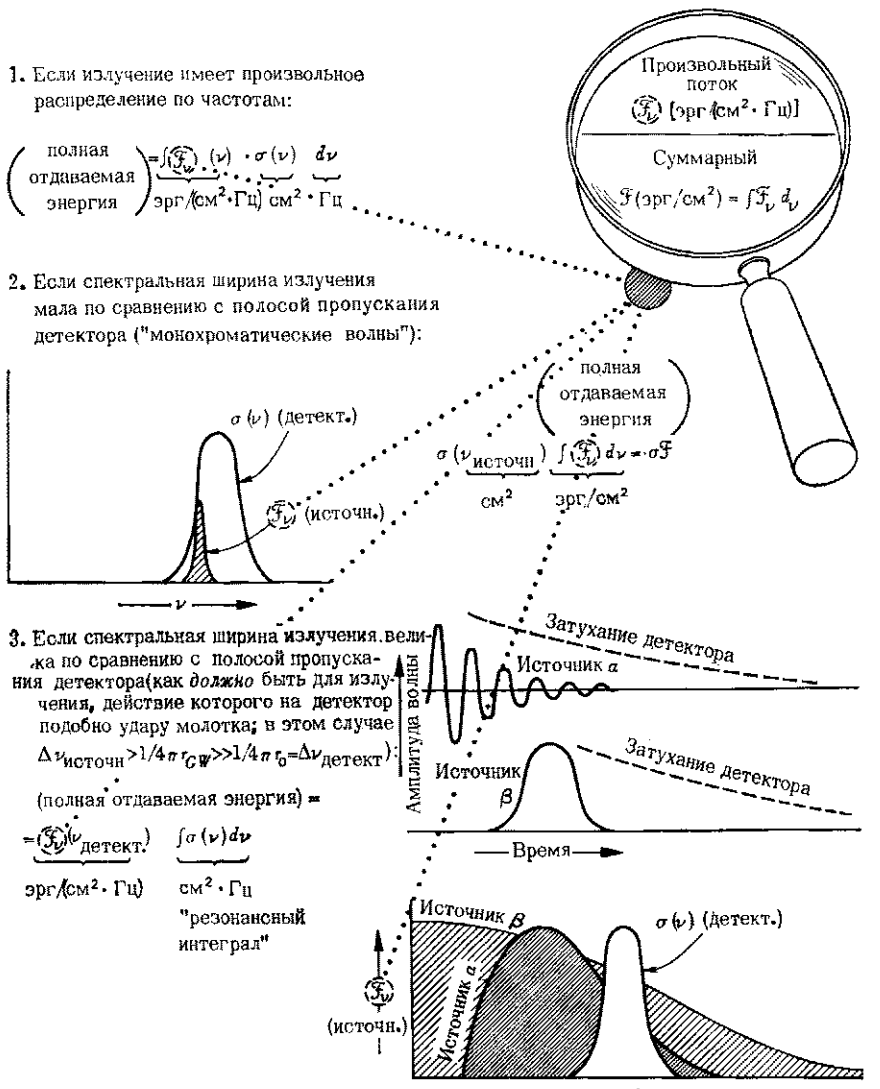
Предостережение. В остальной части этой главы главное внимание уделяется понятию поперечного сечения. Это понятие представляется весьма полезным для первого знакомства с теорией детекторов. Но поперечное сечение не дает полной картины, особенно когда мы желаем изучать детальную волновую структуру излучения. А иногда (например, в случае детектора, изображенного на фиг. 37.2, *а*) оно *вообще ничего не дает* для описания излучения. Первоклассный экспериментатор, проектирующий новый детектор, не ограничится исследованием поперечных сечений; они будут интересовать его в еще меньшей степени, чем радиоинженера при проектировании нового радиотелескопа. Много внимания он будет уделять также полосе пропускания антенны и другим более детальным характеристикам ее отклика, связи антенны с датчиком смещений, характеристикам отклика датчика, шуму антенны, шуму датчика и т. д. Обзор этих вопросов и обсуждение детекторов, для которых понятие поперечного сечения является бесполезным, см., например, в работе [240].

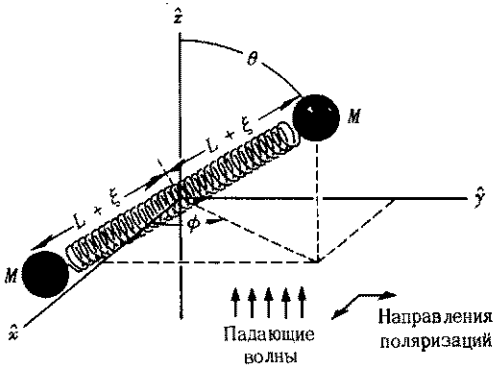
Дополнение 37.3. КАК ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ В РАДИАЦИОННО ДОМИНИРОВАННЫХ ДЕТЕКТОРАХ

А. При расчете *скорости*, с какой детектор отбирает энергию от *стационарного* потока излучения ($\tau_{GW} \gg \tau_0$)



Б. При вычислении *полной* энергии, отдаваемой детектору при прохождении *произвольного* цуга гравитационных волн





ФИГ. 37.4.
Идеализированный детектор (вибратор), реагирующий на линейно поляризованные гравитационные волны.

§ 37.5. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЙ РАДИАЦИОННО ДОМИНИРОВАННЫЙ ДЕТЕКТОР, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Идеализированный детектор: осциллятор, возбуждаемый стационарным потоком монохроматических волн:

Начнем с *радиационно доминированного детектора* ($\overline{E}_{\text{колеб}} \gg kT$), возбуждаемого стационарным потоком излучения ($\tau_{GW} \gg \tau_0$). Сначала рассмотрим вместо болванки произвольной формы идеализированный детектор, показанный на фиг. 37.4: осциллятор, состоящий из двух масс M, расположенных на концах пружинки, длина которой в состоянии равновесия равна $2L$. Пусть детектор обладает собственной частотой колебаний ω_0 и временем затухания $\tau_0 \gg 1/\omega_0$, так что уравнение движения (в собственной системе отсчета детектора) имеет вид

1) вывод уравнения движения

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau_0 + \omega_0^2 \xi = \text{вынуждающее ускорение}. \qquad (37.13)$$

Пусть на детектор падают гравитационные волны с поляризацией $\mathbf{e}_+$ и угловой частотой ω, распространяющиеся в направлении оси $\hat{z}$, и пусть полярные углы детектора относительно осей $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, определяемых волной, равны θ и φ.

Приходящие волны описываются уравнениями (37.1) с амплитудой

$$A_\times = 0, \quad A_+ = \mathscr{A}_+ e^{-i\omega(t-z)}. \qquad (37.14)$$

(Здесь, как и всюду, мы должны брать действительную часть от всех комплексных выражений.) Допустим, что размер детектора много меньше длины волны и можно положить $z \approx \hat{z} = 0$ по

всему детектору. Тогда создаваемые волной приливные ускорения

$$\left(\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{за счет волн}} = -R_{\hat{x}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}x^{\hat{j}} = -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+e^{-i\omega\hat{t}}\hat{x},$$

$$\left(\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{за счет волн}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}x^{\hat{j}} = +\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+e^{-i\omega\hat{t}}\hat{y}$$

имеют следующую составляющую вдоль осциллятора:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\hat{x}}{L}\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + \frac{\hat{y}}{L}\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + \frac{\hat{z}}{L}\frac{d^2\hat{z}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\,\frac{\hat{x}^2-\hat{y}^2}{L^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\sin^2\theta\cos 2\varphi.$$

Поэтому уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau_0 + \omega_0^2\xi = -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\sin^2\theta\cos 2\varphi. \qquad (37.15)$$

Вынуждающая сила зависит от угла φ как $\cos 2\varphi$, поскольку гравитационные волны по своей природе обладают «спином 2» (вращение на 180° в поперечной плоскости оставляет волну без изменений, вращение на 90° изменяет знак фазы). Множитель $\sin^2\theta$ получается в результате поперечности гравитационных волн (один множитель $\sin\theta$ учитывает проекцию на направление детектора) и приливного характера сил, создаваемых волнами [другой множитель $\sin\theta$ учитывает, что (относительная сила) $\sim$ (расстояние *в поперечной плоскости*)].

2) амплитуда осциллятора как функция частоты и ориентации

Простое стационарное решение уравнения движения (37.15) имеет вид

$$\xi = \frac{{}^1/_2\omega^2\mathcal{A}_+L\sin^2\theta\cos 2\varphi}{\omega^2-\omega_0^2+i\omega/\tau_0}e^{-i\omega\hat{t}}. \qquad (37.16)$$

Когда падающие на детектор волны находятся почти в резонансе с детектором $|\omega \pm \omega_0| \lesssim 1/\tau_0$, осциллятор возбуждается до значительной амплитуды. В противном случае возбуждение мало. В дальнейшем мы сосредоточим внимание на почти резонансном возбуждении. Тогда выражение (37.16) можно упростить (заметим, что ω_0 положительно, но ω может быть как положительным, так и отрицательным):

$$\xi = \frac{{}^1/_4\omega_0\mathcal{A}_+L\sin^2\theta\cos 2\varphi}{|\omega|-\omega_0+{}^1/_2\operatorname{sign}(\omega)\,i/\tau_0}e^{-i\omega\hat{t}}. \qquad (37.16')$$

Одним из показателей эффективности детектора является его поперечное сечение для поглощения энергии гравитационных волн. Энергия стационарных колебаний детектора с указанной выше амплитудой и с двумя массами M равна

$$E_{\text{колеб}} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot(\dot{\xi}^2)_{\text{макс}} = \frac{{}^1/_{16}ML^2\omega_0^4\mathcal{A}_+^2\sin^4\theta\cos^2 2\varphi}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2}. \qquad (37.17)$$

Эта энергия диссипирует, превращаясь во внутреннюю энергию детектора, со скоростью $E_{\text{колеб}}/\tau_0$. Если не учитывать переизлучение энергии снова в виде гравитационных волн (крайне слабый процесс!), то скорость диссипации можно приравнять скорости, с которой детектор поглощает энергию из приходящих волн, которая в свою очередь равна «поперечному сечению» σ, умноженному на падающий поток:

$$E_{\text{колеб}}/\tau_0 = -dE_{\text{волн}}/dt = \sigma T^{0z(GW)} = \frac{1}{32\pi}\sigma\omega^2\mathcal{A}_+^2.$$

3) поперечные сечения для поляризованного излучения

Следовательно, *вблизи резонанса* ($|\omega \pm \omega_0| \ll \omega_0$) *поперечное сечение* поглощения энергии гравитационных волн

$$\sigma = \frac{2\pi ML^2(\omega_0^2/\tau_0)\sin^4\theta\cos^2 2\varphi}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2} \quad \text{для поляризованного излучения.} \tag{37.18}$$

Это выражение применимо к монохроматическому излучению. Однако по опыту работы с многими другими типами волн мы знаем, что часто приходится иметь дело с широким непрерывным спектром частот с «шириной полосы» падающего излучения намного большей, чем ширина резонанса детектора (см. дополнение 37.3). При этих условиях необходимо пользоваться не самим поперечным сечением, а «резонансным интегралом» от поперечного сечения

$$\int_{\text{резонанс}} \sigma\, d\nu = \int \sigma\,(d\omega/2\pi) = 2\pi ML^2\omega_0^2\sin^4\theta\cos^2 2\varphi$$

$$\text{для поляризованного излучения.} \tag{37.19}$$

Прежде чем исследовать величину этого интегрального поперечного сечения, тщательно изучим зависимость этого сечения от направления («диаграмму направленности антенны»). Множитель $\sin^4\theta\cos^2 2\varphi$ относится к линейно поляризованному излучению $\mathbf{e}_+$ (фиг. 37.4). Для ортогонально поляризованной моды $\mathbf{e}_\times\cos^2 2\varphi$ следует заменить на $\sin^2 2\varphi$, а для неполяризованного излучения (некогерентной смеси поляризаций) или для излучения с круговой поляризацией поперечное сечение представляет собой среднее этих двух выражений; таким образом,

4) поперечные сечения для неполяризованного излучения

$$\sigma = \frac{\pi ML^2(\omega_0^2/\tau_0)\sin^4\theta}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2} \quad \text{для неполяризованного излучения.} \tag{37.20}$$

Отметим, что это поперечное сечение для неполяризованного излучения имеет пик с полушириной 33° вблизи экваториальной плоскости детектора. После усреднения по всем возможным направлениям прихода гравитационных волн это поперечное сечение

оказывается равным

$$\langle\sigma\rangle_{\text{по всем направлениям}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sigma \sin\theta\, d\theta = \frac{8}{15}\sigma_{\text{макс}} =$$

$$= \frac{(8\pi/15)\,ML^2\,(\omega_0^2/\tau_0)}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2} \text{ для неполяризованного излучения.} \quad (37.21)$$

Приведенные выше выражения для поперечных сечений можно переписать в нескольких других формах. Например, при резонансе поперечное сечение (37.21) записывается в виде

$$\langle\sigma\rangle_{\text{по всем направлениям}} = \frac{4\pi^2}{15}\,\frac{4M}{2\pi/\omega_0}\,(\omega_0\tau_0)\,(2L)^2.$$

Напомним, что $\omega_0\tau_0$ определяет Q детектора ($1/Q \equiv$ доля *энергии*, диссипируемая за время изменения фазы колебания на один радиан). Заметим, что $2\pi/\omega_0$ есть длина волны резонансного излучения λ_0. Наконец, обозначим через $r_g = 4M$ гравитационный радиус детектора. Находим следующую формулу для поперечного сечения, выраженного через эти хорошо знакомые величины:

Величина поперечных сечений для произвольного резонансного детектора

$$\frac{\langle\sigma\rangle_{\text{по всем направлениям}}}{(2L)^2} = \frac{\begin{pmatrix}\text{поперечное сечение поглощения}\\ \text{волн в резонансе}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{«геометрическое» поперечное}\\ \text{сечение детектора}\end{pmatrix}} =$$

$$= (4\pi^2/15)\,(r_g/\lambda_0)\;Q \text{ в резонансе для неполяризованного излучения.} \quad (37.22)$$

Эта формула справедлива по порядку величины для любого резонансного детектора. Она ясно показывает, что гравитационно-волновая астрономия связана с очень большими трудностями. Насколько большим можно сделать множитель r_g/λ_0 при разумных затратах? Детекторы Вебера 1970 г. имеют $2L_{\text{эфф}} \approx 1$ М, $r_g \approx$ $\approx (0{,}74\cdot10^{-28}$ см/г$)\cdot(10^6$ г$) \approx 10^{-22}$ см, $\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1660$ Гц, $\lambda_0 \approx 200$ км, $r_g/\lambda_0 \approx 0{,}5\cdot10^{-29}$, $\tau_0 \approx 20$ с, $Q \approx 2\cdot10^5$; таким образом,

$$\sigma_{\text{Вебер}} \approx 3\cdot10^{-20} \text{ см}^2 \text{ в резонансе.} \quad (37.23)$$

Поток, необходимый для возбуждения детектора веберовского типа

Какой поток энергии гравитационных волн должен падать на холодный детектор ($\sim$0 К), чтобы возбудить его приблизительно до стационарного уровня колебаний с энергией, равной (постоянная Больцмана) $\times$ (комнатная температура) $\sim 4\cdot10^{-14}$ эрг? Вибратор, достаточно охлажденный, чтобы быть радиационно доминированным детектором, диссипирует свою энергию со скоростью $E_{\text{колеб}}/\tau_0 \sim 2\cdot10^{-15}$ эрг/с. Падающий поток излучения должен восполнять эту потерю со скоростью

$$T_{00}^{(GW)}\sigma \sim 2\cdot10^{-15} \text{ эрг/с;} \quad (37.24a)$$

отсюда следует, что падающий поток по порядку величины равен $2 \cdot 10^{-15}/3 \cdot 10^{-20} \sim 10^5$ эрг/(см^2·с). Кроме того, этот поток должен быть сконцентрирован в узком резонансном диапазоне

$$\nu \approx \nu_0 \pm 1/4\pi\tau_0 = (1660 \pm 0{,}004)\ \text{Гц}. \qquad (37.24б)$$

По любым меркам это очень сильный поток гравитационного излучения при столь малой ширине спектра ($\sim 10^7$ эрг/(см^2·с·Гц) по сравнению с потоком гравитационного излучения черного тела $8\pi\nu^2 kT/c^2 = 3 \cdot 10^{-27}$ эрг/(см^2·с·Гц), который соответствует планковскому равновесию при той же температуре; столь сильное различие этих двух потоков отражает различие в скоростях затухания осциллятора за счет трения и за счет гравитационного излучения).

Большое Q не обязательно является оптимальным

Из (37.22), казалось бы, можно сделать вывод, что оптимальный детектор должен обладать как можно бо́льшим Q. Но это не обязательно так. Напомним, что ширина полосы $\Delta\omega \approx \omega_0/Q$, в которой поперечное сечение велико, уменьшается с увеличением Q. Когда на детектор падает стационарный поток излучения со спектральной шириной $\Delta\omega \gg \omega_0/Q \equiv 1/\tau_0$ и спектральным потоком F_ν эрг/(см^2·с·Гц), он отдает энергию со скоростью

$$\begin{pmatrix}\text{скорость отдачи}\\ \text{энергии}\end{pmatrix} = \frac{dE}{dt} = \int\limits_{\text{резонанс}} F_\nu \sigma\, d\nu = F_\nu(\nu_0) \int\limits_{\text{резонанс}} \sigma\, d\nu. \qquad (37.25)$$

(для излучения со спектральной шириной $\Delta\nu \gg 1/\tau_0$)

Следовательно, истинной мерой эффективности детектора является интеграл от поперечного сечения по резонансу $\int \sigma\, d\nu$ (37.19) (см. следующий параграф). Это проинтегрированное по частоте поперечное сечение не зависит от Q детектора; таким образом, чтобы решить, является ли желательным большое Q, необходимо прибегнуть к более сложным рассуждениям (например, к теории отношения сигнала к шуму) (см. § 37.8).

§ 37.6. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЙ РАДИАЦИОННО ДОМИНИРОВАННЫЙ ДЕТЕКТОР, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОТОКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Отклик идеализированного детектора на произвольный немонохроматический поток:

Пусть плоско поляризованные волны с поляризацией $\mathbf{e}_+$, но с *произвольным* спектром [формула (37.1), где $A_\times = 0$] падают на идеализированный детектор, показанный на фиг. 37.4. Тогда уравнение движения детектора имеет тот же вид, что и для случая

монохроматических волн [уравнение (37.15)], но с заменой $-\omega^2 A_+ e^{-i\omega t}$ на $\ddot{A}_+$:

1) вывод

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau_0 + \omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} \ddot{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\varphi. \qquad (37.26)$$

[Мы уже привыкли к тому, что весь анализ детекторов (когда размеры детектора много меньше длины волны) проводится в собственной системе отсчета детектора с координатами $\hat{t}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. *В дальнейшем, чтобы облегчить зрительное восприятие формул, мы откажемся от «уголков» над этими «собственными координатами» и будем обозначать их просто* t, x, y, z.]

Разложим волны и смещение детектора в интеграл Фурье:

$$A_+(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_+(\omega)\, e^{-i\omega t}, \qquad (37.27а)$$

$$\xi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\xi}(\omega)\, e^{-i\omega t}. \qquad (37.27б)$$

Тогда из уравнения (37.26) получим

$$\tilde{\xi} = \frac{{}^1/_2 \omega^2 \tilde{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\varphi}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau_0}.$$

Эта фурье-амплитуда пренебрежимо мала, за исключением случая, когда $|\omega \pm \omega_0| \ll \omega_0$; следовательно, без потери точности ее можно переписать в виде

$$\tilde{\xi} = \frac{{}^1/_4 \omega_0 \tilde{A}_+ L \sin^2\theta 2\varphi}{|\omega| - \omega_0 + {}^1/_2 \operatorname{sgn}(\omega)\, i/\tau_0} \qquad (37.28)$$

[ср. со стационарной амплитудой (37.16′)].

Спрашивается, какова полная энергия, отдаваемая детектору гравитационными волнами. Мы не будем искать ответа, изучая непосредственно амплитуду колебаний $\xi(t)$; поскольку эта амплитуда определяется не только вынуждающей силой со стороны волн, но и внутренним трением, она не имеет непосредственного отношения к отдаваемой энергии. Чтобы получить эту энергию, проинтегрируем по времени действующую на каждую массу силу, умноженную на скорость:

$$\begin{pmatrix}\text{полная отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{2\left(\frac{1}{2} M \ddot{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\varphi\right)}_{\text{сила, действующая на каждую массу}} \underbrace{\dot{\xi}}_{\text{скорость каждой массы}} dt.$$

2 массы

2

Воспользуемся теоремой Парсеваля (одним из мощнейших методов математической физики!), чтобы заменить интеграл по времени интегралом по частоте:

$$\begin{pmatrix}\text{полная отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \Re \int_{-\infty}^{+\infty} (ML \sin^2\theta \cos 2\phi) \times$$

$$\times (-\omega^2 \tilde{A}_+^*)(-i\omega\tilde{\xi})\, d\omega.$$

Затем воспользуемся выражением (37.28) и перепишем эту формулу, выразив все через амплитуду волны:

$$\begin{pmatrix}\text{полная отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\pi(\omega_0^2/\tau)\, ML^2 \sin^4\theta \cos^2 2\phi}{(|\omega| - \omega_0)^2 + (1/2\tau_0)^2}\right]\left[\frac{\omega^2 |\tilde{A}_+|^2}{16\pi}\right] d\omega. \qquad (37.29)$$

Первый множитель в этом выражении в точности равен поперечному сечению для монохроматической волны (37.18), выведенному в предыдущем параграфе. Второй множитель объясняется столь же просто: полная энергия, переносимая гравитационными волнами через единицу площади поверхности детектора, равна

$$\mathcal{F}\ (\text{эрг/см}^2) = \int T_{00}^{(GW)}\, dt = \int \frac{1}{16\pi} \dot{A}_+^2\, dt =$$

$$= \int \frac{\omega^2 |\tilde{A}_+|^2}{16\pi} d\omega = \int \frac{\omega^2 |\tilde{A}_+|^2}{8}\, d\nu \qquad (37.30)$$

(снова теорема Парсеваля!). Следовательно, количество энергии, переносимой волнами, приходящееся на единичный интервал частот и на единицу площади, равно

$$\mathcal{F}_\nu\,[\text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{Гц})] = \frac{1}{8}\omega^2 |\tilde{A}_+|^2 \qquad (37.31)$$

(если $-\infty < \nu < +\infty$, и удвоенная величина, если $0 < \nu < +\infty$,— соглашение, которое мы принимаем для оставшейся части этой главы). Это и есть второй множитель в (37.29), умноженный на 2π.

Комбинируя уравнения (37.18), (37.29) и (37.31), находим

$$\begin{pmatrix}\text{полная отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \int \sigma(\nu)\, \mathcal{F}_\nu(\nu)\, d\nu. \qquad (37.32)$$

2) **ответ:** (отдаваемая энергия) $= \int \sigma\, \mathcal{F}_\nu d\nu$

Это полная энергия, отдаваемая детектору, независимо от спектра излучения и независимо от того, приходят ли волны в виде стационарного потока в течение длительного времени, или в виде короткого всплеска, или в любом другом виде. Это утверждение носит совершенно общий характер, пока детектор является радиационно доминированным ($E_{\text{колеб}} \gg kT$) при воздействии на него гравитационного излучения.

Как можно измерить отдаваемую энергию

Каким образом экспериментатор может измерить полную энергию, отдаваемую детектору гравитационными волнами? Как правило, он не может измерить ее непосредственно, но он может измерить величину, равную этой энергии, а именно полную энергию, теряемую на внутреннее затухание, т. е. на «трение». Скорость потери энергии за счет трения равна $E_{\text{колеб}}/\tau_0$, если энергия колебаний много больше, чем kT (т. е. пока детектор является радиационно доминированным). Поэтому экспериментатор может измерить в общем случае

$$\begin{pmatrix}\text{полная отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_0}\int E_{\text{колеб}}\,dt. \tag{37.33}$$

↑

интеграл по периоду времени, когда $E_{\text{колеб}} \gg kT$

В частном случае волн, «воздействующих на детектор подобно удару молотка» (τ_{GW} = продолжительность действия волн $\ll \tau_0$), энергия колебаний «мгновенно» возбуждается от $\sim kT$ до пикового значения $E^{\text{пик}}_{\text{колеб}} \gg kT$, а затем экспоненциально падает снова до $\sim kT$; таким образом, в случае волн, воздействующих на детектор подобно удару молотка,

$$\begin{pmatrix}\text{полная отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^\infty E^{\text{пик}}_{\text{колеб}} e^{-t/\tau_0}\,dt = E^{\text{пик}}_{\text{колеб}}. \tag{37.34}$$

Если же в течение длительного периода времени ($\tau_{GW} \gg \tau_0$) волны остаются стационарными со спектральным потоком

$$F_\nu = \mathcal{F}_\nu/\tau_{GW}\ \ [\text{эрг}/(\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{Гц})],$$

то энергия передается детектору с постоянной скоростью

$$(dE/dt) = (\text{полная отдаваемая энергия})/\tau_{GW};$$

тогда уравнение (37.32) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix}\text{скорость передачи}\\ \text{энергии}\end{pmatrix} = \int \sigma(\nu)\,F_\nu\,d\nu \tag{37.35}$$

для стационарного потока волн ($\tau_{GW} \gg \tau_0$).

Выражения (37.32) и (37.35) лежат в основе применения понятия поперечного сечения к реальным ситуациям. Они применимы не только для поляризованного излучения, но и для неполяризованного, а также для излучения, приходящего со всех направлений, если используется соответствующее сечение [выражение (37.20) или (37.21) вместо (37.18)]. Примеры таких применений см. в дополнении 37.3.

§ 37.7. РАДИАЦИОННО ДОМИНИРОВАННЫЙ ДЕТЕКТОР ОБЩЕГО ТИПА, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОТОКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Поперечные сечения идеализированного детектора, состоящего из двух масс, соединенных пружинкой, могут быть записаны в иной форме, более изящной, чем формулы (37.18) — (37.21); эта форма записи используется во многих областях физики и справедлива вообще для *любого* колебательного резонансного детектора.

Поперечные сечения, выраженные через «коэффициенты Эйнштейна A»

Введем «коэффициенты Эйнштейна A», описывающие, с какой скоростью единица энергии детектора теряется на внутреннее затухание и на переизлучение гравитационных волн:

$$A_{\text{дисс}} = \frac{\text{скорость внутренней диссипации энергии}}{\text{энергия колебаний детектора}} = \frac{1}{\tau_0}, \quad (37.36\text{а})$$

$$A_{GW} \equiv \frac{\text{скорость переизлучения энергии}}{\text{энергия колебаний}}. \quad (37.36\text{б})$$

Для идеализированного детектора, показанного на фиг. 37.4, обычная формула (36.1) для излучения гравитационных волн дает

$$\text{переизлучаемая мощность} = \frac{32}{15}\omega^6 M^2 L^2 \langle \xi^2 \rangle_{\text{ср. по вр.}}. \quad (37.37)$$

(см. упражнение 37.8). Следовательно,

$$A_{GW} = \frac{16}{15} M L^2 \omega^4. \quad (37.38)$$

Можно воспользоваться этими соотношениями и выразить поперечные сечения детектора через $A_{\text{дисс}}$, A_{GW} и приведенную длину волны излучения

$$\lambda \equiv 1/\omega. \quad (37.39)$$

Например, поперечное сечение (37.21) (теперь $\omega \geqslant 0$) принимает вид

$$\langle \sigma \rangle_{\text{по всем направлениям}} = \frac{1}{2}\pi\lambda^2 \frac{A_{GW} A_{\text{дисс}}}{(\omega - \omega_0)^2 + (A_{\text{дисс}}/2)^2} \quad (37.40)$$

для неполяризованного излучения (*напомним, что во всех формулах для поперечных сечений предполагается* $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$), а соответствующий интеграл по резонансной области

$$\int \langle \sigma \rangle_{\text{по всем направлениям}}\, d\nu = \frac{1}{2}\pi\lambda_0^2 A_{GW} \quad (37.41)$$

для поляризованного излучения.

Формализм коэффициентов A носит общий характер

Эти выражения имеют широкое применение. Они применимы к любому возможному колебательному резонансному детектору гравитационных волн, что видно из расчета «детального баланса» в упражнении 37.9 и из расчетов динамики в упражнении 37.10. Они применимы также с очевидными изменениями статистических факторов и обозначений в ядерной физике к реакциям с участием промежуточных ядер (формула Брейта — Вигнера, см. [269]), к поглощению фотонов атомами и молекулами, к приему электромагнитных волн телевизионной антенной и т. д. Формула (37.41) фактически гласит: «Рассчитайте скорость затухания колебаний за счет гравитационного излучения, умножьте эту скорость на геометрический фактор, знакомый из работ с антеннами, $^1/_2\pi\lambda_0^2$, и вы немедленно получите резонансный интеграл от поперечного сечения». Результат выражен в геометрических единицах (см). Чтобы получить резонансный интеграл в обычных единицах, достаточно умножить результат на коэффициент пересчета $c = 3 \cdot 10^{10}$ см·Гц.

«Анализ динамики» идеализированного детектора в виде масс, соединенных пружинкой, развитый в последнем параграфе, легко обобщается на колебательный детектор произвольной формы (для Земли, для веберовской болванки, для крыла автомобиля и т. д.). Такое обобщение проводится в упражнении 37.10, а основные его результаты кратко изложены в дополнении 37.4.

Рассеяние излучения на детекторе

Часть энергии, поглощаемой детектором, переизлучается в виде рассеянного гравитационного излучения. Для любого детектора лабораторных размеров с лабораторными коэффициентами затухания эта часть энергии фантастически мала. Однако в принципе можно представить себе такую протяженную систему и такие условия, когда переизлучение не пренебрежимо мало. В таком случае мы имеем дело с рассеянием. Здесь мы не пытаемся проанализировать подобные процессы рассеяния. Для простого рассмотрения по порядку величины можно воспользоваться формулой для рассеяния Брейта — Вигнера того типа, который используется для расчета рассеяния нейтронов при ядерном резонансе или фотонов при оптическом резонансе. При более детальном анализе пришлось бы исследовать корреляцию между поляризациями рассеянного и падающего излучения. Формализм, успешно используемый здесь для гравитационного излучения, носящего тензорный характер, очень похож на формализм, применяемый в настоящее время для рассмотрения поляризации излучения со спином 1. Отметим здесь специально «конвенцию» [270], выработанную совместными усилиями многих физиков, работающих в этой области, которые за долгие годы сталкивались с множеством различных спорных систем обозначений. Анализируя тот путь, который привел к наиболее приемлемой на сегодняшний день системе обозначений для излучения со спином 1, мы можем понять, что пока слишком рано канонизировать какую-либо одну систему обозначений для описания параметров рассеяния гравитационного излучения.

УПРАЖНЕНИЯ

37.8. Переизлучаемая мощность

Идеализированный детектор гравитационных волн, показанный на фиг. 37.4, колеблется с угловой частотой ω. Покажите, что мощность, которую он излучает в виде гравитационных волн, дается формулой (37.37).

37.9. Вычисление поперечных сечений с помощью принципа детального равновесия

Воспользуйтесь принципом детального равновесия для вывода формул для поперечных сечений (37.40) и (37.41) для колебательного резонансного детектора произвольной формы, размера и массы (например, для колебаний Земли и для колеблющегося веберовского цилиндра или же для идеализированного детектора, изображенного на фиг. 37.4). [*Указания.* Допустите, что детектор находится в своеобразной гравитационно-волновой бане в равновесии с чернотельным гравитационным излучением. Тогда потеря энергии на переизлучение должна происходить с той же скоростью, что и поглощение энергии волн. (Внутреннее затухание можно не учитывать, поскольку в истинном термодинамическом равновесии потеря энергии на внутреннее затухание в точности компенсируется энергией, которая сообщается колебаниям внутренними хаотическими броуновскими силами.) Подробнее баланс приобретаемой и теряемой энергии записывается в виде

$$[4\pi I_\nu(\nu=\nu_0)]_{\text{черноте л}} \times \int \langle\sigma\rangle_{\text{по всем направлениям}}\, d\nu =$$

$$= A_{GW} \times (\text{энергия, заключенная в нормальной моде детектора}).$$

Здесь I_ν —«спектральная интенсивность», даваемая формулой (22.48). Разрешите это уравнение относительно $\int \langle\sigma\rangle\, d\nu$, воспользовавшись известной формулой для планковского спектра и тем фактом, что гравитационные волны имеют два независимых состояния поляризации.] *Замечание.* Поскольку принцип детального равновесия может применяться к резонансной системе любого типа, взаимодействующей с излучением или частицами любого типа, формулы (37.40) и (37.41) при соответствующих изменениях статистических факторов обладают большой общностью.

37.10. Описание колебательных резонансных детекторов с помощью нормальных мод

Выведите все результаты для колебательных резонансных детекторов, которые приведены в дополнении 37.4. Образцом такого вывода служит рассмотрение идеализированного детектора, описанного в § 37.6. [*Указания.* а. Допустите, что на детектор воздействуют поляризованные волны, заданные уравнением (6) допол-

УПРАЖНЕНИЯ

нения 37.4, и что этот детектор является радиационно доминированным ($E_{\text{колеб}} \gg kT$). Покажите, что смещения $\delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t)$ элементов массы детектора описываются выражением

$$\xi = \sum_n B_n(t)\, \boldsymbol{u}_n(x), \tag{37.42а}$$

где зависящая от времени амплитуда n-й моды удовлетворяет уравнению осциллятора, совершающего вынужденные колебания,

$$\ddot{B}_n + \dot{B}_n/\tau_n + \omega_n^2 B_n = R_n(t), \tag{37.42б}$$

причем вынуждающий член, обусловленный кривизной, равен

$$R_n(t) = -R_{\hat{j}\,\hat{0}\,\hat{k}\,\hat{0}} \int (\rho/M)\, u_n^j x^k\, d^3x = \frac{1}{4} \ddot{A}\, (\text{I}_{(n)jk} e_{jk})/M. \tag{37.42в}$$

(Обозначения см. в дополнении 37.4.)

б. Разложите амплитуды колебания детектора и волны в интеграл Фурье

$$B_n(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}_n(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega, \tag{37.42г}$$

$$A(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{37.42д}$$

и разрешите уравнение движения (37.42б), (37.42в), чтобы получить вблизи резонанса

$$\tilde{B}_n = \frac{{}^1/_8 \omega_n \tilde{A} (\text{I}_{(n)jk} e_{jk})/M}{|\omega| - \omega_n + {}^1/_2 i/\tau_n} \quad \text{при } |\omega \pm \omega_n| \ll \omega_n. \tag{37.42е}$$

в. Путем интегрирования вычислите полную энергию, отдаваемую детектору,

$$\begin{pmatrix}\text{отдаваемая}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \int (\textbf{сила} \text{ на единицу объема}) \cdot (\textbf{скорость})\, d^3x\, dt.$$

Тем самым получите

$$\begin{pmatrix}\text{энергия, отдаваемая}\\ n\text{-й нормальной моде}\end{pmatrix} = \frac{1}{4} (\text{I}_{(n)jk} e_{jk}) \int \dot{A}\, \dot{B}_n\, dt.$$

г. Примените теорему Парсеваля и выражение (37.42е), чтобы получить

$$\begin{pmatrix}\text{энергия, отдаваемая}\\ n\text{-й нормальной моде}\end{pmatrix} = \int \sigma_n(\nu)\, \mathscr{F}_\nu(\nu)\, d\nu, \tag{37.43}$$

где σ_n дается формулой (7а) дополнения 37.4, и (для $-\infty < \omega < +\infty$)

$$\mathscr{F}_\nu(\nu) = \mathscr{F}_\nu(\omega/2\pi) = \frac{1}{8} \omega^2 |\tilde{A}|^2. \tag{37.44}$$

д. Покажите, что $\mathscr{F}_\nu(\nu)$ — полная энергия на единицу частоты и на единицу площади, переносимая падающими на детектор волнами.

е. Путем соответствующих преобразований этого поперечного сечения получите все остальные поперечные сечения, приведенные в дополнении 37.4. Воспользуйтесь математическим аппаратом проекции и интегрирования «ТТ-частей», развитым в дополнении 35.1 и в упражнении 36.9.]

37.11. Спектр энергии, излучаемой источником

Выведите результаты, приведенные в последней части дополнения 37.4.

37.12. Угловое распределение излучения и поглощения

Элементарный осциллятор в виде гантели, показанный на фиг. 37.4, первоначально не возбужденный, обладает поперечным сечением поглощения неполяризованного гравитационного излучения, которое пропорционально $\sin^4\theta$; если этот осциллятор возбудить, то он будет излучать с интенсивностью, также пропорциональной $\sin^4\theta$ (гл. 36). Угловые распределения излучения и поглощения одинаковы. Любой другой детектор в виде гантели дает то же самое распределение с точностью до ориентации. Рассмотрите невращающийся осциллятор произвольной формы, который испытывает свободные колебания на одной невырожденной (и поэтому не вращательной) моде или возбуждается извне *неполяризованным* излучением.

а. Покажите, что угловое распределение излучения совпадает с угловым распределением поглощения. (*Указание.* Проведите сравнения, которые указаны в конце дополнения 37.4.)

б. Покажите, что если не считать трех эйлеровых углов, описывающих ориентацию в пространстве всего распределения в целом, и четвертого параметра, определяющего полную интенсивность, распределение излучения (тождественное распределению поглощения) фиксируется одним («пятым») параметром.

в. Постройте диаграммы распределения интенсивности для двух предельных значений этого параметра, а также для выбранных естественным образом промежуточных значений этого параметра, лежащих между двумя предельными.

г. Определите этот неизвестный параметр в терминах некоторой безразмерной комбинации главных моментов приведенного квадрупольного тензора.

37.13. Многомодовый детектор

Рассмотрите цилиндрическую болванку, длина которой намного превосходит ее диаметр. Основную моду колебаний болванки назовите «модой $n = 1$», а моду с $n - 1$ узлами в собственной функ-

УПРАЖНЕНИЯ

ции —«n-й модой». Покажите, что поперечное сечение захвата неполяризованных гравитационных волн на n-м резонансе, проинтегрированное по резонансной области и усредненное по направлениям, дается формулой [115]

$$\int_{\substack{\text{по } n\text{-му резонансу;}\\ \text{хаотическое}}} \sigma(\nu)\, d\nu = \frac{32 v^2 M}{15 c^2 n^2} \text{ для четного } n \text{ (нуль для нечетного } n), \tag{37.45}$$

где v — скорость звука в болванке, выраженная в тех же единицах, что и скорость света c, а M — масса болванки (в геометрических единицах; при использовании обычных единиц правую часть нужно умножить на коэффициент пересчета $G/c = 2{,}22 \cdot 10^{-18}$ см^2 $\times$ $\times$ Гц/г). Покажите, что для наинизшей моды веберовской болванки это выражение дает $\int \sigma\, d\nu = 1{,}0 \cdot 10^{-21}$ см$^2 \cdot$Гц. В настоящее время (1973 г.) многомодовые детекторы строятся Фэйрбенком и Гамильтоном, а также Дугласом и Тайсоном.

37.14. Поперечное сечение поглощения гравитационного излучения идеализированной моделью Земли

Наблюдаемый период квадрупольных колебаний Земли составляет 54 мин (обзор и библиографию см., например, в работах [271, 272]). Анализ этой моды колебаний с полным учетом влияния упругости и вариаций плотности внутри Земли — весьма сложное дело. Поэтому для первой оценки поперечного сечения Земли по поглощению квадрупольного излучения рассмотрим Землю в виде шара, состоящего из жидкости постоянной плотности, сферическая форма которого поддерживается в равновесии исключительно гравитационными силами (нулевая жесткость). Пусть поверхность испытывает смещения от $r = a$ до

$$r = a + a\alpha P_2(\cos\theta), \tag{37.46а}$$

где θ — полярный угол, отсчитываемый от Северного полюса, а α — относительное удлинение главной оси. Движение с минимальной энергией, совместимое с этим изменением формы поверхности, описывается полем скоростей

$$\xi^x = -\frac{1}{2}\alpha x, \quad \xi^y = -\frac{1}{2}\alpha y, \quad \xi^z = \alpha z \tag{37.46б}$$

(нулевая дивергенция, нулевой вихрь).

а. Покажите, что сумма кинетической и гравитационной потенциальной энергий равна

$$E = -(3/5)\,(M^2/a)\,(1 - \alpha^2/5) + (3/20)\,Ma^2\dot{\alpha}^2. \tag{37.46в}$$

б. Покажите, что угловая частота свободного квадрупольного колебания равна

$$\omega = (16\pi/15)^{1/2}\rho^{1/2}. \tag{37.46г}$$

в. Покажите, что приведенные квадрупольные моменты равны

$$I_{xx} = I_{yy} = -Ma^2\alpha/5, \quad I_{zz} = 2Ma^2\alpha/5. \tag{37.46д}$$

г. Покажите, что скорость излучения колебательной энергии, усредненная по периоду, составляет

$$-\langle dE/dt \rangle = (3/125)\, M^2a^4\omega^6\alpha^2_{\text{пик}}. \tag{37.46е}$$

д. Покажите, что скорость экспоненциального уменьшения энергии вследствие радиационного затухания из-за гравитационных волн, или «уширение линий вследствие гравитационного излучения», равно

$$A_{GW} = (4/25)\, Ma^2\omega^4. \tag{37.46ж}$$

е. Покажите, что резонансный интеграл от поперечного сечения поглощения для излучения, падающего по случайным направлениям и имеющего хаотическую поляризацию, равен

$$\int\limits_{\text{резонанс}} \langle \sigma(\nu) \rangle\, d\nu = (\pi/2)\, \lambda^2 A_{GW} = (2\pi/25)\, Ma^2/\lambda^2. \tag{37.46з}$$

ж. Оцените этот резонансный интеграл. *Замечание.* Эта модель шара из жидкости с постоянной плотностью дает для Земли при средней плотности 5,517 г/см^3 период квадрупольного колебания 94 мин по сравнению с наблюдаемым периодом 54 мин и момент инерции $(2/5)\, Ma^2$ по сравнению с наблюдаемым $0{,}33Ma^2$. Руффини и Уилер [115] оценили поправочные множители для обоих эффектов и получили окончательное значение резонансного интеграла ~ 5 см^2 Гц.

Дополнение 37.4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ДЕТЕКТОРЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ!

А. Физические характеристики детектора

1. Детектор представляет собой твердое тело (Земля, веберовская болванка, крыло автомобиля ...) с распределением плотности $\rho(\boldsymbol{x})$ и полной массой $M = \int \rho\, d^3x$.

2. Детектор имеет нормальные моды колебаний; n-я нормальная мода характеризуется следующими величинами:

$$\omega_n = \text{угловая частота},$$

$$\tau_n = \begin{pmatrix}\text{время, за которое энергия колебаний}\\ \text{уменьшается в } e \text{ раз вследствие}\\ \text{внутреннего трения}\end{pmatrix} \gg 1/\omega_n, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\text{собственная функция (здесь по определению}\\ \text{она безразмерна и действительна)}\end{pmatrix}.$$

Собственные функции $\boldsymbol{u}_n$ ортономированы, так что

$$\int \rho \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m \, d^3x = M\delta_{nm}. \tag{2}$$

3. В ходе колебания в нормальной моде с энергией $E_{\text{колеб}} \gg kT$ элемент массы, первоначально расположенный в x, получает смещение

$$\delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x})\, \mathscr{B}_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n}, \tag{3а}$$

↑ постоянная амплитуда

плотность при фиксированном $\boldsymbol{x}$ изменяется как

$$\delta\rho = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}_n)\, \mathscr{B}_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n}, \tag{3б}$$

а тензор момента инерции осциллирует:

$$\delta I_{jk} = I_{(n)jk} \mathscr{B}_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n}. \tag{3в}$$

Здесь $I_{(n)jk}$ — *фактор момента инерции для n-й нормальной моды*:

$$I_{(n)jk} = \int -(\rho u_n{}^{\ell})_{,\ell}\, x^j x^k \, d^3x = \int \rho \,(u_n{}^j x^k + u_n{}^k x^j)\, d^3x \tag{4}$$

(размерности: $[I_{jk}] = [\text{масса} \times \text{длина}] \times [\mathscr{B}_n]$ (длина)).

Соответствующий *приведенный квадрупольный фактор для n-й нормальной моды* равен

$$\mathfrak{I}_{(n)jk} \equiv I_{(n)jk} - \frac{1}{3} I_{n\ell}{}^{\ell} \delta_{jk}. \tag{5}$$

Б. Поперечные сечения для детектора (упражнение 37.10)

1. Для *поляризованного излучения*, распространяющегося в направлении $\boldsymbol{n}$ и имеющего тензор поляризации $\mathbf{e}$,

$$h_{jk} = A(t - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\, e_{jk},$$
$$e_{jk}n_k = 0, \quad e_{jj} = 0, \quad e_{jk}e_{jk} = 2; \tag{6}$$

$$\sigma_n(\nu) = \sigma_n(\omega/2\pi) = \frac{\pi}{4} \frac{|\mathfrak{I}_{(n)jk}e_{jk}|^2}{M} \frac{\omega_n^2/\tau_n}{(|\omega| - \omega_n)^2 + (1/2\tau_n)^2}, \tag{7а}$$

$$\int\limits_{\text{резонанс}} \sigma_n \, d\nu = \frac{\pi}{4} \frac{|\mathfrak{I}_{(n)jk}e_{jk}|^2}{M} \omega_n^2. \tag{7б}$$

2. Для *неполяризованного излучения* (хаотической смеси поляризаций) с направлением распространения $\boldsymbol{n}$ поперечные сечения равны

$$\sigma_n(\nu) = \sigma_n(\omega/2\pi) = \frac{\pi}{4} \frac{(\mathfrak{I}^{TT}_{(n)jk})^2}{M} \frac{\omega_n^2/\tau_n}{(|\omega| - \omega_n)^2 + (1/2\tau_n)^2}, \tag{8а}$$

$$\int\limits_{\text{резонанс}} \sigma_n \, d\nu = \frac{\pi}{4} \frac{(\mathfrak{I}^{TT}_{(n)jk})^2}{M} \omega_n^2. \tag{8б}$$

Здесь $I^{TT}_{(n)jk}$ — поперечная бесследовая часть $I_{(n)jk}$ (поперечная и бесследовая по отношению к направлению распространения $\boldsymbol{n}$):

$$I^{TT}_{(n)} = PI_{(n)}P - \frac{1}{2}P\,\mathrm{Sp}\,(PI_{(n)}), \quad P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k \tag{9}$$

(см. дополнение 36.1).

3. Поперечные сечения для *неполяризованного усредненного по всем направлениям излучения* равны

$$\langle \sigma_n(\nu)\rangle_{\text{по всем направл}} = \frac{1}{2}\pi\lambda^2 \frac{A_{GW}A_{\text{дисс}}}{(|\omega|-\omega_n)^2 + (A_{\text{дисс}}/2)^2}, \tag{10а}$$

$$\int\limits_{\text{резонанс}} \langle \sigma_n\rangle_{\text{по всем направл}}\, d\nu = \frac{1}{2}\pi\lambda^2 A_{GW}, \tag{10б}$$

где коэффициенты Эйнштейна A равны

$$A_{\text{дисс}} = 1/\tau_n, \tag{11}$$

$$A_{GW} = \frac{1}{5}\frac{(I_{(n)jk})^2}{M}\,\omega_n^4. \tag{12}$$

В. Спектр, излучаемый непериодическим источником (упражнение 37.11)

Поучительно сравнить эти формулы с выражениями для излучения, испущенного непериодическим источником.

1. Фурье-образ приведенного квадрупольного фактора источника равен

$$I_{jk}(t) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}_{jk}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

2. Тогда полная энергия на единицу частоты ($\nu \geqslant 0$), излученная за все время в единичный телесный угол в направлении $\boldsymbol{n}$ с поляризацией $\mathbf{e}$, равна

$$\frac{dE}{d\nu\, d\Omega} = \frac{1}{8}\sum_{\omega=\pm 2\pi\nu} |\tilde{I}_{jk}e_{jk}|^2\,\omega^6 \tag{13а}$$

[ср. с выражениями (7)]. Та же энергия, просуммированная по поляризациям, равна

$$\frac{dE}{d\nu\, d\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{j,\,k} |\tilde{I}^{TT}_{jk}|^2\,\omega^6 \tag{13б}$$

[ср. с выражениями (8)]. Здесь $\nu \geqslant 0$.

3. Полная энергия, излучаемая в единичном интервале частоты, проинтегрированная по всем направлениям при $\nu \geqslant 0$, равна

$$dE/d\nu = \frac{4\pi}{5}\sum_{j,\,k} |\tilde{I}_{jk}|^2\,\omega^6 \tag{14}$$

[ср. с выражениями (10)—(12)].

§ 37.8. ШУМОВЫЕ ДЕТЕКТОРЫ

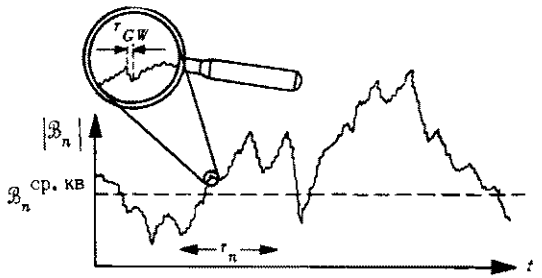
Если спектральная ширина приходящих волн велика по сравнению с резонансной шириной детектора, то полная энергия, отдаваемая детектору волнами, определяется выражением

$$\underset{\text{эрг}}{(\text{полная отдаваемая энергия})} = \int \underset{\text{эрг}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{Гц}^{-1}}{\sigma \mathscr{F}_\nu}\, d\nu = \underset{\text{эрг}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{Гц}^{-1}}{\mathscr{F}_\nu}\ (\nu = \nu_0) \int \underset{\text{см}^2\cdot\text{Гц}}{\sigma}\, d\nu.$$

По крайней мере это действительно так, если детектор радиационно доминированный (т. е. если при воздействии на него волн $E_{\text{колеб}} \gg kT$, другими словами, амплитуда колебаний, создаваемых броуновскими силами, настолько мала, что, складываясь с амплитудой, обусловленной волнами, или вычитаясь из нее, не может существенно на нее повлиять).

Выделение слабого сигнала на фоне сильного шума — общие замечания

К сожалению, в настоящее время (1973 г.) во всех экспериментах мы имеем дело с шумовыми детекторами. Еще никому не удалось найти столь сильные волны или построить настолько чувствительный детектор, чтобы он был радиационно доминированным. Следовательно, главная экспериментальная задача сегодня — выделить слабый сигнал на фоне сильного шума. Для этой цели было разработано большое число методов, использовавшихся в различных областях физики, а также в астрономии, психологии и технике (см., например, работы [273, 274] и цитированную там литературу). Основной вопрос всегда состоит в том, чтобы найти некоторую характеристику сигнала, статистически более заметную, чем аналогичная характеристика шума, и найти корреляцию, показывающую, что данное свойство сигнала обусловлено ожидаемым источником, а не какой-то другой причиной («исключение систематической ошибки»). Так, для детектирования стационарных гравитационных волн от пульсара можно попытаться определить с большой точностью два числа $\langle N^2 \rangle$ и $\langle (N^2 + S^2) \rangle = \langle N^2 \rangle + \langle S^2 \rangle$, где N и S — амплитуды шума и сигнала соответственно. Продолжительная серия наблюдений (когда пульсар находится вне лепестка диаграммы направленности антенны) дает величину $\langle N^2 \rangle$. Другая столь же продолжительная серия наблюдений, чередующихся с наблюдениями первой серии, в нулевом приближении должна давать ту же величину $\langle N^2 \rangle$. В следующем приближении мы обнаруживаем и вычисляем влияние нормальных статистических флуктуаций. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Теория, проверенная статистическими испытаниями других параметров, получаемых из тех же данных, гарантирует на 95%, что флуктуации меньше $10^{-5}\langle N^2 \rangle$ (вероятность, что флуктуации превышают $10^{-5}\langle N^2 \rangle$, составляет 5%; этот предел налагается временем и затратами, а не какими-либо абсолютными физическими ограничениями). Пусть вторая серия наблюдений проводится лишь в то время, когда пульсар



ФИГ. 37.5.
Детектирование гравитационных волн, действие которых «подобно удару молотка», с помощью шумового детектора. Возможно детектирование даже очень слабого импульса, если этот импульс достаточно короткий. Амплитуда колебаний детектора $\mathscr{B}_n$ изменяется за время Δt на величину $\sim \mathscr{B}_n^{\text{ср. кв}} (\Delta t/\tau_n)^{1/2}$ за счет тепловых флуктуаций (случайное блуждание, хаотические броуновские силы). На вставке изображено изменение амплитуды, вызванное всплеском гравитационных волн длительностью τ_{GW}, приходящим не в фазе с тепловыми движениями в детекторе. Волны обнаружимы, так как

$$\Delta\,|\,\mathscr{B}_n\,|_{\text{за счет волн}} \gg \mathscr{B}_n^{\text{ср. кв}} (\tau_{GW}/\tau_n)^{1/2},$$

несмотря на то, что $\Delta\,|\,\mathscr{B}_n\,| \ll \mathscr{B}_n^{\text{ср. кв}}$.

попадает в лепесток диаграммы направленности антенны. Пусть эти наблюдения дают

$$\{\langle N^2\rangle + \langle S^2\rangle\}_{\text{2 серия}} = (1 + 7{,}3\cdot 10^{-5})\,\{\langle N^2\rangle\}_{\text{1 серия}}.$$

Тогда в первом приближении можно гарантировать на 95%, что $\langle S^2\rangle$ лежит в пределах $(7{,}3 \pm 1{,}0)\cdot 10^{-5}\langle N^2\rangle$.

Скорость изменения амплитуды детектора как средство выделения короткого сигнала на фоне теплового шума

Многие предполагаемые источники гравитационного излучения создают всплески, а не стационарный уровень сигнала (фиг. 37.5). Поэтому возникает вопрос. Какие характерные свойства излучения, воздействующего на детектор «подобно удару молотка» ($\tau_{GW} \ll \tau_0$), позволяют выделить это излучение на фоне шума? Шум детектора, связанный с «броуновским движением», можно представлять себе как результат большого числа актов обмена малыми порциями энергии между молекулами и тепловой баней. Приводимые ниже вычисления позволяют оценить типичную скорость изменений амплитуды, вызываемую сериями таких молекулярных «толчков» в детекторе, а также сравнить эту скорость с быстрыми изменениями амплитуды под действием импульса, «подобного удару молотка». Вычисления показывают, что обусловленные тепловым движением внезапные скачки даже очень малой амплитуды происходят крайне редко. Поэтому внезапные изменения являются характерной чертой, на которую следует обратить внимание при наблюдениях. Однако реальное детектирование импульсов требует более всестороннего анализа, который

выходит за рамки делаемых ниже оценок. В такой анализ входит вычисление вероятностей, с которыми эти редкие и случайные события (резкие изменения амплитуды, обусловленные тепловыми флуктуациями) происходят в заданный промежуток времени, вычисление еще меньших вероятностей совпадения подобных событий в двух или более детекторах и, наконец, расчет корреляций с предполагаемыми источниками.

Рассмотрим резонансный детектор типа описанного в дополнении 37.4. Но проанализируем его для случая, когда он *не является* радиационно доминированным. Тогда движения в нем обусловлены внутренними броуновскими силами (тепловыми флуктуациями), а, возможно, также случайными всплесками гравитационных волн. Сосредоточим внимание на определенной нормальной моде (моде n) и опишем вклад этой моды в колебание детектора с помощью векторного поля

$$\delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} = \mathscr{B}_n(t)\, e^{-i\omega_n t} \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}). \tag{37.47}$$

Описание теплового шума в резонансном детекторе

Поскольку величина $\boldsymbol{u}_n$ безразмерна и ее среднее значение равно единице $\left(\int \rho \boldsymbol{u}_n^2\, d^3x = M\right)$, комплексное число $\mathscr{B}_n(t)$ представляет собой среднее от амплитуд движения отдельных элементов массы детектора, взвешенное по массе. В результате воздействия броуновских сил эта амплитуда медленно меняется со временем (скорость изменения много меньше ω_n), но после усреднения по времени она соответствует колебательной энергии kT:

$$\langle E_{\text{колеб}} \rangle = 2\left\langle \frac{1}{2}\int \rho \dot{\xi}^2\, d^3x \right\rangle = \frac{1}{2} M\omega_n^2 \langle |\mathscr{B}_n|^2 \rangle = kT, \tag{37.48}$$

т. е.

$$\mathscr{B}_n^{\text{ср. кв}} \equiv \langle |\mathscr{B}_n|^2 \rangle^{1/2} = (2kT/M\omega_n^2)^{1/2}. \tag{37.49}$$

Пример: для веберовского детектора ($M \sim 10^3$ кг, $\omega_0 \sim 10^4$ Гц) основная мода при комнатной температуре имеет

$$\mathscr{B}_0^{\text{ср. кв}} = \left(\frac{2\cdot 1,\ 38\cdot 10^{-16}\cdot 300 \text{ эрг}}{10^6 \text{ г}\cdot 10^8 \text{ с}^{-2}}\right)^{1/2} = 3\cdot 10^{-14} \text{ см}. \tag{37.50}$$

Наши надежды на детектирование слабого излучения, действие которого «подобно удару молотка», мы связываем с исследованием не амплитуды колебаний детектора (или энергии), а скорости ее изменения (фиг. 37.5). Характерный масштаб времени для больших броуновских флуктуаций амплитуды ($|\Delta \mathscr{B}_n| \sim \mathscr{B}_n^{\text{ср. кв}}$) для шумового детектора тот же самый, что и масштаб времени τ_n для затухания колебаний детектора под действием внутренних сил, если он возбуждается до $E_{\text{колеб}} \gg kT$. Таким образом, *амплитуда $\mathscr{B}_n$ совершает «случайные блуждания» под действием броуновских сил со средним временем «больших блужданий»*

($|\Delta\mathscr{B}_n| \sim \mathscr{B}_n^{\text{ср. кв}}$), *равным* $\Delta t \approx \tau_n$. Изменение $\mathscr{B}_n$ за более короткие промежутки времени Δt меньше на множитель $1/\sqrt{N}$, который всегда фигурирует в таких процессах

$$\sqrt{N} = \left(\frac{\text{число колебаний за время } \tau_n}{\text{число колебаний за время } \Delta t}\right)^{1/2} = \left(\frac{\tau_n}{\Delta t}\right)^{1/2}, \tag{37.51}$$

$$\langle|\Delta\mathscr{B}_n^{(\text{тепл})}|\rangle \approx \mathscr{B}_0^{\text{ср. кв}}\left(\frac{\Delta t}{\tau_n}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{2kT}{M\omega_n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\Delta t}{\tau_n}\right)^{1/2} \text{ в течение времени } \Delta t\ ^1). \tag{37.52}$$

Воздействие всплеска волн на шумовой резонансный детектор

Предположим теперь, что излучение, воздействующее на детектор «подобно удару молотка» (всплеск продолжительностью $\Delta t = \tau_{GW} \ll \tau_n$), изменяет его амплитуду на величину $\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}$. Это изменение амплитуды, поскольку оно происходит столь быстро, 1) линейно накладывается на изменение амплитуды, создаваемое за тот же интервал времени действием броуновских сил, и 2) следовательно, его величина не зависит от того, присутствуют или отсутствуют броуновские силы, т. е. не зависит от теплового движения. Поэтому $\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}$ (величина, характеризуемая как абсолютной величиной, *так и* фазой!) имеет то же значение, которое она имела бы при температуре детектора, равной нулю:

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\omega_n^2|\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}|^2}_{\substack{\text{энергия, отдаваемая детектору, при температуре, равной нулю}}} = \int \sigma_n(\nu)\,\mathscr{F}_\nu(\nu)\,d\nu = \mathscr{F}_\nu(\omega_n/2\pi)\int \sigma_n(\nu)\,d\nu,$$

↑ для излучения, воздействующего на детектор «подобно удару молотка», спектральная ширина излучения всегда $\gg$ ширины полосы детектора, см. дополнение 37.4

т. е.

$$|\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}| = \left(\frac{2\mathscr{F}_\nu(\omega_n/2\pi)\int\sigma_n\,d\nu}{M\omega_n^2}\right)^{1/2}. \tag{37.53}$$

Это изменение амплитуды, вызванное волной, будет отличимо от тепловых флуктуаций лишь в том случае, если оно существенно

---

[1]) Более полный вывод и обсуждение формулы (37.52) см., например, в работе [275]. В этой работе отражены два ключевых момента: 1) статистическая трактовка формулы, описывающей вероятность того, что за время Δt амплитуда от заданного начального значения изменится на заданную величину, и 2) квантовомеханические поправки, начинающие играть роль в пределе $\tau_n \to \infty$, но не существенные для детекторов начала 70-х годов. [В создаваемой в настоящее время (1975 г.) серии новых детекторов эти эффекты начинают сказываться. См., например, [497].— *Прим. ред.*]

больше тепловых флуктуаций (37.52), ожидаемых в течение того же интервала времени τ_{GW}:

Критерии детектируемости всплеска

$$\left.\begin{array}{l} |\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}| \gg \langle |\Delta\mathscr{B}_n^{\text{тепл}}| \rangle \text{ в течение времени } \tau_{GW}, \\ \text{или} \\ F_\nu(\omega_n/2\pi) \gg \left(\dfrac{kT}{\int \sigma_n\, d\nu}\right)\left(\dfrac{\tau_{GW}}{\tau_n}\right) \end{array}\right\} \text{критерии обнаружимости.} \quad (37.54)$$

Конечно, если мы располагаем оборудованием, которое пригодно для измерения только абсолютной величины амплитуды или энергии, но не пригодно для измерения фазы, то эти критерии обнаружимости недостаточны. Вызванное волной изменение квадрата амплитуды (пропорциональное изменению энергии) зависит от соотношения фаз начальной амплитуды и изменения амплитуды:

$$\Delta|\mathscr{B}_n|^2 = |\mathscr{B}_n^{(\text{нач})} + \Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}|^2 - |\mathscr{B}_n^{(\text{нач})}|^2 \approx$$

$$\approx \begin{cases} 2|\mathscr{B}_n^{(\text{нач})}||\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}|, & \text{если они в фазе,} \\ 0 & \text{при различии фаз на } \pm\pi/2, \\ -2|\mathscr{B}_n^{(\text{нач})}||\Delta\mathscr{B}_n^{(GW)}| & \text{при различии фаз на } \pi. \end{cases} \quad (37.55)$$

Таким образом, может быть измерен лишь тот всплеск, который приходит в фазе или в противофазе с начальной амплитудой колебания детектора, а для подобного всплеска критерии (37.54) достаточны.

Способы увеличения чувствительности детектора

Из неравенств (37.54) становится ясно, что *существуют три способа увеличения чувствительности колебательных детекторов к коротким всплескам гравитационного излучения*: 1) *увеличение интегрального поперечного сечения детектора* [*что может быть сделано лишь посредством увеличения скорости* A_{GW}, *с которой детектор переизлучает гравитационные волны*; см. (10б) и (11б) в дополнении 37.4], 2) *охлаждение детектора*, 3) *увеличение времени релаксации детектора*.

В дополнении 37.5 указанные выше критерии обнаружимости применяются к некоторым детекторам, которые, по-видимому, могут быть построены в 70-х годах, а также к некоторым всплескам излучения, которые предсказываются теорией. Выводы, делаемые из такого сопоставления, являются обнадеживающими!

Для полноты изложения следовало бы рассмотреть не только шум в детекторе, но также и шум в датчике, используемом для измерения амплитуды смещений детектора. Однако теория датчиков смещения выходит за рамки этой книги. Краткое обсуждение этого вопроса и ссылки на литературу см. в работе [240].

Дополнение 37.5. ДЕТЕКТИРУЕМОСТЬ ВСПЛЕСКОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, ПРИХОДЯЩИХ ОТ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ: ДВА ПРИМЕРА [1])

А. Волны от звезды в десять солнечных масс, коллапсирующей с образованием черной дыры; детектор 1972 г. с датчиком 1975 г. (?)

1. Предсказываемые характеристики излучения:

$$(\text{интенсивность у Земли}) = \mathscr{F}_\nu \sim \frac{M_\odot}{4\pi\ (\text{расстояние})^2\ \nu} \sim$$

$$\sim [2\cdot 10^5\ \text{эрг}/(\text{см}^2\cdot\text{Гц})]\ [(\text{расстояние до центра галактики})/(\text{расстояние})]^2,$$

$(\text{частота волн}) = \nu \sim 10^3$ Гц,
$(\text{спектральная ширина волн}) = \Delta\nu \sim 10^3$ Гц.
$(\text{продолжительность всплеска}) = \tau_{GW} \sim 10^{-3} - 10^{-1}$ с.

2. Детектор: веберовская болванка, колеблющаяся на основной моде,

$$M = 10^6\ \text{г}, \quad \int \sigma\, d\nu = 10^{-21}\ \text{см}^2\cdot\text{Гц}\ \text{(упражнение 37.13)},$$

$$\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1660\ \text{Гц}, \quad T = 3\ \text{К (температура жидкого гелия)},$$

$$\tau_0 = 20\ \text{с},$$

$$\mathscr{B}_0^{\text{ср.кв}} = \frac{2\cdot 1{,}37\cdot 10^{-16}\cdot 3\ \text{эрг}}{10^6\ \text{г}\cdot 10^8\ \text{с}^{-2}} = 3\cdot 10^{-15}\ \text{см},$$

$|\Delta\mathscr{B}_0^{(\text{тепл})}| = (3\cdot 10^{-15}\ \text{см})\ (10^{-3}/20)^{1/2} = 2\cdot 10^{-17}$ см в течение $\Delta t = 10^{-3}$ с,

$|\Delta\mathscr{B}_0^{(\text{тепл})}| = 2\cdot 10^{-16}$ см в течение $\Delta t = 0{,}1$ с.

3. Действие волн [выражение (37.53)]:

$$\Delta\mathscr{B}_0^{(GW)} = \left(\frac{2\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^{-21}\ \text{эрг}}{10^6\cdot 10^8\ \text{с}^{-2}}\right)^{1/2}\left(\frac{\text{расстояние до центра Галактики}}{\text{расстояние}}\right) =$$

$$= 2\cdot 10^{-15}\ \text{см}\left(\frac{\text{расстояние до центра Галактики}}{\text{расстояние}}\right).$$

4. *Вывод.* Гравитационные волны, испускаемые массивной звездой, коллапсирующей с образованием черной дыры в любом месте нашей Галактики, легко поддаются детектированию, *если* мы построим «датчик», способный измерять изменения амплитуды колебаний на величину $\lesssim 10^{-15}$ см за характерное время $< 0{,}1$ с. По-видимому, это осуществимо при уровне техники 1972 г.; см. [240].

Б. Волны от взрыва сверхновой в скоплении галактик Девы; детектор, который, возможно, будет построен в конце 70-х — начале 80-х годов

1. Предсказываемые характеристики излучения:

$$(\text{интенсивность у Земли}) = F_\nu \sim \frac{0{,}03 M_\odot}{4\pi\,(11\ \text{Мпс})^2\,\nu} \sim 4\cdot 10^{-3}\ \text{эрг}/(\text{см}^2\cdot\text{Гц}),$$

[1]) Вычисления проводятся с точностью до порядка величины или близкой к этому.

(частота волн) $= \nu \sim 10^3$ Гц,
(спектральная ширина волн) $\sim \nu \sim 10^3$ Гц,
(продолжительность всплеска) $= \tau_{GW} \sim 0{,}3$ с или $\tau_{GW} \sim 2 \cdot 10^{-3}$ с [1]).

2. Детектор: веберовская болванка, но изготовленная не из металла, а из монокристалла кварца весом 1000 кг и охлажденная до температуры $3 \cdot 10^{-3}$ К. (Предполагается, что для такого монокристалла время затухания возрастет обратно пропорционально температуре, по-видимому, $\tau_0 \sim 1/T$.) По оценкам свойства этого детектора таковы:

$M \sim 10^6$ г, $\int \sigma \, d\nu = 10^{-21}$ см^2·Гц (как для веберовской болванки),

$\nu_0 = \omega_0/2\pi \sim 1500$ Гц, $T = 3 \cdot 10^{-3}$ К,

$\tau_0 \sim 10^6$ с,

$$\mathscr{B}_0^{\text{ср. кв}} = \left(\frac{2 \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ эрг}}{10^6 \text{ г} \cdot 10^8 \text{ с}^{-2}} \right)^{1/2} = 1 \cdot 10^{-16} \text{ см},$$

$$|\Delta \mathscr{B}_0^{(\text{тепл})}| = (1 \cdot 10^{-16} \text{ см}) \left(\frac{0{,}3 \text{ или } 2 \cdot 10^{-3}}{10^6} \right)^{1/2} = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-20} \text{ см} \\ \text{или} \\ 5 \cdot 10^{-21} \text{ см}. \end{cases}$$

3. Действие волн [выражение (37.53)]:

$$|\Delta \mathscr{B}_0^{(GW)}| = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-21} \text{ эрг}}{10^6 \cdot 10^8 \text{ с}^{-2}} \right)^{1/2} = 3 \cdot 10^{-19} \text{ см}.$$

4. *Вывод.* Гравитационные волны от сверхновой в скоплении Девы обнаружимы, если мы построим датчик, способный измерять изменения амплитуды колебаний $\lesssim 10^{-19}$ см за характерное время $\lesssim 0{,}1$ с, и детектор с указанными выше характеристиками.

§ 37.9. НЕМЕХАНИЧЕСКИЕ ДЕТЕКТОРЫ

Немеханические детекторы

Когда гравитационные волны проходят через вещество, они приводят вещество в движение. Подобные возбуждения вещества лежат в основе всех описанных до сих пор детекторов. Но гравитационные волны взаимодействуют не только с веществом; они взаимодействуют также с электромагнитными полями, и это взаимодействие может быть использовано в детекторах. Одним из наиболее перспективных детекторов, который может быть применен в будущем, является детектор, предложенный Брагинским и Менским [276]; он основан на резонансном взаимодействии между гравитационными и электромагнитными волнами. Этот детектор описан в дополнении 37.6.

---

[1]) Для продолжительности волн от взрыва сверхновой, по-видимому, характерны два временны́х масштаба: 1) время, необходимое для сжатия на заключительных стадиях коллапса от ядра белого карлика к нейтронной звезде или к «блину» в виде нейтронной звезды $\tau \sim$ (размеры нейтронной звезды)/(скорость звука в ядерной материи) $\sim (2 \cdot 10^{-3}$ с) («импульс гравитационного излучения»), и 2) время, необходимое для затухания осцилляций нейтронной звезды за счет гравитационного излучения («затухающий волновой цуг»), $\tau \sim 0{,}3$ с.

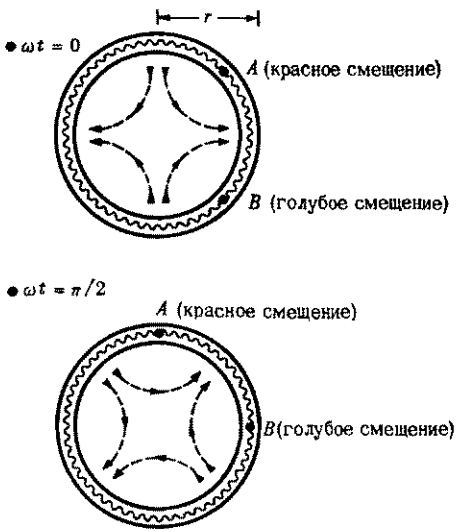
Дополнение 37.6. НЕМЕХАНИЧЕСКИЙ ДЕТЕКТОР ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН [276]

Основная идея

Монохроматический луч электромагнитных волн распространяется по кругу в тороидальном волноводе (см. рисунок). Гравитационные волны распространяются

ω = (угловая частота гравитационных волн) = (скорость изменения фазы волны со временем) = (удвоенная угловая скорость вращения картины «силовых линий»). r = (радиус тора) подбирается в соответствии со скоростью распространения электромагнитных волн в волноводе, так что $v = \frac{1}{2}\omega r$.

(Электромагнитные волны распространяются против часовой стрелки; диаграмма гравитационных силовых линий тоже вращается против часовой стрелки; они все время находятся в фазе друг с другом.)



перпендикулярно плоскости тора. Если время оборота для электромагнитных волн равно удвоенному периоду гравитационных волн, то одна из поляризованных по кругу компонент гравитационных волн будет все время оставаться в фазе с бегущими электромагнитными волнами. В результате возникает резонанс. В одной области луча электромагнитных волн гравитационные приливные силы все время «тянут» эти волны вперед (*голубое смещение*!), а в другой области — все время назад (*красное смещение*!). Разность частот электромагнитных волн растет линейно во времени, а разность фаз нарастает квадратично.

Качественный анализ

1. Пусть волновод находится в состоянии свободного падения на земной орбите. Выберем ориентацию осей собственной системы отсчета волновода (совпадающей с локально лоренцевой системой) так, чтобы 1) волновод лежал в плоскости $\hat{x}$, $\hat{y}$ и 2) гравитационные волны распространялись в направлении $\hat{z}$.
2. Пусть гравитационные волны имеют амплитуды

$$A_+ - iA_\times = \mathcal{A} e^{-i\omega(t-z)}. \qquad (1)$$

(Напомним: $\hat{t} \approx t$, $\hat{z} \approx z$, т. е. собственная система координат и ТТ-координаты почти совпадают друг с другом.) Тогда в плоскости волновода ($z = 0$)

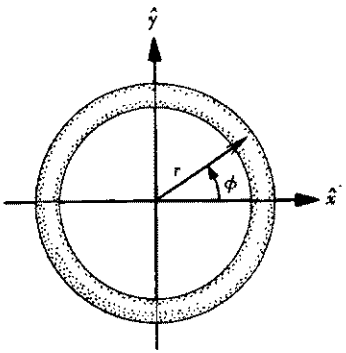
$$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = \frac{1}{2}\omega^2 \mathcal{A} \cos(\omega t),$$
$$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = R_{\hat{y}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = \frac{1}{2}\omega^2 \mathcal{A} \sin(\omega t). \qquad (2)$$

3. Рассмотрим две соседние части электромагнитной волны: одна при $\phi = \alpha + {}^1/_2\omega t$ и другая при $\phi = \alpha + \delta\alpha - {}^1/_2\omega t$. Представим их себе в виде фотонов. Каждый из них движется по нулевой геодезической, если не учитывать дефекты проводимости волновода. Поэтому их волновые векторы $\mathbf{k}$ удовлетворяют соотношению

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} = \text{(отклоняющее «ускорение» волновода)}, \qquad (3)$$

и разность $\delta\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{k}$ двух волновых векторов двух частей волны (измеренная с помощью параллельного переноса) удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\mathbf{k}}\delta\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{k}}\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{k} = [\nabla_{\mathbf{k}}, \nabla_{\mathbf{n}}]\,\mathbf{k} + \nabla_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} =$$
$$= \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{n}) + \underbrace{\nabla_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k}}_{\text{отклоняющее ускорение волновода}}. \qquad (4)$$



$\mathbf{n}$ = (вектор, соединяющий фотоны) = $= r\delta\alpha\,(-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y)$

Волновод влияет на направление распространения волн, но не на их частоту. Таким образом, только $\mathbf{R}$ входит в нулевую компоненту приведенного выше уравнения:

$$k^{\hat{\alpha}}\delta k^{\hat{0}}{}_{,\hat{\alpha}} = R^{\hat{0}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\nu}} k^{\hat{\alpha}} k^{\hat{\beta}} n^{\hat{\nu}}. \qquad (5)$$

4. Пусть $k^{\hat{0}} = \omega_e$ — угловая частота электромагнитной волны. Направление пространственной компоненты $\boldsymbol{k}$ 4-вектора распространения совпадает с направлением чисто пространственного вектора $\mathbf{n}$; поэтому

$$k^{\hat{0}} = \omega_e, \qquad \boldsymbol{k} = (v\omega_e / r\delta\alpha)\,\boldsymbol{n}, \qquad n^{\hat{0}} = 0. \qquad (6)$$

Воспользуемся этими соотношениями, чтобы переписать уравнение (5) в виде

$$(d\delta\omega_e/d\hat{t})_{\text{движ. вместе с фотонами}} = (v\omega_e / r\delta\alpha)\,R^{\hat{0}}{}_{\hat{i}\hat{0}\hat{j}} n^{\hat{i}} n^{\hat{j}}. \qquad (7)$$

5. Комбинируя выражение для $\mathbf{n}$ на пространственно-временной диаграмме с уравнениями (2) и (7) и с мировой линией фотонов $\phi = \alpha + {}^1/_2\omega t$, получаем

$$(d\,\delta\omega_e/d\hat{t})_{\text{движ. вместе с фотонами}} = -\frac{1}{2} v\omega_e\omega^2 \mathcal{A} r\,(\cos 2\alpha)\,\delta\alpha. \qquad (8)$$

6. Интегрируя по времени и по α, получаем

$$\omega_e = \omega_{e0}\left[1 - \frac{1}{4}\mathcal{A}v\,(\sin 2\alpha)\,(\omega r)\,(\omega t)\right]. \tag{9}$$

§ 37.10. ЗАГЛЯДЫВАЯ В БУДУЩЕЕ

Будущее гравитационно-волновой астрономии

Когда пишется эта книга, еще совсем не ясно, действительно ли экспериментальные результаты Джозефа Вебера представляют собой истинное детектирование гравитационных волн (см. § 37.4, раздел 4). Но так или иначе гравитационно-волновая астрономия началась, и у нее, по-видимому, блестящее будущее. Уровень техники 1973 г. представляется достаточным для создания детекторов, которые могли бы регистрировать гравитационное излучение от звезды, коллапсирующей с образованием черной дыры в любом месте нашей Галактики (дополнение 37.5), а детекторы конца 70-х — начала 80-х годов, возможно, будут регистрировать волны от пульсаров и от сверхновых в других галактиках. Технические трудности, которые предстоит преодолеть, чтобы построить подобные детекторы, огромны. Но физики изобретательны; если учесть воодушевление, вызванное пионерской работой Вебера, и поддержку людей самых разных профессий, искренне заинтересованных в научных поисках, то не остается сомнений, что все трудности будут преодолены.

ЧАСТЬ IX

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В которой читатель, прельщаемый гаремом очаровательных теорий гравитации (и некоторых не таких уж очаровательных), спасается от своих безрассудных страстей благодаря множеству экспериментов и остается верным своей преданной супруге Геометродинамике, клянется вести впредь честную жизнь и становится истинно верующим.

38. ПРОВЕРКА ОСНОВ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Provando e riprovando
(Подтверди одно и опровергни другое)

ГАЛИЛЕЙ

§ 38.1. ПРОВЕРКУ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ПРОВОДИТЬ ЛЕГЧЕ, ЧЕМ В УДАЛЕННОМ КОСМОСЕ

В первые полвека своего существования общая теория относительности была раем для теоретиков и адом для экспериментаторов. Нельзя было представить себе теорию, более прекрасную, но в то же время с таким трудом поддающуюся проверке.

Но ситуация изменилась. За последние несколько лет общая теория относительности превратилась в одну из наиболее оживленных и плодотворных областей экспериментальной физики. Спустя полвека развитие техники наконец-то достигло уровня эйнштейновского гения — не только в области астрономии, но и в лабораторных экспериментах.

Четкие тесты ОТО в настоящее время ограничены рамками Солнечной системы

В области астрономии наблюдатели ищут и изучают те явления, в которых теория относительности играет важную роль; к ним относятся космология, пульсары, квазары, гравитационные волны, черные дыры. К сожалению, в пульсарах и квазарах, в источниках космологического излучения и гравитационных волн гравитационные эффекты тесно переплетаются с локальной гидродинамикой и с локальной физикой плазмы. Мало надежды выделить несколько эффектов настолько отчетливо, чтобы в чистом виде выявить сущность гравитации. Вместо этого астрофизики должны применять законы гравитации в своих вычислениях наряду с другими законами физики и наряду с данными наблюдений, и в итоге они должны пытаться извлечь информацию о поведении вещества и полей в далеких объектах.

Таким образом, для проверки общей теории относительности (ОТО) в чистом виде мы обращаемся к лабораторным эксперимен-

там, но в наше время понятие «лаборатория» куда шире, чем раньше: эта лаборатория включает в себя всю Солнечную систему.

Технические возможности 70-х годов

В Солнечной системе релятивистские эффекты малы. Но несмотря на это, некоторые из них уже в 70-х годах можно измерить с точностью 10^{-3} от полной величины этих эффектов или даже лучше (см. дополнение 38.1).

Дополнение 38.1. СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕХНИКИ 70-Х ГОДОВ

Измеряемая величина	Величина релятивистских эффектов	Точность однодневного измерения в начале 70-х годов
Угловое расстояние между двумя источниками на небе	Отклонение лучей света от звезд под действием Солнца: 1) если луч света касается края Солнца, 1″,75 2) если луч света приходит перпендикулярно линии Земля—Солнце, 0″.004	а. Точность, даваемая оптическим телескопом, $\sim 1''$ б. Угловое расстояние между двумя квазарами, измеренное с помощью радиотелескопа (разностное измерение изо дня в день, а не абсолютное измерение): в 1970 г. $\sim 0'',1$, в середине 70-х годов $\sim 0'',001$
Расстояние между двумя телами в Солнечной системе	а. Смещение перигелия за год: 1) для Меркурия 120 км, 2) для Марса 15 км б. Релятивистская временная задержка для радиоволн, проходящих мимо Солнечного диска от Земли до Венеры (в один конец) $1 \cdot 10^{-4}$ с = 30 км в. Периодические релятивистские эффекты, влияющие на расстояние между Землей и Луной: 1) в ОТО 100 см, 2) в теории Йордана—Бранса—Дикке 100 см; $(840 \text{ см})/(2+\omega)$	а. Расстояние между другими планетами (Меркурий, Венера, Марс) и Землей, измеряемое с помощью отраженного от другой планеты сигнала радара $\sim 0{,}3$ км б. Расстояние от Земли до радиопередатчика (расположенного на другой планете или на космическом корабле), измеренное по времени распространения радиоволн туда и обратно, $3 \cdot 10^{-8}$ с = = 10 м = 0,01 км в. Расстояние между Землей и Луной, измеренное с помощью лазеров, ~ 10 см
Разница в промежутках собственного времени между двумя мировыми линиями в Солнечной системе	а. Часы на Земле и синхронизированные часы на орбите вокруг Земли $\Delta t/t \sim 6 \cdot 10^{-10}$ б. Часы на Земле и часы, расположенные на орбите вокруг Солнца, $\Delta t/t \sim 10^{-8}$	Стабильность водородных мазерных часов $\Delta t/t \sim 10^{-13}$ для t до одного года

§ 38.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕСТОВ ОТО

В настоящее время возможно большое число экспериментов по проверке общей теории относительности. Но большинство из них являются очень дорогими. Для этих экспериментов нужны атомные часы, установленные на космическом корабле, радиолокаторы, осуществляющие локацию планет, радиомаяки и импульс-

ные повторители, лежащие на планетах или движущиеся по орбитам вокруг них, и т. д. Вследствие больших затрат очень важно иметь как можно лучшую теоретическую систему для сопоставления величин, измеренных в различных экспериментах, и для предложения новых экспериментов, которые могли остаться до этого незамеченными.

Теоретические системы для анализа гравитационных экспериментов:

Такая теоретическая система должна выходить за рамки общей теории относительности. Она должна тщательно проанализировать основы эйнштейновской теории. Она должна сравнить эту теорию с другими жизнеспособными теориями гравитации, чтобы выяснить, с помощью каких экспериментов можно сделать выбор между ними. Она должна быть «теорией теорий».

1) теоретическая система Дикке

В настоящее время (1973 г.) широко используются две различные системы [1]). Одна из них, построенная в основном Дикке [277], не делает почти никаких предположений о природе гравитации. Она используется для проектирования и обсуждения экспериментов по исследованию природы пространства-времени и гравитации на весьма фундаментальном уровне. В рамках этой системы задаются, например, такие вопросы: все ли тела под действием гравитации имеют одно и то же ускорение? Является ли пространство по своим внутренним свойствам локально изотропным? Какие теоретические следствия вытекают из локальной изотропии? Имеются ли какие-то типы полей, связанные с гравитацией, и каковы они: скалярные, векторные, тензорные или афинные? Хотя некоторые эксперименты, связанные с этими вопросами, обсуждаются ниже, в этой книге мы не будем пытаться продемонстрировать теоретическую систему Дикке во всех деталях.

2) ППН-система

Второй широко используемой теоретической системой является «параметризованный постньютоновский (ППН) формализм». Он был развит постепенно до все более и более высокого уровня утонченности Эддингтоном [280], Робертсоном [281], Шиффом [282, 283], Нордведтом [284, 285], Виллом [286] и Виллом и Нордведтом [287].

ППН-формализм представляет собой приближение к общей теории относительности, а также к целому ряду других современных теорий гравитации, называемых «метрическими теориями». Он служит хорошим приближением повсюду, где, как и в Солнечной системе, источники поля слабогравитирующие ($|\Phi|/c^2 \ll 1$) и медленно движущиеся ($v^2/c^2 \ll 1$). ППН-формализм включает набор из десяти параметров, значения которых меняются при переходе от одной теории к другой. Эксперименты в Солнечной системе (измерения смещений перигелиев, отклонения света и т. д.) можно рассматривать как попытки измерить некоторые из этих ППН-параметров и определить таким образом, какая

[1]) См. работы [278, 279], где описаны обе системы и дается их сравнение.

из метрических теорий является правильной — общая теория относительности, теория Бранса — Дикке [288] — Йордана [289], одна из скалярно-тензорных теорий Бергмана [290], одна из теорий Нордстрема, теория Уайтхеда [291] или какая-либо другая. (Обзор теорий Нордстрема и Уайтхеда см. в работах [292—294]. О неметрических теориях см. в работах [295, 296].)

В гл. 39 рассматривается понятие метрической теории гравитации и дается построение ППН-формализма; затем в гл. 40 ППН-формализм используется для систематического анализа экспериментов в Солнечной системе и для обсуждения ряда экспериментов в прошлом и будущем, которые позволяют сделать выбор между различными метрическими теориями гравитации. Но сначала, прежде чем приступить к этим вопросам, мы изучим в этой главе эксперименты по проверке основ общей теории относительности — основ, на которые опирается также большинство других метрических теорий. Более подробное обсуждение большей части подобных экспериментов см. в работе [277].

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. В качестве подготовки к ней не требуется никакого предшествующего материала курса 2, но полезна гл. 7 (несовместимость гравитации и специальной теории относительности). Эта глава не обязательна в качестве подготовительного материала для последующих глав, но она окажется полезной при изучении гл. 39 и 40 (другие теории, ППН-формализм, экспериментальная проверка).

§ 38.3. ПРОВЕРКИ ПРИНЦИПА УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ: ЭКСПЕРИМЕНТ ЭТВЕША — ДИККЕ

Одним из фундаментальных блоков, лежащих в основе как теории гравитации Эйнштейна, так и почти всех других современных теорий, является принцип «универсальности свободного падения» [1]): *Мировая линия свободно падающего пробного тела не зависит от его состава или структуры.* Под «пробным телом» понимается электрически нейтральное тело, достаточно малое, чтобы можно было пренебречь 1) его собственной гравитационной энергией, вычисляемой с помощью классической ньютоновской теории, по сравнению с его массой покоя ($M/R \ll 1$) и 2) взаимодействием его мультипольных моментов с неоднородностями гравитационного поля [2]).

[1]) Дикке называет этот принцип «слабым принципом эквивалентности». Мы предпочитаем избегать возможной путаницы с принципом эквивалентности (гл. 16).

[2]) В общей теории относительности часто используется другое определение пробного тела, в котором отсутствует ограничение на собственную гравитационную энергию (отказ от условия 1 при сохранении условия 2). Такое определение в принципе предпочтительней, поскольку теория вещества еще не настолько развита, чтобы решить (и не предлагалось никаких объективных тестов для этого), является ли гравитационная энергия при субъядерных

Универсальность свободного падения позволяет представить пространство-время заполненным множеством кривых, а именно множеством траекторий пробных тел, которые с точностью до параметризации заданы однозначно. Это значит, что через каждое событие по любому времениподобному или нулевому направлению в пространстве-времени проходит одна и только одна траектория пробного тела. Основное требование, предъявляемое к любой теории гравитации, состоит в том, чтобы дать математическое описание этих траекторий.

При переводе на ньютоновский язык универсальность свободного падения означает, что любые два пробных тела в заданном внешнем гравитационном поле должны падать с одинаковым ускорением. При экспериментальных проверках этого принципа пытаются найти различия в ускорении разных тел. В настоящее время наиболее точные эксперименты относятся к типу, разработанному Этвешем (дополнение 38.2), затем усовершенствованному и доведенному до значительно более высокой точности принстонской группой Дикке (дополнение 38.3) и продолженному с модификациями московской группой Брагинского. (Детали экспериментов см. на фиг. 1.6 и в дополнении 1.2.)

Эксперимент Этвеша — Дикке по проверке универсальности свободного падения

Эти эксперименты Этвеша — Дикке являются «нулевыми экспериментами». В них ускорение одного тела балансируется с ускорением другого и после этого ищутся слабые отклонения от равновесия. Причина такого выбора эксперимента проста. Нулевые эксперименты, как правило, обладают намного более высокой точностью, чем эксперименты, измеряющие величину с ненулевым значением.

Этвеш, Пекар и Фекете [297] проверили с относительной точностью $5 \cdot 10^{-9}$, что Земля сообщает одно и то же ускорение дереву, платине, меди, асбесту, воде, сплаву 90% Al с 10% Mg, сульфату меди и маслу. Реннер проверил с относительной точностью $7 \cdot 10^{-10}$ земное ускорение для платины, меди, висмута, латуни, стекла, фторида аммония и сплава 30% Mg с 70% Cu. Дикке и позднее Брагинский предпочли земному ускорению гравитационное ускорение, вызываемое Солнцем, поскольку направление притяжения Солнца изменяется каждые 12 ч и это изменение поддается усилению с помощью резонанса (см. фиг. 1.6). Ролл, Кротков и Дикке [298] сообщили о совпадении солнечных ускорений алю-

---

масштабах малой долей, большой долей или целиком всей массой покоя. Но для наших целей определение, налагающее на пробные тела ограничение $M/R \ll 1$, предпочтительней по двум причинам. Во-первых, большинство теорий гравитации, «конкурирующих» в настоящее время с теорией Эйнштейна, а) согласуется с принципом универсальности свободного падения, если макроскопическая ньютоновская собственная энергия гравитации пренебрежимо мала ($M/R \ll 1$), но б) не согласуется с ним, если необходимо учитывать эту энергию гравитации (§ 40.9). Во-вторых, пробные тела, используемые в эксперименте Этвеша — Дикке, имеют столь малое M/R, что макроскопическая ньютоновская собственная энергия гравитации этих тел в действительности пренебрежимо мала ($M/R \sim E_{\text{грав}}/M \sim 10^{-27}$).

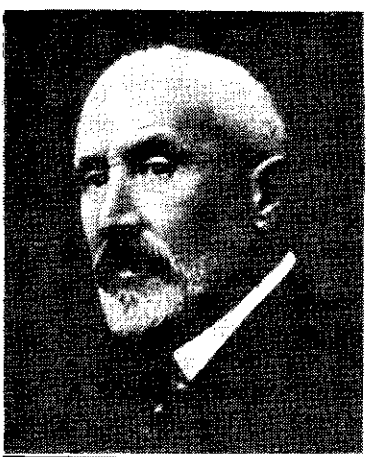
миния и золота с точностью $1 \cdot 10^{-11}$, а Брагинский и Панов [299] — о совпадении солнечных ускорений алюминия и платины с точностью $1 \cdot 10^{-12}$.

Теоретические следствия из эксперимента Этвеша — Дикке

Исходя из этого можно судить о том, как реагируют на гравитационное поле Солнца нейтроны, протоны, электроны, виртуальные электрон-позитронные пары, энергия связи ядра и электростатическая энергия. Золото на 60% состоит из нейтронов, в то время как алюминий — лишь на 50%. Поэтому даже из результатов, полученных в 1964 г., можно сделать вывод, что нейтроны и протоны должны обладать одним и тем же ускорением с точностью $(0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1)^{-1} \cdot 10^{-11} = 10^{-10}$. Аналогично получается, что электроны должны ускоряться так же, как нуклоны, с точностью $2 \cdot 10^{-7}$; виртуальные пары (более многочисленные в золоте, чем в алюминии) должны испытывать то же ускорение с точностью $1 \cdot 10^{-4}$; энергия связи нуклона — с точностью $1 \cdot 10^{-7}$, а электростатическая энергия — с точностью $3 \cdot 10^{-9}$.

Эта точность проверки подтверждает справедливость принципа *универсальности свободного падения*.

Дополнение 38.2. БАРОН ЛОРАНД ФОН ЭТВЕШ
(Будапешт, 27 июля 1848 г. — Будапешт, 8 апреля 1919 г.)



Этвеш учился в Гейдельберге вместе с Кирхгоффом, Гельмгольцем и Бунзеном и в Кенигсберге вместе с Нейманом и Ришело. Его гейдельбергская докторская диссертация была связана с вопросом об относительности: можно ли обнаружить движение источника света относительно «эфира», сравнивая интенсивности света в направлении движения и в противоположном направлении?

Одновременно с этим его исследования в области явлений капиллярности привели к закону Этвеша: (поверхностное натяжение) $\approx 2{,}12\ (T_{\text{кр}} - T)/(\text{удельный объем})^{2/3}$. Став профессором физики в Будапеште в 1872 г., Этвеш начиная с 1886 г. занимается вопросами тяготения. Он разработал и обобщил первоначальный эксперимент Мишелла — Кэвендиша по уравновешиванию момента кручения и измерил с его помощью не только $\Phi_{,xx}$ и $\Phi_{,xy}$ (где Φ — гравитационный потенциал), но также и $\Phi_{,xz}$ и $\Phi_{,yz}$, причем с такой точностью, которая оставалась непревзойденной в течение десятилетий. Он показал, что так называемое «отношение гравитационной и инертной масс» не может изменяться при переходе от одного материала к другому больше чем на $5 \cdot 10^{-9}$. Он исследовал палеомагнетизм кирпичей и других керамических предметов, изучал форму Земли. Он был министром народного просвещения и по делам религии (июль 1894 г. — январь 1895 г.) (место в кабинете, ранее занимаемое его отцом). Он основал школу, которая готовила препода-

вателей для высшей школы и которая повлияла в известной мере на становление таких выдающихся ученых, как фон Карман, фон Нейман, Теллер и Вигнер. Этвеш в течение года был ректором Будапештского университета.

«Я никогда не смогу забыть тот момент, когда поезд стремительно нес меня вдоль берегов Некара, приближаясь к железнодорожной станции Гейдельберг... Я не могу забыть своей радости, что теперь я смогу дышать одним воздухом с теми людьми науки, чья слава привлекла меня сюда».

(Этвеш в 1887 г., приведено в книге [300], стр. 259)

«Насколько можно судить, основываясь на небольшом числе экспериментов, мы можем, таким образом, утверждать, что μ, *т. е. ослабление земного притяжения внутри компенсирующих квадрантов, меньше чем* $2 \cdot 10^{-11}$... *поглощение (тяготения) всей Землей вдоль диаметра меньше чем приблизительно 1/800».*
«Мы провели серию наблюдений, которые превосходят по точности все предшествующие, но ни в одном случае не обнаружили никакого поддающегося измерению отклонения от закона пропорциональности тяготения и инерции».

(Этвеш, Пекар, Фекете [297])

«Наука никогда не найдет той формулы, которая доказывала бы ее необходимость. На самом деле сама наука могла бы исчезнуть, если бы мы нашли ключ к этой загадке».

(Этвеш, речь в Венгерской Академии Наук, 1890 г. [300], стр. 280)

«Одним из самых поразительных заблуждений нашего времени следует считать то, что люди прислушиваются к словам псевдопророков, которые вместо религиозных догм насаждают научные догмы с поистине средневековой нетерпимостью, но не имея на то исторического оправдания».

(Этвеш, 1877 г., [300], стр. 280)

Дополнение 38.3. РОБЕРТ ГЕНРИ ДИККЕ (6 мая 1916 г., Сан-Луи, Миссури)

В течение 1941—1946 гг. Дикке занимал ведущее место в замене устаревшего представления о сосредоточенных элементах цепей новым микроволновым подходом, основанным на соображениях симметрии, законах сохранения, соотношениях взаимности и матрице рассеяния — на понятиях, которые наряду с другими причинами привели к созданию синхронизированного усилителя и микроволнового радиометра. Пытаясь найти способ уменьшить доплеровскую ширину спектральных линий для увеличения точности измерений, Дикке обнаружил излучение без отдачи в атомных системах, заключенных в замкнутый объем или окруженных

демпфирующим газом. Эта деятельность привела 1) к открытию основной идеи газовых атомных часов и 2) к более точному измерению гиромагнитного отношения электронов, находящихся на уровнях $1S$ и $2S$ атома водорода, а также к более точному измерению сверхтонкой структуры атома водорода.

В 1954 г. фундаментальная работа Дикке положила начало теории когерентных радиационных процессов и сверхизлучательного состояния и заложила фундамент будущего развития в области лазеров и мазеров, в которое он также внес свой вклад. Его патент № 2851652 (представленный 21 мая 1956 г.) явился первым открытием прибора для генерации инфракрасного излучения с помощью когерентных процессов и впервые выдвинул идею объединения эталонного резонатора с газом, действующим как усилитель.

Начиная с 60-х годов Дикке использует свой талант к точным измерениям в области экспериментальной космологии. Вместе со своими сотрудниками Дикке 1) проверил принцип эквивалентности с неслыханной до него точностью 10^{-11}, 2) определил сплюснутость Солнца и 3) выдвинул идею о том, что реликтовое космическое излучение горячей Вселенной, позволяющее заглянуть глубже чем когда-либо ранее в прошлое Вселенной, должно быть наблюдаемо и, следовательно, его нужно искать и найти.

«За неимением лучшего термина газ, который сильно излучает благодаря когерентным процессам, будем называть «сверхизлучательным»... В процессе излучения система переходит в состояния с меньшим m при неизменном r, т. е. в «сверхизлучательную» область $m \sim 0$».

(1954 г. [301])

«Исследованы возможности возбуждения оптических «сверхизлучательных» состояний газа».

(1957 г. [302])

«Гравитационная сплюснутость» [Солнца], составляющая $5 \cdot 10^{-5}$, потребовала бы отказа от чисто геометрической теории гравитации Эйнштейна... Подобное уплощение [Солнца] можно было бы объяснить как результат более быстрого вращения внутренней области... Ответ, по-видимому, состоит в том, что в прошлом и до сегодняшнего дня Солнечная корона с ее магнитным полем действует на поверхность Солнца как тормоз».

(1964 г. [303])

«Последние измерения сплюснутости Солнца дали для относительной разности экваториального и полярного радиусов Солнца значение $(5{,}0 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-5}$».

(1967 г., Дикке и Голденберг [304])

«[*Вселенная должна*] *иметь достаточный возраст, чтобы в ней существовали элементы тяжелее водорода. Хорошо известно, что для создания самих физиков необходим углерод*».

(1961 г. [305])

«*Вопрос о постоянстве подобных безразмерных чисел должен решаться не определениями, а измерениями*».

(1961 г. Бранс и Дикке [288])

«*Геофизические данные приводят к верхнему пределу* $3 \cdot 10^{-13}$ *в год для скорости относительного изменения постоянной тонкой структуры*».

(1962 г., Дикке и Пибле [306])

§ 38.4. ПРОВЕРКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МЕТРИКИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ И ВРЕМЕНИ, А ТАКЖЕ КИНЕМАТИКУ ЧАСТИЦ

Специальная и общая теории относительности, а также все другие метрические теории гравитации предполагают существование метрического поля и предсказывают, что это поле определяет ход атомных часов и длины лабораторных стержней посредством хорошо знакомого соотношения $-d\tau^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$.

Экспериментальные подтверждения существования метрики

Экспериментальным подтверждениям существования метрики мы обязаны главным образом физике элементарных частиц. Они разделяются на два типа: *во-первых*, эксперименты, в которых интервалы времени измеряются непосредственно, например измерения увеличения времени распада нестабильных частиц [1]); *во-вторых*, эксперименты, обнаруживающие фундаментальную роль, которую играет группа Лоренца в кинематике частиц и в других разделах физики элементарных частиц [2]). Полный отказ от метрического тензора лишил бы нас адекватной теоретической основы для интерпретации подобных экспериментов.

Эксперименты с частицами не гарантируют существования глобальных лоренцевых систем отсчета

Рассмотрим теперь, что же именно *говорят* нам о метрическом тензоре $\mathbf{g}$ эксперименты в области физики элементарных частиц и о чем они *умалчивают*.

Во-первых, эти эксперименты *не* гарантируют существования глобальных лоренцевых систем, т. е. систем координат, охватывающих все пространство-время, в которых $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Однако они *действительно* наводят на мысль о том, что в каждом собы-

---

[1]) Проверка с точностью до 2% увеличения времени в случае мюонов с $(1 - v^2)^{-1/2} \sim 12$ в накопительном кольце выполнена в работе [307]. Более ранние эксперименты по увеличению времени см. в работах [308—310].

[2]) Лоренцева инвариантность, спин и статистика, *TCP*-теорема и соответствующие эксперименты рассматриваются в книге Лихтенберга [311], стр. 18.

тии $\mathcal{P}$ существуют ортонормированные системы с $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}(\mathcal{P}) \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}$, которые связаны друг с другом преобразованиями Лоренца. Эти ортонормированные системы позволяют определить внутреннее произведение любых двух векторов в заданном событии, и, таким образом, они определяют метрическое поле.

Во-вторых, эксперименты с элементарными частицами *не* гарантируют, что свободно падающие частицы движутся вдоль геодезических метрического поля, т. е. вдоль прямых линий в локально лоренцевых системах. [Здесь, в § 38.4 и 38.5, выражение «локально лоренцева система» означает: нормальная система координат в событии $\mathcal{P}$, в которой $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathcal{P}) = 0$. Термина «инерциальная система» мы избегаем, поскольку пока еще не делается никаких утверждений о движении пробных тел.] В частности, из экспериментов с элементарными частицами нельзя узнать, являются ли локально лоренцевы лабораторные системы свободно падающими (так что они летят в направлении от центра Земли и затем падают обратно с ньютоновским ускорением $g = 980$ см/с^2), или они все время покоятся относительно стен лаборатории, или же они испытывают движение какого-то иного типа. Все, в чем мы может быть уверены, сводится к следующему: метрика определяет характер пространственно-временных интервалов ($d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu\,dx^\nu$), которые измеряются атомными часами, и поэтому различные локально лоренцевы лабораторные системы движутся с постоянной скоростью одна относительно другой (они связаны друг с другом преобразованиями Лоренца); наконец, электрические и магнитные поля, а также энергии и импульсы частиц, испытывают преобразования Лоренца при переходе от одной локально лоренцевой системы к другой.

Эксперименты с частицами *приводят* к выводу о том, что собственное время не зависит от ускорения

В-третьих, эксперименты с элементарными частицами *действительно* приводят к мысли о том, что времена, измеряемые атомными часами, зависят лишь от скорости, но не от ускорения. Измеряемый квадрат интервала равен $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha\,dx^\beta$ независимо от ускорения (пока ускорение не станет настолько большим, что повлияет на структуру самих часов; см. § 16.4 и дополнение 16.3). Эквивалентно этому, но более физично утверждение, что интервал времени, измеренный часами, движущимися со скоростью v^j относительно лоренцевой системы, равен

$$d\tau = (-\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta)^{1/2} = [1-(v^x)^2-(v^y)^2-(v^z)^2]^{1/2}\,dt \qquad (38.1)$$

независимо от ускорения часов d^2x^j/dt^2. Если бы это было не так, то частицы, движущиеся по круговым орбитам в сильных магнитных полях, обнаруживали бы иные, чем у свободно движущихся частиц, скорости распада, чего на самом деле не происходит [307] [1]).

[1]) Эксперимент Фарли и др. представляет собой проверку с точностью до 2% независимости от ускорения скорости распада мюонов с энергиями $E/m = (1-v^2)^{-1/2} \sim 12$ при измеренных в системе покоя мюона ускорениях, равных $a = 5\cdot 10^{20}$ см/с$^2 = 0{,}6$ см$^{-1}$.

§ 38.5. ПРОВЕРКИ ДВИЖЕНИЯ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ: ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ КРАСНОМУ СМЕЩЕНИЮ

Из универсальности свободного падения, проверенной экспериментами Дикке — Этвеша, следует, что пространство-время заполнено семейством выделенных кривых — траекторий пробных тел. Существует также другое семейство выделенных кривых — *геодезических* метрики $\mathbf{g}$. Весьма заманчиво отождествить эти геодезические с траекториями пробных тел. Эйнштейновская геометрическая теория гравитации делает это отождествление («принцип эквивалентности»). Можно представить себе и такие теории, которые отказываются от такого отождествления. Что говорит об этом эксперимент?

Чтобы увидеть, с каким типом экспериментов мы должны иметь здесь дело, полезно выяснить физический смысл геодезических.

Физический смысл сравнения траекторий пробных тел и геодезических в метрике

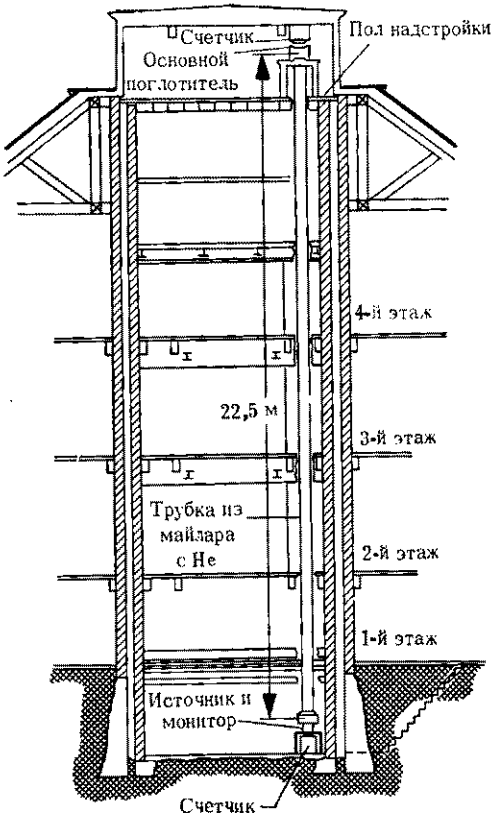
Геодезическая в метрике $\mathbf{g}$ наиболее легко распознается локально с помощью того факта, что в локально лоренцевых системах она представляет собой прямую линию. Другими словами, движение тела без ускорения, согласно измерениям в локально лоренцевой системе, имеет место в том и только в том случае, если тело движется по геодезической в $\mathbf{g}$. Следовательно, чтобы установить, являются ли траектории пробных тел геодезическими, мы должны экспериментально сравнить движение начала пространственных координат локально-лоренцевой системы (определяемое по показаниям атомных часов) с движением пробного тела (материальной частицы).

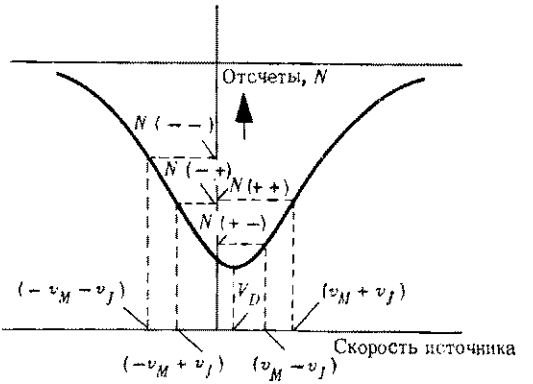
Движения пробных тел легко экспериментально изучать; относительно связанной с Землей лаборатории они ускоряются вниз с $g = 980$ см/с^2, и это ускорение можно измерить в заданной точке на поверхности Земли с точностью $1 \cdot 10^{-6}$.

К сожалению, много труднее измерить движение локально лоренцевой системы, определяемое по показаниям атомных часов. В настоящее время единственную возможность непосредственного измерения с достаточной для наших целей точностью предоставляют эксперименты по гравитационному красному смещению. (Теоретическое обсуждение гравитационного красного смещения в рамках общей теории относительности см. в § 7.2—7.5 и 25.4.)

Эксперимент Паунда — Ребки—Снайдера по измерению красного смещения как проверка геодезичности движения

Самый точный эксперимент по красному смещению принадлежит Паунду и Ребке [312]; затем он был усовершенствован Паундом и Снайдером [313] (фиг. 38.1). В этом эксперименте используется эффект Мессбауэра для измерения красного смещения, испытываемого гамма-лучами с энергией 14,4 кэВ, испущенными Fe^{57}. Излучатель и поглотитель гамма-лучей помещались в состоянии покоя у основания и на вершине башни в Гарвардском университете и разделялись расстоянием $h = 22{,}5$ м. С точностью до 1% измеренное красное смещение согласуется со значением,


Счетчик
Пол надстройки
Основной поглотитель
4-й этаж
22,5 м
3-й этаж
Трубка из майлара с He
2-й этаж
1-й этаж
Источник и монитор
Счетчик


Отсчеты, N
N (− −)
N (− +)
N (+ +)
N (+ −)
(− v_M − v_J)
v_D
(v_M + v_J)
Скорость источника
(−v_M + v_J)
(v_M − v_J)

предсказываемым общей теорией относительности

$$\Delta\lambda/\lambda = gh = 2{,}5\cdot10^{-15}. \tag{38.2}$$

Этот результат говорит о том, что локально лоренцевы системы не покоятся относительно поверхности Земли, а ускоряются вниз с тем же ускорением g, которое действует на свободные частицы с точностью 1%. Чтобы прийти к такому выводу, необходимо проанализировать эксперимент в лабораторной системе отсчета, где все (экспериментальное оборудование, Земля, гравитационное поле Земли) является статическим. Относительно лабораторной системы мгновенно покоящаяся локально лоренцева система ускоряется вниз (горизонтальные ускорения исключаются из соображений симметрии) с некоторым неизвестным ускорением a. Это эквивалентно ускорению лабораторной системы вверх (в направлении $+z$) с ускорением a относительно локально лоренцевой системы. Следовательно, пространственно-временная метрика в лабораторной системе имеет обычную форму

$$ds^2 = -(1+2az)\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + O(|x^j|^2)\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{38.3}$$

которая уже встречалась тем, кто читает курс 2, в § 6.6 и 13.6, а тем, кто читает курс 1, она встречалась и использовалась в дополнении 16.2. Кроме того, в лабораторной системе метрика статическая, гравитационное поле статическое и экспериментальное оборудование также является статическим. Поэтому гребень каждой электромагнитной волны, поднимающейся вверх, должен следовать мировой линии $t(z)$, тождественной по форме мировым

ФИГ. 38.1.
Эксперимент Паунда и Ребки [312] и Паунда и Снайдера [313] по измерению гравитационного красного смещения фотонов, поднимающихся на высоту 22.5 м против гравитационного поля. Движение фотонов происходит в трубке, заполненной гелием и помещенной в шахту в Джефферсоновской физической лаборатории Гарвардского университета. Начальная интенсивность источника Co^{57} превосходит 1 кюри. Прежде чем достичь пропорциональных счетчиков с широким окном, гамма-лучи с энергией 14,4 кэВ должны пройти через поглотитель, обогащенный Fe^{57}. И источник, и поглотитель помещены в термостаты. Скорость источника складывается из двух составляющих: одна из них v_M постоянная заставляет центр эмиссионной линии сместиться в область почти прямолинейной части кривой пропускания, а другая переменная, изменяющаяся от $+v_J$ до $-v_J$, создает отклонения, лежащие в прямолинейной части кривой пропускания; аналогично обстоит дело в случае, когда постоянная скорость равна $-v_M$. Тот факт, что эти два случая $+v_M$ и $-v_M$ не симметричны, позволяет определить сдвиг v_D (эффект гравитационного красного смещения) по сравнению с ситуацией, когда тяготение отсутствует, а излучатель и поглотитель стационарны. Окончательный результат экспериментов составил $(0{,}9990 \pm 0{,}0076)$ от значения $4{,}905\cdot10^{-15}$ для величины $2gh/c^2$, предсказываемого исходя из принципа эквивалентности (различие между экспериментами «вверх» и «вниз»). Рисунки из работы [313].

линиям предыдущего и последующего гребней; таким образом,

$$\begin{aligned}&\text{гребень волны 0:} && t = t_0(z),\\ &\text{гребень волны 1:} && t = t_0(z) + \Delta t,\\ &\qquad\vdots\\ &\text{гребень волны } n: && t = t_0(z) + n\Delta t.\end{aligned}$$

[Здесь, как и в доказательстве Шилда (§ 7.3) (красное смещение предполагает наличие пространственно-временной кривизны), не делается никаких предположений о форме мировых линий волновых гребней $t_0(z)$ (см. фиг. 7.1).] Следовательно, интервал между приемом последовательных волновых гребней, выраженный через *координатное* время, равен интервалу между испусканием гребней: оба равны Δt. Но предполагается, что атомные часы (ядра Fe^{57}) измеряют в этом эксперименте не координатное, а собственное время $\Delta\tau \equiv (-g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta)^{1/2}$. Таким образом,

$$\frac{\lambda_{\text{прием}}}{\lambda_{\text{испускание}}} = \frac{\Delta\tau_{\text{прием}}}{\Delta\tau_{\text{испускание}}}\,\frac{(1+az_{\text{прием}})\,\Delta t}{(1+az_{\text{испускание}})\,\Delta t} = 1 + a(z_{\text{прием}} - z_{\text{испускание}}),$$

т. е.

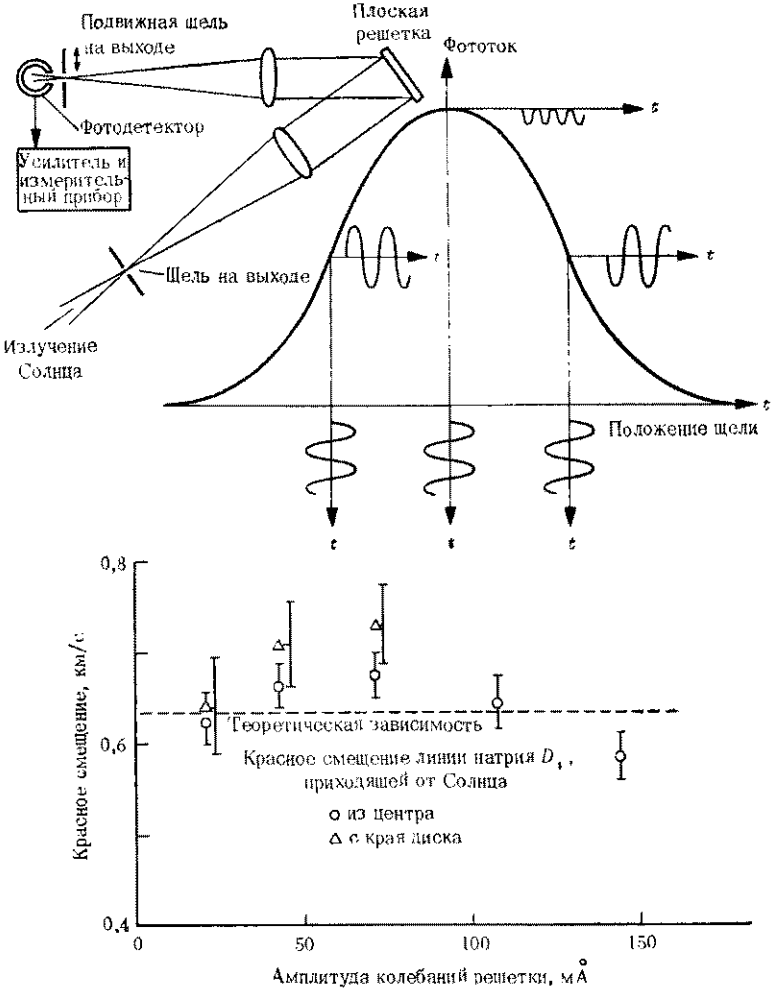
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \equiv ah = \left[\begin{array}{l}\text{теоретическое предсказание, основанное}\\ \text{на допущениях, что 1) атомные часы}\\ \text{измеряют } \Delta\tau = (-g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta)^{1/2},\ 2)\text{ электро-}\\ \text{магнитное излучение имеет форму}\\ \text{волнового цуга, 3) локально лоренцевы}\\ \text{системы ускоряются вниз с ускорением}\\ a \text{ относительно лаборатории}\end{array}\right]. \qquad (38.4)$$

Непосредственное сравнение с экспериментальным результатом (38.2) обнаруживает, что *локально лоренцевы системы в лаборатории, связанной с Землей, ускоряются вниз с тем же ускорением g, которое действует на пробную частицу (с точностью до 1%).*

[Приведенное выше рассуждение является в своей основе переработанным вариантом доказательства Шилда (§ 7.2) того, что из эксперимента по красному смещению следует искривленность пространства-времени. В конце концов, как может пространство-время быть плоским, если лоренцевы системы в Вашингтоне, Москве и Пекине все ускоряются по направлению к центру Земли с $g = 980$ см/с^2?]

Другие эксперименты по красному смещению

Из всех экспериментов по красному смещению эксперимент Паунда — Ребки — Снайдера имеет самую простую теоретическую интерпретацию, поскольку он проводился в однородном гравитационном поле. Он дополняется экспериментом Брауэлта [314], который измерял красное смещение линии натрия D_1, испускаемой с поверхности Солнца и принимаемой на Земле (фиг. 38.2). С точностью 5% он нашел, что красное смещение равно $GM_\odot/R_\odot c^2$, где $M_\odot$ и $R_\odot$ — масса и радиус Солнца. Именно



ФИГ. 38.2.

Приведенное Браултом [314] измерение красного смещения натриевой линии D_1 дало значение $1{,}05 \pm 0{,}05$ от гравитационного красного смещения, предсказываемого общей теорией относительности. Эта сильная линия в противоположность слабым линиям, использовавшимся более ранними исследователями, 1) излучается высокими слоями солнечной атмосферы, лежащими выше сильно возмущенных давлением и конвективным переносом областей, но ниже, чем хромосфера, и 2) наиболее четко из всех линий видимого спектра выделяется на непрерывном фоне. Брауэлт построил новый фотоэлектрический спектрометр (вверху), щель которого механически колеблется, охватывая узкую область спектра, чтобы определить положение пика линии 1) электронным способом, 2) объективно и 3) с точностью, которая на порядок превосходит точность, доступную визуальным методом. Щель считается установленной на линию, если ее среднее положение таково, что ток мультиумножителя не содержит сигнала на частоте модуляции. В измеренное таким способом красное смещение вносятся поправки на орбитальное движение и вращение Солнца и Земли; в результате получаются точки, обозначенные на нижнем рисунке кружочками и треугольниками. Экстраполяция к нулевым колебаниям щели дает указанное выше значение для красного смещения. Рисунок из диссертации [314].

такого красного смещения следует ожидать в том случае, если локально лоренцевы системы в каждой точке вдоль траектории фотона падают с той же скоростью, что и свободно падающие пробные тела [1]).

Таким образом, эксперименты по красному смещению обнаруживают, что с точностью в несколько процентов локально лоренцевы системы на поверхности Земли и вблизи Солнца не имеют ускорения относительно свободно падающих пробных тел. Это эквивалентно тому, что пробные тела движутся вдоль прямых линий в локально лоренцевых системах, а также эквивалентно следующему утверждению: *траектории пробных частиц представляют собой геодезические в метрике* $\mathbf{g}$.

§ 38.6. ПРОВЕРКИ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Проверки принципа эквивалентности:

Из всех принципов, входящих в теорию гравитации, центральное место занимает принцип эквивалентности, сформулированный в § 16.2; он гласит: «*В любой локально лоренцевой системе отсчета в каждый момент времени и всюду во Вселенной все (негравитационные) законы физики должны принимать форму, известную из специальной теории относительности*»

1) движение по геодезическим

Тот факт, что пробные тела движутся вдоль прямых линий в локально лоренцевых системах (движение по геодезическим), является одним из проявлений принципа эквивалентности. Другими проявлениями этого принципа являются универсальность уравнений Максвелла

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^{\alpha} \quad \text{и} \quad F_{\alpha\beta,\,\gamma} + F_{\beta\gamma,\,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\,\beta} = 0 \qquad (38.5)$$

во всех локально лоренцевых системах, универсальность закона локального сохранения энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \qquad (38.6)$$

и универсальность значений безразмерных констант, входящих в локальные физические законы:

$$\alpha_e \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}0360\ldots} = \left(\begin{array}{l}\text{электромагнитная постоянная}\\ \text{тонкой структуры}\end{array}\right),$$
$$\frac{m_{\text{нейтрона}}}{m_{\text{протона}}} = 1{,}00138\ldots, \quad \frac{m_{\text{электрона}}}{m_{\text{протона}}} = \frac{1}{1836{,}12\ldots} \text{ и т. д.} \qquad (38.7)$$

(Мы ограничиваемся безразмерными константами, поскольку лишь они не зависят от произвольного выбора единиц измерения.)

2) физические законы локально лоренц-инвариантны

Если мы фиксируем некоторое событие и задаем себе вопрос, инвариантна ли форма физических законов [уравнения (38.5), (38.6) и т. д.] при переходе от одной лоренцевой системы к другой,

[1]) Обзор других, менее точных экспериментов по красному смещению см. в работе [315].

то мы находимся в таком случае в области специальной теории относительности. Здесь множество экспериментов подтверждает принцип эквивалентности (см. § 38.4).

Если же мы задаем вопрос об изменении формы этих законов при переходе от одного события к другому, мы тем самым вскрываем ящик Пандоры, полный разных возможностей, и мы вряд ли решимся подробно их рассмотреть. Однако ни одно экспериментальное свидетельство до сих пор не дало ни малейшего основания для того, чтобы рассматривать какое-либо «отклонение от демократии» в действии физических законов. Более того, астрономические наблюдения свидетельствуют о том, что в далеких звездных системах физические законы те же самые, что и в Солнечной системе, и в далеких галактиках они те же самые, что и в нашей собственной Галактике. (См. дополнение 29.5, где Эдвин Хабл восхищается этим открытием.)

3) законы не меняются от события к событию

Постоянство безразмерных «констант» при переходе от события к событию может быть проверено с высокой точностью, если мы предположим постоянство физических законов. Дирак [316, 317], Теллер [318], Йордан [289, 319], Гамов [320] и другие выдвинули гипотезу, согласно которой «постоянная» тонкой структуры α_e может представлять собой медленно меняющееся скалярное поле, возможно, подчиняющееся космологическому уравнению. Однако довольно жесткие ограничения на подобные изменения следуют из данных по тонкой структуре расщепления спектральных линий квазаров и радиогалактик. Для квазара 3C 191 с красным смещением $z = 1{,}95$ Баккал, Саржент и Шмид [321] нашли, что α_e (3C 191)/α_e (Земли) $= 0{,}97 \pm 0{,}5$. При космологической интерпретации красного смещения квазара это соответствует ограничению $(1/\alpha_e)\ (d\alpha_e/dt) \lesssim 10^{-11}$ лет$^{-1}$. Еще более низкий предел был получен из данных по радиогалактикам, где не возникает вопроса об интерпретации красного смещения. Баккал и Шмид [322] измерили тонкую структуру расщепления в пяти радиогалактиках с $z \approx 0{,}20$, что соответствует испусканию света $2 \cdot 10^9$ лет назад. Они получили $\alpha_e\ (z = 0{,}20)/\alpha_e$ (Земли) $= 1{,}001 \pm 0{,}002$, что дает предел $|\ (1/\alpha_e)\ (d\alpha_e/dt)\ | \lesssim 10^{-12}$ лет$^{-1}$.

4) фундаментальные константы не меняются от события к событию

Дайсон [323] указывает, что сравнение скорости бета-распада Re^{187} в прошлом (определенной по значениям отношения содержания осмия и рения в старых залежах руды) со скоростью бета-распада сегодня позволяет проверить любые возможные вариации α_e со временем с большей чувствительностью, чем по данным о красном смещении и по любым изменениям скоростей альфа-распада и ядерных реакций от ранних эпох до настоящего времени. Подводя итог имеющимся данным по Re^{187}, он приходит к следующему ограничению:

$$|\ (1/\alpha_e)\ (d\alpha_e/dt)\ | \lesssim 10^{-15} \text{ лет}^{-1}.$$

Дальнейшие данные, свидетельствующие о постоянстве фундаментальных констант, см. в работах [306, 324—326].

Эксперименты типа эксперимента Этвеша как тесты пространственной вариации фундаментальных констант

Пространственные изменения α_e, $m_{\text{нейтрона}}/m_{\text{протона}}$ и других «констант» в пределах Солнечной системы можно попытаться искать с помощью экспериментов типа эксперимента Этвеша. Доказательство (принадлежащее Дикке [327]), связывающее результаты подобных экспериментов с ограничениями на любые пространственные вариации констант, является косвенным. Оно напоминает доказательство, которое используется обычно при рассмотрении полярных молекул, чтобы вывести ускорение поляризованной молекулы, с которым она притягивается к неоднородностям электрического поля. Доказательство Дикке проводится следующим образом.

Предположим, что одна из безразмерных «констант» α зависит от положения. Это приводит к зависимости от положения полной массы-энергии лабораторного пробного тела. Например, если α_e зависит от положения, то кулоновская энергия атомных ядер будет также испытывать эту зависимость ($E_{\text{кул}} \sim e^4 \sim \alpha_e^2$; $\delta M/E_{\text{кул}} = 2\delta\alpha_e/\alpha_e$). Можно вычислить изменение массы-энергии пробного тела при перемещении от x^μ до $x^\mu + \delta x^\mu$ в предположении полного отсутствия изменений структуры тела в ходе этого перемещения:

$$\delta M = (\partial M/\partial \alpha)_{\text{фиксир. структ}} (\partial \alpha/\partial x^\mu)\, \delta x^\mu. \tag{38.8}$$

После этого перемещения ослабление внутренних сил (например, за счет уменьшения α) может привести к изменению структуры, но такое изменение будет сопровождаться превращением внутренней потенциальной энергии во внутреннюю кинетическую энергию, при котором M сохраняется.

Рассмотрим теперь следующий мысленный эксперимент [усовершенствование доказательства, с помощью которого Эйнштейн впервые вывел гравитационное красное смещение (§ 7.2)]. Возьмем n частиц, каждая с массой-энергией μ. Пусть структура частиц такова, что лишь пренебрежимо малая доля μ связана с интересующей нас «константой» α:

$$(1/\mu)\ (\partial \mu/\partial \alpha) = 0. \tag{38.9}$$

Поместим эти частицы на высоте h в (локально) однородном ньютоновском поле. Высвобождая энергию связи $E_B(h)$, составим там из них комбинацию, образующую сложное тело с массой

$$M = n\mu - E_B(h), \tag{38.10}$$

которая существенным образом зависит от «константы» α:

$$(1/M)\ (\partial M/\partial \alpha) \neq 0. \tag{38.11}$$

Опустим это тело *вместе* с выделившейся энергией связи, упакованной в мешок, на расстояние δh. Полная действующая сила (на ньютоновском языке)

$$F = Ma + E_B(h)\, g. \tag{38.12}$$

Здесь g — ускорение, испытываемое при свободном падении массой-энергией, не зависящей от α. Но «свободное» падение составного тела M на самом деле не является свободным из-за дополнительной «поляризационной силы», притягивающей этот объект. Следовательно, при «свободном» падении составное тело испытывает ускорение a, немного отличающееся от g. Однако ускоряемая масса в точности равна M, поэтому сила, требуемая для создания этого ускорения, дается произведением Ma. Энергия, приобретаемая при опускании тела и мешка, равна

$$E(\text{вниз}) = F\delta h = Ma\,\delta h + E_B(h)\,g\delta h.$$

Упакуем в мешок и эту энергию.

На высоте $h - \delta h$ воспользуемся некоторой частью запасенной в мешке энергии для того, чтобы расщепить тело на составляющие его частицы. Для этого потребуется энергия

$$E_B(h-\delta h) = n\mu - M(h-\delta h) = n\mu - M(h) + \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dh}\delta h =$$

$$= E_B(h) + \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dh}\delta h;$$

таким образом, энергия

$$E_{\text{мешок}} = E_B(h) + E(\text{вниз}) - E_B(h-\delta h) =$$

$$= \left[Ma + E_B(h)\,g - \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dh}\right]\delta h \qquad (38.13)$$

остается после этого в мешке. Воспользуемся этой энергией для подъема n частиц и мешка обратно на высоту h. *Предположим, что полная энергия сохраняется*; поэтому, когда n частиц и мешок вернутся к первоначальному состоянию на высоте h, не будет ни избыточной энергии, ни ее дефицита. Это означает, что энергия $E_{\text{мешок}}$ должна в точности совпадать с энергией, необходимой, чтобы осуществить подъем:

$$E_{\text{мешок}} = n\mu g\delta h = [M + E_B(h)]\,g\delta h. \qquad (38.14)$$

Объединяя выражения (38.13) и (38.14) для $E_{\text{мешок}}$, находим

$$a - g = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dh}. \qquad (38.15)$$

Таким образом, в предположении сохранения полной энергии (нет вечных двигателей!) пространственная зависимость физической «константы» α приводит к аномалии (38.15) в ускорении тела, масса которого зависит от α.

Кулоновская энергия, пропорциональная α^2_e, в ядре золота составляет 0,4% массы, а в ядре алюминия — 0,1%. Следовательно, пространственная вариация α_e должна приводить к малому различию гравитационных ускорений этих двух ядер, равному

$$\left|\frac{a_{\text{Au}} - a_{\text{Al}}}{g}\right| \approx \frac{1}{g}\,2\,\frac{0{,}003}{\alpha_e}\frac{d\alpha_e}{dh} \leqslant 1\cdot 10^{-11},$$

т. е.

$$\frac{1}{\alpha_e}\left|\frac{d\alpha_e}{dh}\right| \leqslant 1\cdot 10^{-9} g \approx 1\cdot 10^{-9}\ \text{см/с}^2 = 1\cdot 10^{-30}/\text{см} \qquad (38.16)$$

на Земле вследствие притяжения Солнца. Здесь использовано предельное значение ($1\cdot 10^{-11}$), взятое из эксперимента Дикке (§ 38.3), и ускорение $g = 0{,}6$ см/с^2, обусловленное Солнцем на Земле.

Отсюда следует, что градиент от $\ln \alpha_e$ в 10^9 раз меньше градиента ньютоновского потенциала!

§ 38.7. ПРОВЕРКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПОЛЕЙ, МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИХ С РАССТОЯНИЕМ

Возможное существование новых полей дальнего действия, связанных с гравитацией

Принимаем ли мы допущение о том, что пробные тела движутся по геодезическим в метрике, или нет, это не исключает возможности существования ранее неизвестных полей, медленно убывающих с расстоянием (полей, спадающих на больших расстояниях как $1/r$), связанных как-то с гравитацией.

Непосредственное и косвенное взаимодействия

Если «новые» медленно убывающие поля (не метрические и не электромагнитные) действительно существуют, ожидая своего открытия, то они могут влиять на вещество двояким образом. Во-первых, они могли бы *взаимодействовать с веществом непосредственно*, создавая, например, небольшие отклонения от движения по геодезическим (меньшие, чем предельные значения, приведенные в § 38.5) или слабую зависимость масс частиц от положения (более слабую, чем ограничения в § 38.6). Во-вторых (что еще труднее обнаружить), они могли бы *взаимодействовать с веществом косвенно*, входя лишь в уравнения поля, определяющие геометрию пространства-времени. В этом параграфе будут описаны проверки эффектов непосредственного взаимодействия с веществом. Теории, в которых поля взаимодействуют с веществом косвенно, будут описаны в дополнении 39.1, а проверки существования таких полей будут обсуждаться в гл. 40.

Экспериментальные ограничения на непосредственно взаимодействующие поля:

Дикке [277], пользуясь своей системой для анализа проверок гравитационных теорий (§ 38.2), показал, что некоторые нулевые эксперименты накладывают сильные ограничения на неизвестные непосредственно воздействующие на вещество поля указанного типа.

1) эксперимент Хьюза — Древера

Одним из таких экспериментов является эксперимент Хьюза — Древера [328, 329]. Его можно представить себе как поиск симметричного тензорного поля второго ранга $h_{\alpha\beta}$, создающего малые отклонения траекторий пробных тел от геодезических в метрике $g_{\alpha\beta}$. За исключением случая, когда эксперименты проводятся в такой области пространства-времени, где $h_{\alpha\beta}$ представляет собой константу, умноженную на $g_{\alpha\beta}$ (простое изменение масштаба всех длин и всех промежутков времени на постоянный множитель), это тензорное поле должно создавать анизотропии в свой-

ствах пространства-времени, которые в свою очередь вызывают анизотропии инертной массы нуклона, а последние приводят к относительному смещению в атомном ядре вырожденных энергетических уровней с различными магнитными квантовыми числами. Эксперимент Хьюза — Древера налагает сильные ограничения на подобные смещения и тем самым на возможное тензорное поле $h_{\alpha\beta}$. Цитируем Дикке ([277], стр. 186): «Если имеются два [тензорных] поля, причем одно из них сильно анизотропно в системе координат, выбранной так, чтобы второе поле было изотропным, то сила [непосредственного] взаимодействия вещества с первым полем должна быть на множитель порядка 10^{-22} меньше, чем для второго поля... [Кроме того], на Земле, движущейся с постоянно меняющейся скоростью, анизотропия ожидалась бы с некоторой периодичностью.» Таким образом, исходя из эксперимента Хьюза — Древера, мы делаем вывод, что нет ни малейших данных в в пользу существования второго тензорного поля. Более подробно см. в работе [330].

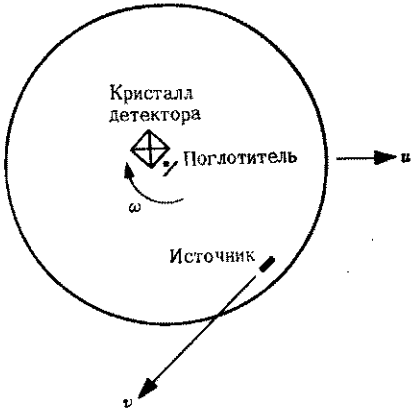
2) эксперименты по смещению относительно эфира

Другая серия экспериментов, называемых *экспериментами по смещению относительно эфира*, накладывает сильные ограничения на любые неизвестные векторные поля, медленно убывающие с расстоянием и непосредственно взаимодействующие с массой-энергией. Можно представить себе подобное поле космологического происхождения. Естественно ожидать, что космологическое векторное поле имеет то же направление, что и 4-скорость «космологической жидкости» $\mathbf{u}$ (тождественное временно́му направлению $\mathbf{e}_0$ системы отсчета, в которой космическое микроволновое излучение изотропно). Тогда в любой другой системе отсчета 4-вектор нового поля будет иметь пространственные компоненты. В принципе наблюдатель мог бы воспользоваться ими, чтобы определить направление своего движения и скорость относительно средней системы покоя Вселенной. Эксперименты по смещению относительно эфира пытаются найти эффекты, вызываемые таким полем.

Например, в эксперименте Тернера и Хилла [331] делается попытка найти зависимость скорости хода часов от такого векторного поля путем исследования поперечного доплеровского сдвига как функции направления на излучатель, расположенный на ободе центрифуги, в центре которой находится приемник (фиг. 38.3). Если такой эффект существует, то наиболее естественно ожидать, что он имеет вид

$$\frac{\left(\begin{array}{l}\text{скорость хода часов, движущихся отно-}\\ \text{сительно Вселенной со скоростью } \boldsymbol{\beta}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\text{скорость хода часов, покоящихся отно-}\\ \text{сительно Вселенной}\end{array}\right)} = 1 + \gamma\beta^2, \quad (38.17)$$

где γ — малая постоянная. Часы в центре центрифуги имеют скорость $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_x$, а часы на ободе $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u} + v\,(\boldsymbol{e}_x \cos \omega t +$



ФИГ. 38.3.
Эксперимент Тернера и Хилла [331], в котором ищется зависимость темпа хода часов (источника Co^{57}, расположенного около обода центрифуги) от скорости относительно удаленного вещества Вселенной, или, на рабочем языке, относительно «нового локального поля», описываемого 4-вектором. Гамма-лучи от Co^{57} с энергией 14,4 кэВ уже испытывают доплеровское смещение второго порядка, составляющее $1{,}3\cdot10^{-13}$. Ищется дополнительный сдвиг $\gamma\beta^2$, где $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u} + v\,(\boldsymbol{e}_x \cos\omega t + \boldsymbol{e}_y \sin\omega t)$ — скорость относительно системы отсчета, в которой скалярное поле является чисто времениподобным. Пропускание гамма-лучей через поглотитель из Fe^{57} будет падать по линейному закону с любым подобным дополнительным сдвигом, и будет замечено как падение скорости отсчета в кристалле NaI. Источник расположен на расстоянии 10 см от оси вращения; скорость центрифуги 15 000 об/мин. Значение γ, полученное из этого эксперимента, равно $(1 \pm 4)\cdot10^{-5}$.

$+ \boldsymbol{e}_y \sin\omega t$). Таким образом, сдвиг между ободом и диском должен меняться с положением как

$$\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\nu/\nu = -2\gamma uv\cos\omega t + \text{обычный поперечный сдвиг}.$$

Данные Тернера и Хилла, которые использовали эффект Мессбауэра, показывают, что

$$\gamma < 4\cdot10^{-5}. \tag{38.18}$$

Следовательно, если космологическое векторное поле существует, то его непосредственное взаимодействие с веществом мало.

Эти эксперименты более подробно описаны в работе [277], где даются ссылки на другие подобные эксперименты.

39. ДРУГИЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

§ 39.1. ДРУГИЕ ТЕОРИИ

Среди всех физических законов нельзя найти ни одного, более простого и более красивого, чем геометрическая теория гравитации Эйнштейна (гл. 16 и 17), и ни одна из когда-либо построенных теорий гравитации не является столь неотразимой.

Эксперимент проводился за экспериментом, и одна за другой отпадали гравитационные теории, становясь жертвами наблюдений, а эйнштейновская теория оставалась непоколебимой. До сих пор ни одно из заявлений, что эксперимент не согласуется с эйнштейновскими законами гравитации, не выдержало проверки временем.

Роль альтернативных теорий гравитации

Вопрос: Зачем в таком случае заниматься изучением других теорий гравитации? *Ответ*: Чтобы с чем-то сравнивать эйнштейновскую теорию при ее проверке и более контрастно оттенить ее преимущества.

Сказать, что эйнштейновская геометродинамика «проверена в бою», равносильно утверждению, что каждый раз при попытке противопоставить ей другую теорию, делающую иное предсказание, побеждала эйнштейновская геометродинамика. Как же тогда выбирать новых противников для репающего нового испытания единоборством?

Не все создаваемые теории гравитации равноценны между собой. Лишь незначительное меньшинство среди большого числа встречающихся в литературе теорий достаточно жизнеспособны, чтобы их стоило сравнивать с общей теорией относительности или с будущими экспериментами. «Стóящие» теории — это те

Критерии жизнеспособности теории:

теории, которые удовлетворяют *трем критериям жизнеспособности: самосогласованности, полноте и согласию с уже проведенными экспериментами.*

1) самосогласованность

Самосогласованность лучше всего иллюстрировать, описав несколько теорий, которые не выдерживают теста на самосогласованность. Классическим примером внутренне несогласованной теории служит теория, описывающая гравитацию в виде поля со спином 2 ([332], дополнение 7.1 в настоящей книге), которая эквивалентна линеаризованной общей теории относительности (гл. 18). Уравнения поля теории со спином 2 предполагают, что все гравитирующие тела движутся вдоль прямых линий в глобальных лоренцевых системах отсчета, в то время как уравнения движения этой теории требуют, чтобы гравитация отклоняла тела от прямолинейного движения. (Если попытаться устранить эту несамосогласованность, то мы сразу придем к общей теории относительности; см. путь 5 в дополнении 17.2.) Другой несамосогласованной теорией является теория Кустаанхеймо [333]. Она предсказывает нулевое гравитационное красное смещение при использовании волновой трактовки света (теории Максвелла) и ненулевое красное смещение, если рассматривать свет как частицы (фотоны).

2) полнота

Полнота. Чтобы считаться полной, теория должна быть способна проанализировать, исходя из «первых принципов», результаты каждого представляющего интерес эксперимента. Поэтому она должна включать согласованный ряд законов электродинамики, квантовой механики и всех других областей физики. Никакая теория не является полной, если она *постулирует*, что атомные часы измеряют «интервал» $d\tau = (-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$, построенный из конкретной метрики. Атомные часы являются сложной системой, поведение которой должно рассчитываться, исходя из фундаментальных законов квантовой теории и электромагнетизма. Ни одна теория не является полной, если она *постулирует*, что планеты движутся по геодезическим. Планеты представляют собой сложные системы, движение которых должно вычисляться из фундаментальных законов, описывающих реакцию вещества на гравитацию. Дальнейшее обсуждение см. в § 16.4, 20.6 и 40.9.

3) согласие с проведенными экспериментами

Согласие с проведенными экспериментами. Необходимость согласия теории с точностью в несколько стандартных отклонений с «четырьмя классическими тестами» (гравитационное красное смещение, смещение перигелия, отклонение электромагнитных волн и задержка радиолокационного сигнала) является очевидной. Столь же очевидна, хотя и часто забывается, необходимость согласия теории с фактом расширения Вселенной (исторически это главнейший козырь общей теории относительности) и с наблюдениями, проводимыми на ньютоновском уровне, например теория Биркгофа [334] предсказывает те же красное смещение, смещение перигелия, отклонение и временну́ю задержку, что и общая теория относительности. Но она требует, чтобы давление внутри

гравитирующих тел было равно полной плотности массы-энергии $p = \rho$; как следствие этого она требует, чтобы звуковые волны распространялись со скоростью света. Безусловно, это предсказание резко расходится с экспериментом. Поэтому теория Биркгофа нежизнеспособна. Другой пример. Теорию гравитации Уайтхеда [291] в течение долгого времени считали жизнеспособной альтернативой эйнштейновской теории, поскольку она давала в точности те же предсказания, что и теория Эйнштейна, для «четырех классических тестов». Но сразу же после работы Вилла [293] стало ясно, что теория Уайтхеда предсказывает такую зависимость океанских приливов и отливов от времени, которая находится в полном противоречии с каждодневным опытом (см. § 40.8).

§ 39.2. МЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Почему внимание сосредоточивается на метрических теориях гравитации

Две цепочки рассуждений концентрируют наше внимание на ограниченном классе гравитационных теорий, называемых *метрическими теориями*.

Первая цепочка рассуждений включает основную мысль предыдущей главы. В ней изучался эксперимент за экспериментом и были получены два вывода: 1) *пространство-время наделено метрикой* и 2) *эта метрика удовлетворяет принципу эквивалентности* (классические законы специальной теории относительности справедливы в каждой локально лоренцевой системе). *Теории гравитации, включающие эти два принципа, называются метрическими теориями* [1]). В сущности гл. 38 гласит: «При любом адекватном описании гравитации пользуйтесь метрической теорией». Исключение представляет теория Картана [295, 335] («общая теория относительности плюс кручение»; см. [296]), которая не является метрической, но согласуется с экспериментом и при уровне техники 70-х годов экспериментально неотличима от общей теории относительности.

Вторая цепочка рассуждений, приводящая к метрическим теориям, начинается с вопроса о полноте (см. предыдущий параграф). Чтобы быть полной, теория должна включать самосогласованную трактовку всех негравитационных законов физики. Никто еще не нашел простого способа включить всю негравитационную физику, если не вводить метрику и не привлекать принцип эквивалентности. Другие подходы приводят к пугающей сложности и обычно к тому, что теория не удовлетворяет одному из трех условий: самосогласованности, полноты и согласия с прошлыми экспериментами. *Все известные в* 1973 *г. жизнеспособные теории являются метрическими, за исключением теории Картана* (см. [279, 335]).

---

[1]) Несколько более узкое определение метрических теорий см. в работе [278].

Чем отличаются метрические теории?

Метрические теории существенно отличаются друг от друга лишь в одном вопросе: по каким законам образуется метрика. В общей теории относительности метрика образуется непосредственно энергией-импульсом вещества и негравитационных полей. В теории Дикке — Бранса — Йордана (дополнение 39.1) вещество и негравитационные поля создают скалярное поле ϕ, затем ϕ вместе с веществом и другими полями создает метрику. Если выразить это на языке § 38.7, то ϕ представляет собой «новое медленно убывающее поле», которое косвенно взаимодействует с веществом. В качестве другого примера служит теория, разработанная Ни [294, 336] (дополнение 39.1); она обладает метрикой плоского пространства $\boldsymbol{\eta}$ и универсальной временно́й координатой t («первичная геометрия», см. § 17.6); $\boldsymbol{\eta}$ действует наряду с веществом и негравитационными полями, создавая скалярное поле ϕ; затем $\boldsymbol{\eta}$, t и ϕ совместно создают физическую метрику $\mathbf{g}$, входящую в принцип эквивалентности.

Все эти три теории — Эйнштейна, Дикке — Бранса — Йордана и Ни — были вполне жизнеспособными до лета 1971 г., когда писался этот параграф. Но осенью 1971 г. Нордведт и Вилл [337] доказали, что теория Ни и многие другие теории, которые считались жизнеспособными, противоречат эксперименту. Вот пример того, как быстро развивается прогресс в области экспериментальной проверки гравитационной теории!

В дальнейшем в этой и в следующих главах мы ограничимся рассмотрением метрических теорий гравитации и их сравнения с экспериментом.

§ 39.3. ПОСТНЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ И ППН-ФОРМАЛИЗМ

Разложение метрической теории для случая слабого поля и медленного движения

В Солнечной системе, где проводятся эксперименты с целью сделать выбор между метрическими теориями, гравитация слаба:

$$|\Phi| = |\text{ньютоновский потенциал}| \leqslant 10^{-6}; \qquad (39.1а)$$

кроме того, вещество, создающее гравитацию в Солнечной системе, движется медленно:

$$v^2 = \begin{pmatrix}\text{скорость относительно центра масс}\\ \text{Солнечной системы}\end{pmatrix}^2 \leqslant 10^{-7} \qquad (39.1б)$$

и обладает малыми натяжениями и внутренними энергиями:

$$|T_{jk}{}^{k}|/\rho_0 = \begin{pmatrix}\text{натяжение, деленное на плотность}\\ \text{барионной «массы»}\end{pmatrix} \leqslant 10^{-6}, \qquad (39.1в)$$

$$\Pi = (\rho - \rho_0)/\rho_0 = \begin{pmatrix}\text{внутренняя плотность энергии}\\ \text{на единицу плотности барион-}\\ \text{ной «массы»}\end{pmatrix} \leqslant 10^{-6}. \qquad (39.1г)$$

[Здесь *плотность барионной «массы»* ρ_0, несмотря на свое название и на тот факт, что иногда она называется еще более запутанно — «плотность массы-энергии покоя», на самом деле дает плотность числа барионов n и ничего больше. Она определяется как произведение n на обычное значение массы μ_0, приходящейся на один барион в некотором вполне определенном обычном состоянии; таким образом,

$$\rho_0 \equiv n\mu_0. \tag{39.1д}$$

Следовательно, анализ экспериментов в Солнечной системе, использующий любую метрическую теорию гравитации, может быть упрощен без существенной потери точности за счет одновременного разложения по малым параметрам $|\Phi|$, v^2, $|T_{ik}|/\rho_0$ и П. Подобное «разложение слабого поля и медленного движения» дает: 1) плоское, пустое пространство-время в «нулевом порядке», 2) ньютоновскую трактовку Солнечной системы в «первом порядке», 3) постньютоновские поправки к ньютоновскому рассмотрению во «втором порядке».

Постньютоновское приближение

Формализм ньютоновской теории плюс постньютоновские поправки называется *постньютоновским приближением*. Каждая метрическая теория имеет свое собственное постньютоновское приближение. Несмотря на большие различия между самими метрическими теориями, их постньютоновские приближения очень похожи. В действительности они настолько похожи, что можно построить единую постньютоновскую теорию гравитации, лишенную каких-либо упоминаний о полях, косвенно взаимодействующих с веществом (ϕ в теории Дикке — Бранса — Йордана, η, t и ϕ в теории Ни, см. дополнение 39.1), которая включает в себя как частные случаи постньютоновские приближения любой возможной метрической теории. Эта всеобъемлющая постньютоновская теория называется *параметризованным постньютоновским* (*ППН*) *формализмом*. Он включает ряд параметров (называемых *ППН-параметрами*), которые могут принимать произвольные значения. Один набор значений этих параметров приводит к ППН-формализму, тождественному с постньютоновским приближением общей теории относительности, другой набор значений приводит к постньютоновскому приближению теории Дикке — Бранса — Йордана и т. д.

ППН-формализм

В последующих параграфах этой главы приводится вариант ППН-формализма, разработанный Клиффордом М. Виллом и и Кеннетом Нордведтом [287] (см. также [279]). Этот вариант включает десять ППН-параметров и охватывает как частные случаи почти каждую из известных авторам метрических теорий. Немногие исключения (теория Уайтхеда [291] и теории, упоминаемые в обзоре Вилла [338]) все противоречат эксперименту. Их можно включить в ППН-формализм, добавляя дополнительные члены и параметры.

Эти десять параметров описаны качественно в дополнении 39.2

для удобства тех читателей, которые хотели бы пропустить детали этого формализма (§ 39.4—39.12).

Точность ППН-формализма в Солнечной системе

Какова точность ППН-формализма? Или, формулируя вопрос более четко, с какой точностью согласуется постньютоновское приближение с той метрической теорией, из которой оно происходит? В Солнечной системе, где $|\Phi|$, v^2, $|T_{jk}|/\rho_0$ и Π все $\leqslant 10^{-6}$, постньютоновское приближение дает относительные ошибки $\leqslant 10^{-6}$ в величинах постньютоновского порядка и относительные ошибки $\leqslant 10^{-12}$ в величинах ньютоновского порядка. Например, формализм не может рассматривать отклонение света на угол $\leqslant 10^{-6} \times$ (постньютоновское отклонение) $\sim 10^{-6}{}''$. Он не учитывает также релятивистские деформации земной орбиты $< 10^{-12} \times$ (одна астрономическая единица) ~ 10 см. Ясно, что в 70-х годах нет необходимости использовать поправки более высокого порядка к постньютоновскому приближению и, следовательно, нет нужды в построении «параметризованной постпостньютоновской системы». Однако, как сказал Шапиро [339]: «Если строить планы, исходя из достижений последнего десятилетия, то вполне разумно предположить, что в 80-х годах мы будем располагать средствами для обнаружения эффектов общей теории относительности второго порядка. В таком случае отношение релятивистов-теоретиков к релятивистам-экспериментаторам может резко снизиться».

На самом деле утверждение, что в 70-х годах постньютоновского приближения вполне достаточно, справедливо лишь за некоторыми исключениями. Эти исключения возникают в результате воздействия внешней Вселенной на Солнечную систему. Например, гравитационные волны от далеких источников, распространяющиеся внутри Солнечной системы (гл. 35—37), не учитываются ни одним из постньютоновских приближений, а также ППН-системой. Их нужно рассматривать, используя неупрощенную метрическую теорию или же приближение слабого поля и «быстрого движения» в такой теории. Аналогично, зависимость от времени «гравитационной постоянной» (§ 40.8), обусловленная, согласно некоторым теориям, расширением Вселенной, выходит за рамки ППН-формализма, как и само расширение.

Астрофизические применения ППН-формализма

ППН-формализм используется не только при интерпретации экспериментальных проверок теорий гравитации, но также и как мощный метод в теоретической астрофизике. Приравнивая единице все ППН-параметры, кроме $\zeta = \eta = 0$, мы получаем постньютоновское приближение эйнштейновской теории гравитации. Это постньютоновское приближение может быть использовано затем (и интенсивно использовалось) для вычисления общерелятивистских поправок в таких вопросах, как структура и устойчивость звезд [1]).

---

[1]) См., например, большие серии работ Чандрасекара и его сотрудников в Астрофизическом журнале, начиная с [340—342].

Исторические замечания и замечания по поводу обозначений

История и система обозначений ППН-формализма

Наиболее ранние параметризации постньютоновского приближения проводились и использовались для интерпретации экспериментов в Солнечной системе Эддингтоном [280], Робертсоном [281] и Шиффом [282, 283]. Однако они имели дело исключительно с вакуумным гравитационным полем вне изолированного сферического тела (Солнца). Нордведт [284, 285] разработал первый полный ППН-формализм, позволяющий рассматривать все аспекты Солнечной системы; он трактовал Солнце, планеты и Луну как состоящие из «газов» точечных частиц (атомов) с гравитационным и электромагнитным взаимодействиями между частицами. Позднее Вилл [286] использовал методы, разработанные Чандрасекаром [340], для модификации формализма Нордведта с включением описания небесных тел, учитывающего давление и непрерывность вещества. Этот вариант формализма приводится здесь; разработанный Виллом и Нордведтом [287], он обобщает все предшествующие варианты, распространяя на них «постгалилеевскую инвариантность» [343]. Наиболее подробная и современная обзорная статья по ППН-формализму написана Виллом [279].

В литературе по постньютоновской физике и ППН-формализму ньютоновский потенциал по традиции выражается не через Φ, а через

$$U \equiv -\Phi \equiv +\int \frac{\rho_9(x')\,d^3x'}{|x-x'|}. \tag{39.2}$$

Чтобы избежать путаницы в этой и в следующих главах, мы будем пользоваться U, хотя в остальной книге используется Φ.

Обратимся теперь к детальному описанию ППН-формализма в курсе 2.

Дополнение 39.1. ТЕОРИЯ ДИККЕ — БРАНСА — ЙОРДАНА И ТЕОРИЯ НИ

А. Теория Дикке — Бранса — Йордана

Литература: [288, 289]. *Замечания.* Это частный случай $\eta = -1$ теории Йордана. Альтернативное математическое описание теории дает Дикке [344].

Поля, связанные с гравитацией:

ϕ — медленно убывающее с расстоянием скалярное поле,

$\mathbf{g}$ — метрика пространства-времени (из которой обычным образом строятся ковариантная производная ∇ и тензоры кривизны).

Уравнения, которыми определяются эти поля:

След тензора энергии-импульса генерирует ϕ посредством волнового уравнения в искривленном пространстве-времени

$$\Box\phi = \phi^{;\alpha}_{;\alpha} = \frac{8\pi}{3+2\omega}T,$$

где ω — безразмерная «постоянная взаимодействия Дикке».

Тензор энергии-импульса и ϕ вместе генерируют метрику (т. е. пространственно-временную кривизну) посредством уравнений поля

$$G_{\alpha\beta}=\frac{8\pi}{\phi}T_{\alpha\beta}+\frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right)+\frac{1}{\phi}\left(\phi_{;\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}\Box\phi\right),$$

где $G_{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна.

Вариационный принцип для этих уравнений:

$$\delta\int\left[\phi R-\omega\left(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}/\phi\right)+16\pi L\right](-g)^{1/2}\,d^4x=0,$$

где R — скалярная кривизна и L — лагранжиан вещества.

Выполняется принцип эквивалентности:

Физические законы специальной теории относительности справедливы без изменения в локально лоренцевых системах отсчета, определяемых метрикой $\mathbf{g}$. Следствие: скалярное поле не оказывает непосредственного воздействия на вещество; его единственная роль ограничивается тем, что оно входит в уравнения поля, которые определяют геометрию пространства-времени. Оно является «косвенно взаимодействующим полем» в смысле § 38.7.

Это самосогласованная теория, обладающая полнотой, и при $\omega > 5$ она находится в «разумном» согласии (два стандартных отклонения или лучше) со всеми экспериментами до 1973 г.

Б. Теория Ни

Литература: [294, 336].

Поля, связанные с гравитацией

$\boldsymbol{\eta}$ — плоская «фоновая метрика» («первичная геометрия» в смысле § 17.6). Предполагается существование систем координат («фоновые лоренцевы системы»), в которых всюду одновременно $\eta_{00}=-1$, $\eta_{0j}=0$ и $\eta_{jk}=\delta_{jk}$.

t — скалярное поле, называемое «универсальной временной координатой» («первичная геометрия» в смысле § 17.6), которая так «подогнана» к фоновой метрике, что

$$t_{|\alpha\beta}=0,\quad t_{,\alpha}t_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}=-1,$$

где знак «|» обозначает ковариантную производную по отношению к $\boldsymbol{\eta}$. Это означает, что существует фоновая лоренцева система отсчета («система покоя Вселенной»), в которой $x^0=t$.

ϕ — скалярное поле, называемое «скалярным гравитационным полем».

$\mathbf{g}$ — метрика пространства-времени (из которой обычным образом строятся ковариантная производная ∇ и тензоры кривизны).

Уравнения, которыми эти поля определяются:

Тензор энергии-импульса пространства-времени генерирует скалярное гравитационное поле ϕ посредством волнового уравнения

$$\Box\phi\equiv\phi^{,\alpha}{}_{;\alpha}=-2\pi T^{\alpha\beta}\partial g_{\alpha\beta}/\partial\phi=4\pi T^{\alpha\beta}\left[\eta_{\alpha\beta}e^{-2\phi}+\left(e^{2\phi}+e^{-2\phi}\right)t_{,\alpha}t_{,\beta}\right];$$

ϕ, $\boldsymbol{\eta}$ и t вместе определяют метрику пространства-времени через алгебраическое соотношение

$$\mathbf{g}=e^{-2\phi}\boldsymbol{\eta}+\left(e^{-2\phi}-e^{2\phi}\right)\mathbf{d}t\otimes\mathbf{d}t.$$

Замечание. В «системе покоя Вселенной», существование которой предполагается в этой теории, метрика сводится к

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = -e^{2\phi}\,dt^2 + e^{-2\phi}(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Вариационный принцип для полевого уравнения для ϕ

$$\delta\int(-2\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}+16\pi L)\,(-g)^{1/2}d^4x=0,$$

где L — лагранжиан вещества.

Принцип эквивалентности выполняется:

Физические законы специальной теории относительности справедливы без изменения в локально лоренцевых системах отсчета, определяемых метрикой $\mathbf{g}$. *Следствие*: ϕ, $\boldsymbol{\eta}$ и t не оказывают непосредственного воздействия на вещество; они являются «косвенно взаимодействующими полями» в смысле § 38.7.

Это самосогласованная теория, обладающая полнотой. Если бы Солнечная система покоилась относительно «системы покоя Вселенной», то теория находилась бы в согласии со всеми сегодняшними экспериментами, исключая, быть может, наблюдение расширения Вселенной. Но движение Солнечной системы относительно Вселенной приводит к серьезным противоречиям с экспериментом ([287]; § 40.8).

Дополнение 39.2. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ДЕСЯТИ ППН-ПАРАМЕТРОВ

Параметр	Что он определяет в сравнении с ОТО [1]	Значение в ОТО	Значение в теории Дикке—Бранса—Иордана [2]	Значение в теории Ни [2]
γ	Сколь велика кривизна (g_{ik}), создаваемая единичной массой покоя?	1	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	1
β	Сколь велика нелинейность в законе суперпозиции для гравитации (g_{00})?	1	1	1
β_1	Каково тяготение (g_{00}), создаваемое единичной кинетической энергией $\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2\right)$?	1	$\frac{3+2\omega}{4+2\omega}$	1
β_2	Какое тяготение (g_{00}) создается единичной потенциальной гравитационной энергией ($\rho_0 U$)?	1	$\frac{1+2\omega}{4+2\omega}$	1
β_3	Какое тяготение (g_{00}) создает единичная внутренняя энергия ($\rho_0\Pi$)?	1	1	1
β_4	Какое тяготение (g_{00}) создает единичное давление (p)?	1	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	1
ζ	Насколько большее тяготение (g_{00}) создается радиальной кинетической энергией $\left[\frac{1}{2}\rho_0(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})^2\right]$, т.е. кинетической энергией движения к наблюдателю, чем поперечной кинетической энергией?	0	0	0

Продолжение

Параметр	Что он определяет в сравнении с ОТО [1]	Значение в ОТО	Значение в теории Дикке—Бранса—Иордана [2]	Значение в теории Ни [2]
η	Насколько большее тяготение (g_{00}) создается радиальным натяжением $[\hat{r}\cdot t\cdot\hat{r}]$, чем поперечным?	0	0	0
Δ_1	Сколь велико увлечение инерциальных систем отсчета (g_{0j}), создаваемое единичным импульсом ($\rho_0 v$)?	1	$\frac{10+7\omega}{14+7\omega}$	$\frac{1}{7}$
Δ_2	Насколько легче импульсу ($\rho_0 v$) увлекать инерциальные системы в радиальном направлении (к наблюдателю), чем в поперечном?	1	1	1

[1] Это качественное описание основано на формулах (39.23).
[2] Эти теории представлены в дополнении 39.1. Вывод значений ППН-параметров для этих, а также для других теорий см. в работе [294].

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. Для подготовки к ней никакой предшествующий материал курса 2 не является обязательным, но полезны следующие разделы: 1) гл. 7 (несовместимость гравитации и специальной теории относительности), 2) § 17.6 (отсутствие первичной геометрии), 3) § 36.9 — 36.11 (генерация гравитационных волн) и 4) гл. 38 (проверки основ). Эта глава не является обязательной для подготовки к каким-либо последующим главам, но она будет полезна при чтении гл. 40 (тесты в Солнечной системе)

§ 39.4. ППН-СИСТЕМА КООРДИНАТ

Демонстрация ППН формализма

Система координат

ППН-формализм покрывает Солнечную систему (или любую другую анализируемую систему) координатами $(t, x_j) \equiv (t, x^j)$, которые, насколько это возможно, являются почти глобально лоренцевыми:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \leqslant M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}. \qquad (39.3)$$

(В этом смысле ППН-формализм похож на линеаризованную теорию; см. гл. 18.) Скорость системы координат (т. е. 4-скорость начала ее пространственных координат) выбирается так, чтобы Солнечная система в этих координатах приблизительно покоилась. [Покоится ли центр масс Солнечной системы точно или же он движется с некоторой малой скоростью $v \leqslant (M_\odot/R_\odot)^{1/2} \sim 10^{-3} \sim$ $\sim$ 300 км/с,— это должен решить тот, кто пользуется этим формализмом. Подробнее о разных возможностях выбора систем координат см. в § 39.9 и 39.12.]

ППН-координаты дают естественное «3 + 1»-расщепление пространства-времени на пространство плюс время. Такое расщепление удобно изучать, используя систему обозначений трехмерного векторного анализа в плоском пространстве, несмотря на то, что

и пространство-время, и трехмерные гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ искривлены. Получаемый в результате трехмерный формализм больше похож на ньютоновскую теорию, чем на общую теорию относительности, чего на самом деле мы и желаем: ведь наша цель — изучить малые релятивистские поправки к ньютоновской теории!

§ 39.5. ОПИСАНИЕ ВЕЩЕСТВА В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Описание вещества

Относительно ППН-координат вещество в Солнечной системе (идеализированное в виде непрерывной среды с давлением) обладает полем координатных скоростей

$$v_j \equiv dx_j/dx^0. \tag{39.4}$$

Выберем событие $\mathcal{P}$ и в его окрестности совершим преобразование к ортонормированной системе, движущейся вместе с веществом. Ориентируем пространственные оси $\mathbf{e}_{\hat{j}}$ этой сопутствующей системы так, чтобы они как можно точнее совпадали с осями ППН-координат. (Это требование более точно сформулировано в § 39.10.) В этой ортонормированной сопутствующей системе координат определим следующие величины, которые описывают состояние вещества:

$$(\text{плотность полной массы-энергии}) \equiv \rho; \tag{39.5а}$$

$$(\text{плотность барионной «массы»}) \equiv \rho_0 \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix}\text{плотность числа}\\ \text{барионов } n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{обычная масса покоя } \mu_0 \text{ на один барион}\\ \text{в некотором обычном состоянии}\end{pmatrix}; \tag{39.5б}$$

$$(\text{удельная плотность внутренней энергии}) \equiv \Pi \equiv (\rho - \rho_0)/\rho_0; \tag{39.5в}$$

$$(\text{компоненты тензора натяжений}) \equiv t_{\hat{i}\hat{j}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{i}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\hat{j}}; \tag{39.5г}$$

$$(\text{давление}) \equiv p \equiv \frac{1}{3}(t_{\hat{x}\hat{x}} + t_{\hat{y}\hat{y}} + t_{\hat{z}\hat{z}}) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix}\text{натяжение, усредненное}\\ \text{по всем направлениям}\end{pmatrix}. \tag{39.5д}$$

Анизотропии натяжения (т. е. сдвиговые напряжения) важны лишь для планет, подобных Земле, но даже там они меньше, чем изотропное давление:

$$t_{\hat{i}\hat{j}} = p\delta_{ij} + p \times [\text{поправки} \ll 1]. \tag{39.6}$$

Для многих целей, особенно при рассмотрении внутренней области Солнца, анизотропии можно не учитывать, аппроксимируя тем самым вещество Солнечной системы в виде идеальной жидкости [1]).

Внутри Солнца существенный вклад в давление p и в плотность внутренней энергии $\rho_0\Pi$ дает изотропная часть поля излучения. Однако анизотропный поток излучения не учитывается и в тензоре энергии-импульса. Такое приближение оправданно, поскольку в случае Солнца поток энергии, уносимой наружу излучением, меньше 10^{-15} внутренней плотности энергии $\rho_0\Pi$; в планетах это отношение еще меньше.

§ 39.6. СУЩНОСТЬ ПОСТНЬЮТОНОВСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Для любых гравитационно связанных конфигураций, подобных Солнечной системе, ньютоновское приближение накладывает ограничения на значения различных безразмерных физических величин (см. упражнение 39.1):

Сравнительные величины параметров разложения

$$\varepsilon^2 \equiv \text{максимальное значение ньютоновского потенциала } U \gtrsim$$
$$\gtrsim \text{значений } U,\ v^2,\ p/\rho_0,\ |t_{\hat{i}\hat{j}}|/\rho_0,\ \Pi \text{ повсюду} \qquad (39.7)$$

[В центре Солнца ньютоновский потенциал равен $\varepsilon^2 \sim 10^{-5}$. Величины p/ρ_0, $t_{\hat{i}\hat{j}}/\rho_0$ и Π в центре Солнца также порядка 10^{-5}, а повсюду в других местах они много меньше этого значения. Орбитальные скорости планет меньше 100 км/с $= 3\cdot10^{-4}$, так что $v^2 < 10^{-7}$.] Кроме того, изменения всех величин со временем при фиксированном x_j обусловлены в первую очередь движением вещества. В результате производные по времени малы по сравнению с пространственными производными на фактор $O(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{\partial A/\partial t}{\partial A/\partial x_j}\right| \sim |v_j| \lesssim \varepsilon \text{ для любой величины } A, \qquad (39.8)$$

хотя это *не так* в волновой зоне, где имеется направленный от Солнечной системы поток гравитационных волн (расстояние от Солнца больше или равно одному световому году). Следовательно, когда мы совершаем постньютоновское разложение, следует исключить из рассмотрения волновую зону. Для ее исследования требуются иные методы, например те, которые изложены в гл. 36.

---

[1]) В Солнечной системе постньютоновские поправки, обусловленные анизотропными натяжениями, столь малы по сравнению с другими постньютоновскими поправками, что в 70-х годах нет надежды их измерить. По этой причине в литературе (но не в этой книге) ППН-формализм рассматривает все натяжения на постньютоновском уровне как изотропные давления, полагая тем самым ППН-параметр η, который вводится в § 39.8—39.11, равным нулю.

Правила разложения

Условия (39.7) и (39.8) показывают, что можно разложить метрические коэффициенты по степеням малого параметра ε, рассматривая величины U, v^2, p/ρ_0, t_{ij}/ρ_0 и Π как если бы все они были порядка $O(\varepsilon^2)$ (часто они еще меньше!) и считая, что производные по времени меньше пространственных производных на фактор $O(\varepsilon)$.

В этом «постньютоновском» разложении нечетные по ε члены (т. е. такие члены, как

$$\int \frac{\rho_0(x', t)\, v_j(x', t)}{|x-x'|}\, d^3x' \sim \frac{M}{R} v \sim \varepsilon^3, \tag{39.9}$$

в которые v и $\partial/\partial t$ в сумме входят нечетное число раз) при обращении времени меняют знак на противоположный, тогда как знак четных по ε членов не меняется. Обращение времени ($x^{\bar{0}} = -x^0$) изменяет также знак g_{0j} ($g_{\bar{0}j} = -g_{0j}$), но оставляет без изменения g_{00} и g_{jk}. Поэтому *g_{0j} должны содержать только нечетные по ε члены, в то время как g_{00} и g_{ik} — только четные.* [На самом деле это перестает быть верным, когда вступает в игру торможение излучением. В реальном мире мы всегда требуем выполнения граничных условий для расходящихся волн. Но обращение времени превращает расходящиеся волны в сходящиеся, так что для обратного превращения требуется еще одно изменение знака. Поэтому члены, связанные с радиационным затуханием, в метрике ближней зоны четны по ε для g_{0j} и нечетны для g_{00} и g_{jk}. Однако торможение излучением не вступает в игру вплоть до добавок порядка ε^5 сверх ньютоновской теории (см. гл. 36), так что здесь оно не будет учитываться.]

Вид разложения метрики

Вид разложения до ньютоновского порядка уже известен (см. § 17.4 с заменой Φ на $-U$); ньютоновский закон тяготения получается лишь в том случае, если потребовать

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2U + [\text{члены} \leqslant \varepsilon^4], \\ g_{0j} &= [\text{члены} \leqslant \varepsilon^3], \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + [\text{члены} \leqslant \varepsilon^2]. \end{aligned} \tag{39.10}$$

Приведенные ограничения на поправки более высоких порядков диктуются тем требованием, чтобы пространственные компоненты уравнений для геодезических согласовывались с ньютоновскими уравнениями движения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_j}{dt^2} \approx \frac{d^2x_j}{d\tau^2} &= -\Gamma^j_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \approx -\Gamma^j_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = \\ &= -\Gamma^j_{00} - 2\Gamma^j_{0k}v_k - \Gamma^j_{k\ell}v_k v_\ell = \\ &= U_{,j} + \text{члены порядка } \{\varepsilon g_{0k,\,j};\ \varepsilon^2 g_{k\ell,\,j}\}. \end{aligned} \tag{39.11}$$

Если бы g_{0k} было порядка $O(\varepsilon)$ или больше и если бы $g_{k\ell} - \delta_{k\ell}$ было порядка $O(1)$ или больше, то мы получили бы неверный ньютоновский предел.

Разложение до все более высоких порядков продолжается по тому же образцу. Поэтому в уравнении для геодезических, а также в законе локального сохранения энергии-импульса $T^{\alpha\beta}_{\ ;\beta} = 0$ g_{00} всегда имеет тот же порядок, что и εg_{0k} и $\varepsilon^2 g_{ik}$ (см. упражнение 39.2). Поэтому постньютоновское разложение имеет вид, приведенный вкратце в дополнении 39.3.

УПРАЖНЕНИЯ

39.1. Порядки величин в гравитационно связанных системах

Воспользуйтесь ньютоновской теорией, чтобы вывести условия (39.7) для любой гравитационно связанной системы. (*Указание.* К этому вопросу имеют непосредственное отношение такие понятия, как орбитальные скорости, скорости звуковых волн и волн сдвига, теорема вириала и гидростатическое равновесие.)

39.2. Структура членов постньютоновского разложения

Убедитесь в правильности утверждения, сделанного в этом параграфе вслед за уравнением (39.11). В частности, предположите, что мы хотим оценить координатное ускорение d^2x_j/dt^2 с точностью до $\varepsilon^{2N}U_{,j}$ для некоторого целого N. Покажите, что для решения этой задачи требуется знать g_{00} с точностью до ε^{2N+2}, g_{0k} — до ε^{2N+1} и g_{ik} — до ε^{2N}. Допустите также, что T^{00} известно с точностью до $\rho_0\varepsilon^{2N}$, T^{0j} — до $\rho_0\varepsilon^{2N+1}$ и T^{ik} — до $\rho_0\varepsilon^{2N+2}$ [см., например, выражения (39.13) для $N = 0$ и (39.42) для $N = 2$]. Покажите, что для вычисления $T^{0\alpha}_{\ ;\alpha}$ с точностью до $\varepsilon^{2N+1}\rho_{0,j}$ и $T^{j\alpha}_{\ ;\alpha}$ с точностью до $\varepsilon^{2N+2}\rho_{0,j}$ необходимо знать g_{00} с точностью до ε^{2N+2}, g_{0k} — до ε^{2N+1} и g_{ik} — до ε^{2N}. Это определяет вид таблицы, приведенной в дополнении 39.3.

Дополнение 39.3. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Уровень приближения (и работы, в которых ОТО разлагается до указанного уровня)	Порядок или значение членов g_{00}	g_{0j}	g_{jk}
Плоское пустое пространство-время	-1	0	δ_{jk}
Ньютоновское приближение	$2U$	0	0
Постньютоновское приближение [340, 345]	$+$члены $\sim\varepsilon^4$	$+$члены $\sim\varepsilon^3$	$+$члены $\sim\varepsilon^2$
Постпостньютоновское приближение [346]	$+$члены $\sim\varepsilon^6$	$+$члены $\sim\varepsilon^5$	$+$члены $\sim\varepsilon^4$
Торможение излучением [254]	$+$члены $\sim\varepsilon^7$	$+$члены $\sim\varepsilon^6$	$+$члены $\sim\varepsilon^5$

§ 39.7. НЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Ньютоновское приближение

В ньютоновском порядке метрика имеет вид (39.10), а 4-скорость и тензор энергии-импульса имеют относительно ППН-системы координат следующие компоненты:

$$u^0 = +1 + O(\varepsilon^2),\ u^j = v_j + O(\varepsilon^3); \tag{39.12}$$

$$T^{00} = \rho_0 + O(\rho_0\varepsilon^2),\ T^{0j} = \rho_0 v_j + O(\rho_0\varepsilon^3),$$

$$T^{jk} = t^{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k + O(\rho_0\varepsilon^4) \tag{39.13}$$

(см. упражнение 39.3). Структура и эволюция Солнечной системы определяются двумя системами уравнений: 1. Эйнштейновские уравнения поля. Как показано в § 18.4, а также в § 17.4, в ньютоновском пределе уравнения Эйнштейна сводятся к уравнению Лапласа

$$U_{,jj} = -4\pi\rho_0, \tag{39.14а}$$

которое имеет «дальнодействующее» решение

$$U(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, d^3x'. \tag{39.14б}$$

2. Локальный закон сохранения энергии-импульса $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Временна́я компонента этого закона сводится к закону сохранения массы покоя

$$\partial\rho_0/\partial t + \partial(\rho_0 v_j)/\partial x_j = 0 + \text{относительные ошибки порядка } O(\varepsilon^2), \tag{39.15а}$$

а пространственные компоненты сводятся ко второму закону движения Ньютона $F = ma$:

$$\rho_0\, dv_j/dt = \rho_0(\partial U/\partial x_j) - \partial t_{\hat{j}\hat{k}}/\partial x_k + \text{относительные ошибки порядка } O(\varepsilon^2), \tag{39.15б}$$

$$d/dt \equiv (\text{субстанциональная производная}) \equiv \partial/\partial t + v_k\,\partial/\partial x_k \tag{39.16}$$

(см. упражнение 39.3).

Уравнения (39.14)—(39.16) вместе с уравнениями состояния, описывающими вещество планет и Солнца, лежат в основе всех ньютоновских расчетов структуры и движения Солнца и планет. Заметим, что плотность внутренней энергии $\rho_0\Pi$ нигде не входит в эти уравнения. В ньютоновской гидродинамике эта величина не играет никакой роли. Она существенна для баланса тепловой энергии Солнца; но это не имеет отношения к тому, о чем здесь идет речь.

УПРАЖНЕНИЯ

39.3. Ньютоновское приближение

а. Выведите формулы (39.13) для компонент тензора энергии-импульса в ППН-системе координат. [*Указание.* В системе, относительно которой вещество покоится («сопутствующая ортонормированная система»), $T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho = \rho_0 + O(\varepsilon^2)$, $T_{\hat{0}\hat{j}} = 0$, $T_{\hat{j}\hat{k}} = t_{\hat{j}\hat{k}}$; см. соотношения (39.5). Чтобы получить $T_{\alpha\beta}$, подвергнем эти компоненты преобразованию Лоренца с помощью чистого буста с обычной трехмерной скоростью $-v_j$.]

б. Покажите, что в ППН-системе координат уравнение $T^{0\alpha}_{\ ;\alpha} = 0$ сводится к уравнению (39.15а), а уравнение $T^{j\alpha}_{\ ;\alpha} = 0$, объединенное с (39.15а), сводится к уравнению (39.15б).

39.4. Полезная формула

Исходя из уравнений (39.15), выведите следующую полезную формулу, справедливую для любой функции $f(\boldsymbol{x}, t)$:

$$\frac{d}{dt}\int \rho_0(\boldsymbol{x}, t)\, f(\boldsymbol{x}, t)\, d^3x = \int \rho_0(\boldsymbol{x}, t)\, \frac{df(\boldsymbol{x}, t)}{dt}\, d^3x + \text{относительные ошибки } O(\varepsilon^2). \tag{39.17}$$

Здесь оба интеграла берутся по всему пространству, а df/dt — субстанциональная производная (39.16).

39.5. Тензор натяжений ньютоновского гравитационного поля

Определите «тензор натяжений ньютоновского гравитационного поля U» следующим образом:

$$\mathrm{t}_{jk} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(U_{,j}U_{,k} - \frac{1}{2}\delta_{jk}U_{,\ell}U_{,\ell}\right). \tag{39.18}$$

Покажите, что уравнения движения вещества (39.15б) можно переписать в виде

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathrm{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}}) + \text{относительные ошибки } O(\varepsilon^2), \tag{39.19}$$

$$(\rho_0 v_j)_{,t} + (\mathrm{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k)_{,k} = 0 + \text{относительные ошибки } O(\varepsilon^2). \tag{39.19'}$$

39.6. Ньютоновские теоремы вириала

а. Исходя из уравнения (39.19'), покажите, что

$$d^2 I_{jk}/dt^2 = 2\int (\mathrm{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k)\, d^3x + \text{относительные ошибки } O(\varepsilon^2), \tag{39.20a}$$

где I_{jk} — второй момент распределения массы этой системы:

$$I_{jk} = \int \rho_0 x_j x_k d^3x.$$

Это так называемая *«тензорная теорема вириала, учитывающая зависимость от времени»*.

б. Сделайте отсюда следующий вывод: если $\langle\ \rangle_{\text{дл. вр}}$ обозначает усреднение по длительному периоду времени, то

$$\left\langle \int (t_{jk} + t_{\hat{j}\,\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k)\, d^3x \right\rangle_{\text{дл. вр}} = O\left(\int \rho_0 \varepsilon^4 d^3x \right). \qquad (39.20б)$$

Это так называемая «тензорная теорема вириала».

в. Производя свертку по индексам и пользуясь уравнениями (39.18), (39.14а) и (39.5д), выведите (обычные) *теоремы вириала*

$$\frac{1}{2} d^2I/dt^2 = \int \rho_0 v^2 d^3x - \int \frac{1}{2} \rho_0 U d^3x + 3 \int p d^3x + \\ + \text{относительные ошибки } O(\varepsilon^2), \qquad (39.21а)$$

где I — след от второго момента распределения масс:

$$I = I_{jj} = \int \rho_0 r^2 d^3x,$$

и

$$\left\langle \underbrace{\int \rho_0 v^2 d^3x}_{\substack{2\times(\text{кинетическая энергия})}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int \rho_0 U d^3x}_{\substack{(\text{гравитационная энергия})}} + \underbrace{3 \int p d^3x}_{\substack{3\times(\text{интеграл от давления})}} \right\rangle_{\text{дл. вр}} = O\left(\int \rho_0 \varepsilon^4 d^3x \right). \qquad (39.21б)$$

39.7. Частота пульсаций ньютоновской звезды

Воспользуйтесь обычной теоремой вириала с учетом зависимости от времени (39.21а), чтобы вывести следующие соотношения для основной угловой частоты пульсаций невращающейся ньютоновской звезды:

$$\omega^2 = (3\bar{\Gamma}_1 - 4) \frac{\left|\begin{array}{c}\text{собственная гравитационная} \\ \text{энергия звезды}\end{array}\right|}{\begin{array}{c}\text{след второго момента распределения} \\ \text{масс в звезде}\end{array}}, \qquad (39.22а)$$

$\bar{\Gamma}_1$ = взвешенное с давлением среднее от показателя адиабаты $\equiv$

$$\equiv \int \Gamma_1 p d^3x \Big/ \int p d^3x. \qquad (39.22б)$$

УПРАЖНЕНИЯ

При выводе допустите, что пульсации являются «гомологическими», т. е. что элемент жидкости, расположенный в равновесии в точке x^j (относительно центра масс $x^j = 0$), смещается в $x^j + \xi^j(x, t)$, где

$$\xi^j = (\text{малая константа})\, x^j e^{-i\omega t}.$$

Других допущений не требуется. *Замечания*: 1. Результат (39.22) получен другим способом в дополнении 26.2 и использовался в § 24.4. 2. Допущение о гомологичности пульсаций вполне оправданно, если $|\Gamma_1 - {}^4/_3| = \text{const} \ll 1$; см. дополнение 26.2. 3. Результат (39.22) легко обобщается на медленно вращающиеся ньютоновские звезды (см., например, [347]). Его можно также обобщить на случай невращающихся постньютоновских звезд, используя общую теорию относительности (дополнение 26.2) или ППН-формализм для любой метрической теории [348]. Его можно обобщить и на медленно вращающиеся постньютоновские звезды (см. [347]).

§ 39.8. ППН-МЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Постньютоновские поправки к метрике:

Постньютоновские поправки $k_{\alpha\beta}$ к метрическим коэффициентам $g_{\alpha\beta}$ вычисляются в любой метрической теории гравитации путем длительных манипуляций с уравнениями поля. (См., например, упражнение 39.14, где это проделано для общей теории относительности.) Но даже не выбирая какую-то определенную теорию и не выписывая никаких уравнений поля, можно сделать некоторые выводы о *форме* постньютоновских поправок $k_{\alpha\beta}$. Их форма фиксирована следующими ограничениями: 1. Они должны быть постньютоновского порядка ($k_{00} \sim \varepsilon^4$, $k_{0j} \sim \varepsilon^3$, $k_{jj} \sim \varepsilon^2$). 2. Они должны быть безразмерными. 3. k_{00} должно вести себя при вращении как скаляр, k_{0j} — как компоненты 3-вектора, а k_{jk} — как компоненты 3-тензора. 4. При удалении от Солнечной системы поправки должны убывать с расстоянием по крайней мере не медленнее чем $1/r$, так что при $r = \infty$ координаты становятся глобально лоренцевыми, а пространство-время — плоским. 5. Для простоты можно допустить, что метрические компоненты образуются только величинами ρ_0, $\rho_0\Pi$, $t\hat{i}\hat{j}$, p, их произведениями со скоростью v_j и производными по времени от этих величин [1]), но не их прост-

1) законы, которым подчиняется вид поправок

[1]) Мы учитываем производные по времени, поскольку подобные члены содержатся в разложении запаздывающих интегралов до постньютоновского порядка; поэтому

$$\int \frac{\rho_0(x', t - |x - x'|)}{|x - x'|}\, d^3x' = \int \left[\frac{\rho_0(x', t)}{|x - x'|} - \frac{\partial \rho_0(x', t)}{\partial t} + \dots \right] d^3x'.$$

Однако оказывается, что при подходящем выборе координат («калибровке») все нечетные по времени запаздывающие члены (например, $\int (\partial\rho_0/\partial t)\, d^3x$

ранственными градиентами. (Этому упрощающему предположению удовлетворяют все метрические теории, изученные до 1973 г., за исключением теории Уайтхеда [291] и теорий, рассмотренных Виллом [338], которые не согласуются с экспериментом.) На дальнейшее обоснование этого предположения мы обратим внимание в упражнении 39.8.

2) построение поправок

Начнем с поправок к пространственным компонентам $k_{ij} \sim \varepsilon^2$. Существуют лишь две функциональные зависимости от ρ_0, p, Π, $t_{\hat{j}\hat{k}}$, v_j, которые убывают по крайней мере не медленнее чем $1/r$, являются безразмерными порядка $O(\varepsilon^2)$ и представляют собой симметричные 3-тензоры второго ранга:

$$\delta_{ij}U(\boldsymbol{x}, t); \quad U_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}', t)(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3x'. \qquad (39.23а)$$

Таким образом, k_{ij} должно иметь вид $k_{ij} = 2\gamma\delta_{ij}U + 2\Gamma U_{ij}$, где γ и Γ — некоторые постоянные «ППН-параметры». С помощью инфинитезимального преобразования координат [$x_{i\text{нов}} = x_{i\text{стар}} + \Gamma\partial\chi/\partial x_i$ при $\chi(\boldsymbol{x}, t) = -\int \rho_0(\boldsymbol{x}', t)\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\,d^3x'$] можно наложить условие $\Gamma = 0$, получая тем самым

$$g_{ij} = \delta_{ij} + k_{ij} = \delta_{ij}(1 + 2\gamma U) + O(\varepsilon^4). \qquad (39.23б)$$

Рассмотрим теперь $k_{0j} \sim \varepsilon^3$. Методом проб и ошибок получаем лишь две векторные функциональные зависимости, которые спадают как $1/r$ или быстрее, являются безразмерными порядка $O(\varepsilon^3)$. Они имеют следующий вид:

$$V_j(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}', t)\, v_j(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x', \qquad (39.23в)$$

$$W_j(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}', t)\,[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t)](x_j - x_j')\, d^3x'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}. \qquad (39.23г)$$

Таким образом, k_{0j} должно быть их линейной комбинацией, которая включает неизвестные постоянные (ППН-параметры) Δ_1 и Δ_2:

$$g_{0j} = k_{0j} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + O(\varepsilon^5). \qquad (39.23д)$$

Наконец, рассмотрим $k_{00} \sim \varepsilon^4$. Методом проб и ошибок получаем целый ряд членов, которые можно скомбинировать с ньютоновской частью величины g_{00} так, что они дают

$$g_{00} = -1 + 2U + k_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 + 4\Psi - \zeta\mathscr{A} - \eta\mathscr{D}, \qquad (39.23е)$$

обращаются в нуль, за исключением «пост$^{5/2}$-ньютоновского порядка» и более высоких порядков аппроксимации; там эти члены приводят к торможению излучением (см. дополнение 39.3). Например, $\int (\partial\rho_0/\partial t)\, d^3x = d/dt \int \rho_0\, d^3x$ обращается в нуль благодаря закону сохранения числа барионов.

где [1])

$$\Psi(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)\,\psi(x', t)}{|x - x'|}\, d^3x',$$

$$\psi = \beta_1 v^2 + \beta_2 U + \frac{1}{2}\beta_3 \Pi + \frac{3}{2}\beta_4 p/\rho_0, \qquad (39.23ж)$$

$$\mathcal{A}(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)\,[(x - x')\cdot v(x', t)]^2}{|x - x'|^3}\, d^3x', \qquad (39.23з)$$

$$\mathcal{D}(x, t) = \int \frac{\left[t_{\hat{j}\,\hat{k}}(x', t) - \frac{1}{3}\delta_{jk} t_{\hat{\ell}\,\hat{\ell}}(x', t)\right](x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|x - x'|^3}\, d^3x'. \qquad (39.23и)$$

Величины β, β_1, β_2, β_3, β_4, ζ, η также являются неизвестными постоянными (ППН-параметрами). В литературе обычно член $-\eta\mathcal{D}$ в g_{00} не учитывается (см. примечание на стр. 320).

Возможен еще один член: можно было бы положить

$$g_{00} = [\text{величина, определяемая (39.23е)}] - \Sigma \int\int \frac{\rho_0(x', t)\,\rho_0(x'', t)\,[(x - x')\cdot(x' - x'')]}{|x - x'|\,|x' - x''|^3}\, d^3x'\, d^3x'', \qquad (39.24)$$

где Σ — еще один ППН-параметр. [Можно показать, воспользовавшись ньютоновскими выражениями (39.14)—(39.16), что это выражение вдали от Солнечной системы спадает как $1/r$.] Если включен такой член с Σ, то мы могли бы избавиться от него, совершая инфинитезимальное преобразование координат

$$x^0_{\text{нов}} = x^0_{\text{стар}} - \frac{1}{2}\Sigma \int \frac{\rho_0(x', t)\,[(x - x')\cdot v(x', t)]}{|x - x'|}\, d^3x' \qquad (39.25)$$

(см. упражнение 39.9). Таким образом, учитывать член с Σ нет никакой необходимости.

Жесткость системы координат

Удаление члена с Σ из g_{00} означает, что временная координата уже строго фиксирована с точностью до постньютоновского порядка:

неопределенности в x^0 порядка лишь $O(R_\odot \varepsilon^5) \sim 10^{-14}$ с. (39.26а)

Пространственные координаты также жестко фиксированы в постньютоновском порядке:

неопределенности x^j порядка лишь $O(R_\odot \varepsilon^4) \sim 0{,}1$ см, (39.26б)

так как любое преобразование вида

$x^j_{\text{нов}} = x^j_{\text{стар}} +$ члены, зависящие от положения, порядка $O(\varepsilon^2 R_\odot)$

[1]) *Предостережение.* В литературе всегда используется обозначение Φ там, где мы используем Ψ для функционала (39.23ж) и φ вместо нашего ψ. Мы вынуждены нарушить общепринятое обозначение, чтобы избежать путаницы с ньютоновским потенциалом $\Phi = -U$. Однако мы настоятельно советуем всем придерживаться общепринятых обозначений.

нарушило бы наверняка вид (39.23б) пространственной части метрики.

Кратко о ППН-метрике и ППН-параметрах

Резюме. Почти для каждой из когда-либо предложенных метрических теорий гравитации метрические коэффициенты имеют вид (39.23) с точностью до постньютоновского порядка. Одна теория отличается от другой значениями своих десяти «постньютоновских параметров» β, β_1, β_2, β_3, β_4, γ, ζ, η, Δ_1 и Δ_2. Эти параметры определяются путем сравнения уравнений поля данной теории с формой (39.23) постньютоновской метрики. Значения этих параметров и качественное их описание для общей теории относительности и для некоторых других теорий даны в дополнении 39.2.

39.8. Отсутствие в постньютоновском пределе членов типа «метрика создает метрику»

УПРАЖНЕНИЯ

Выписывая постньютоновские метрические поправки, можно поддаться искушению учесть те члены, которые генерируются действием одного ньютоновского потенциала без *непосредственной* помощи вещества. В конце концов, общая теория относительности и другие метрические теории являются нелинейными, так что двухступенчатый процесс (вещество) $\to U \to$ (постньютоновские метрические поправки) кажется совершенно естественным. *Покажите*, что подобные члены не нужно учитывать, поскольку выражения (39.14)—(39.16) ньютоновского приближения позволяют представить эти члены в виде интегралов, берущихся непосредственно по распределению вещества. В частности, покажите, что

$$\int \frac{\partial^2 U(x', t)/\partial x_j' \, \partial t}{|x - x'|} d^3x' = 2\pi [V_j(x, t) - W_j(x, t)], \qquad (39.27)$$

где V_j и W_j определены выражениями (39.23в), (39.23г); покажите также, что

$$\int \frac{[\partial U(x', t)/\partial x_j'][\partial U(x', t)/\partial x_j']}{|x - x'|} d^3x' =$$
$$= -2\pi [U(x, t)]^2 + 4\pi \int \frac{\rho_0(x', t) U(x', t)}{|x - x'|} d^3x'. \qquad (39.28)$$

Заметим, что члены в правой части (39.27) и (39.28) уже учтены в выражениях (39.23д), (39.23е) для g_{0j} и g_{00}.

39.9. Устранение члена с Σ из g_{00}

Покажите, что, как утверждалось в тексте, преобразование координат (39.25) устраняет член с Σ из метрического коэффициента g_{00}, который дается выражением (39.24).

39.10. Проверка формы постньютоновских поправок

Проверьте утверждения, сделанные в тексте непосредственно перед формулами (39.23а), (39.23б), (39.23в) и (32.23е).

---

§ 39.9. СКОРОСТЬ ППН-КООРДИНАТ ОТНОСИТЕЛЬНО «УНИВЕРСАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОКОЯ»

До сих пор неявно предполагалось, что центр масс Солнечной системы покоится в ППН-системе координат. Допустимо ли такое предположение? Иначе говоря, всегда ли можно так подобрать ППН-систему координат, чтобы ее начало двигалось с любой наперед заданной скоростью (например, со скоростью Солнечной системы), или же ППН-система координат жестко связана с некоторой «универсальной системой покоя»?

В общей теории относительности геометрия искривленного пространства-времени не выделяет какие-либо предпочтительные системы координат (исключая случаи особой симметрии). Вот почему мы предполагаем, что скорость ППН-системы координат можно выбирать произвольно. Иначе говоря, мы ожидаем, что весь ППН-формализм для общей теории относительности инвариантен относительно преобразований Лоренца ППН-координат [возможно, в комбинации с «инфинитезимальными преобразованиями координат», предназначенными для того, чтобы оставить в силе калибровочные условия отсутствия членов с Σ и U_{jk}, данных в (39.24) и (39.23а)]. Напротив, в теории гравитации Ни (дополнение 39.1) геометрия пространства-времени *всегда* выделяет предпочтительную систему координат —«систему покоя Вселенной». В таком случае было бы неудивительно, если бы оказалось, что ППН-система координат жестко связана с этой универсальной системой покоя.

Теории гравитации с предпочтительной системой отсчета

Согласно исследованиям Вилла [352] и Вилла и Нордветта [287], приведенные интуитивные соображения оказываются справедливыми. Когда мы имеем дело с общей теорией относительности или с другими теориями гравитации, в которых «первичной геометрии» нет или она лишь незначительно сказывается, мы можем свободно выбирать скорость ППН-системы координат (в некоторый начальный момент времени). Но для теорий, подобных теории Ни, с предпочтительной «универсальной системой покоя» («теорий с предпочтительной системой») лишь в этой предпочтительной системе координат постньютоновская метрика может принимать форму, полученную в предыдущем параграфе [формулы (39.23)]. Это ограничение, накладываемое на ППН-метрику, не означает, что в теориях с предпочтительной системой координат все расчеты должны проводиться исключительно в рамках универсальной системы покоя. Скорее, это означает, что для таких

теорий ППН-метрика требует обобщения, учитывающего движение системы координат относительно универсальной системы покоя.

Обобщение ППН-метрики на движущиеся системы отсчета

Требуемого обобщения можно достичь, 1) подвергая ППН-метрику (39.23) лоренцеву бусту от предпочтительной системы $\{x^\alpha_{\text{стар}}\}$ к новой ППН-системе координат $\{x^\alpha_{\text{нов}}\}$, движущейся относительно первой со скоростью $\boldsymbol{w}$, 2) производя изменение калибровки, предназначенное для сохранения максимальной возможной простоты метрических коэффициентов. Буст вместе с изменением калибровки имеет следующий вид [287]:

$$\boldsymbol{x}_{\text{стар}} = \boldsymbol{x}_{\text{нов}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{\text{нов}}\cdot\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{w} + \left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\right)\boldsymbol{w}t_{\text{нов}} + O(\varepsilon^5 t_{\text{нов}} + \varepsilon^4 \boldsymbol{x}_{\text{нов}}), \tag{39.29а}$$

$$t_{\text{стар}} = t_{\text{нов}}\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2+\frac{3}{8}\boldsymbol{w}^4\right) + \left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\right)\boldsymbol{x}_{\text{нов}}\cdot\boldsymbol{w} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\Delta_2+\zeta-1\right)w_j\frac{\partial\chi}{\partial x^j_{\text{нов}}}}_{\text{изменение калибровки}} + O(\varepsilon^6 t_{\text{нов}} + \varepsilon^5 \boldsymbol{x}_{\text{нов}}), \tag{39.29б}$$

$$\chi(t_{\text{нов}}, \boldsymbol{x}_{\text{нов}}) \equiv -\int \rho_0(t_{\text{нов}}, \boldsymbol{x}'_{\text{нов}})\,|\,\boldsymbol{x}_{\text{нов}} - \boldsymbol{x}'_{\text{нов}}\,|\,d^3x'_{\text{нов}}. \tag{39.29в}$$

(*Замечание.* Мы требуем в духе постньютоновского приближения, чтобы скорость $\boldsymbol{w}$ новой ППН-системы относительно универсальной системы покоя не превосходила характерные внутренние скорости в системе:

$$|\,\boldsymbol{w}\,| \lesssim \varepsilon.) \tag{39.30}$$

Это изменение координат приводит к соответствующим изменениям скорости вещества:

$$\boldsymbol{v}_{\text{стар}} = \frac{d\boldsymbol{x}_{\text{стар}}}{dt_{\text{стар}}} = \boldsymbol{v}_{\text{нов}}\left(1-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{нов}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\right) + \boldsymbol{w}\left(1-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{нов}}\right) + O(\varepsilon^5). \tag{39.31}$$

Длинные, но простые выкладки (упражнение 39.11) дают для метрики в новых ППН-координатах следующие компоненты (здесь и далее индекс «нов» мы опускаем):

Окончательный вид метрики

$$g_{jk} = \delta_{jk}(1+2\gamma U) + O(\varepsilon^4), \tag{39.32а}$$

$$g_{0j} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right)w_j U - \alpha_2 w_k U_{kj} + O(\varepsilon^5), \tag{39.32б}$$

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 + 4\Psi - \zeta\mathcal{A} - \eta\mathcal{D} + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\,\boldsymbol{w}^2 U + (2\alpha_3 - \alpha_1)\,w_j V_j - \alpha_2 w_j w_k U_{jk} + O(\varepsilon^6). \tag{39.32в}$$

Здесь α_1, α_2, α_3 — некоторые комбинации ППН-параметров:

$$\alpha_1 = 7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4, \tag{39.33а}$$

$$\alpha_2 = \Delta_2 + \zeta - 1, \tag{39.33б}$$

$$\alpha_3 = 4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta. \tag{39.33в}$$

Появляющиеся здесь «гравитационные потенциалы» U, V_j, W_j, Ψ, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{D}$ должны вычисляться в новой «движущейся ППН-системе координат» по тому же рецепту, что и в универсальной системе покоя. Поэтому их функциональный вид остается прежним, но их значения в заданном событии теперь другие (см. упражнение 39.11:)

$$U(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)}{|x - x'|} d^3x', \tag{39.34а}$$

$$V_j(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t) v_j(x', t)}{|x - x'|} d^3x'; \tag{39.34б}$$

$$W_j(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)[(x - x')\cdot r(x', t)](x_j - x'_j)\, d^3x'}{|x - x'|^3}, \tag{39.34в}$$

$$\Psi(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)\psi(x', t)}{|x - x'|} d^3x',$$

$$\psi = \beta_1 v^2 + \beta_2 U + \frac{1}{2}\beta_3 \Pi + \frac{3}{2}\beta_4 p/\rho_0, \tag{39.34г}$$

$$\mathscr{A}(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)[(x - x')\cdot v(x', t)]^2}{|x - x'|^3} d^3x', \tag{39.34д}$$

$$\mathscr{D}(x, t) = \int \frac{\left[t_{\hat{j}\hat{k}}(x', t) - \frac{1}{3}\delta_{jk} t_{\hat{\ell}\hat{\ell}}(x', t)\right](x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|x - x'|^3} d^3x'. \tag{39.34е}$$

Величина U_{jk} представляет собой гравитационный потенциал, определенный выражением (39.23а):

$$U_{jk}(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t)(x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|x - x'|^3} d^3x'. \tag{39.34ж}$$

Отметим, что скорость $\boldsymbol{w}$ ППН-системы координат относительно универсальной системы покоя появляется в явном виде в ППН-метрике лишь в том случае, если хотя бы один из коэффициентов α_1, α_2, α_3 не равен нулю. Таким образом, теории, в которых $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (например, общая теория относительности), *не обладают* предпочтительной универсальной системой покоя в постньютоновском пределе; все ППН-системы в этих теориях «равноправны». Напротив, теории, в которых по крайней мере один из коэффициентов α_1, α_2, α_3 не равен нулю (например, теория Нп), *обладают* предпочтительной системой.

Обобщенная форма ППН-метрики (39.32) благодаря той процедуре, которой мы пользовались при ее построении, инвариантна

относительно лоренцева буста и согласованного с бустом выбора калибровки («постгалилеевское преобразование, см. [343]):

Постгалилеевская инвариантность

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\text{стар}} &= \boldsymbol{x}_{\text{нов}} + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{\text{нов}}\cdot\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\beta} + \left(1+\tfrac{1}{2}\beta^2\right)\boldsymbol{\beta} t_{\text{нов}} + \\ &\quad + O(\varepsilon^5 t_{\text{нов}} + \varepsilon^4 \boldsymbol{x}_{\text{нов}}), \\ t_{\text{стар}} &= \left(1+\tfrac{1}{2}\beta^2+\tfrac{3}{8}\beta^4\right) t_{\text{нов}} + \left(1+\tfrac{1}{2}\beta^2\right)\boldsymbol{x}_{\text{нов}}\cdot\boldsymbol{\beta} + \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{2}\Delta_2 + \zeta_1 - 1\right)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\text{нов}}\chi + O(\varepsilon^6 t_{\text{нов}} + \varepsilon^5 \boldsymbol{x}_{\text{нов}}). \end{aligned} \tag{39.35}$$

Конечно, она инвариантна также относительно пространственных вращений.

39.11. Переход к движущейся системе

УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что замена координат (39.29) приводит к изменению коэффициентов ППН-метрики от формы (39.23) к форме (39.32). [*Указания*: 1. Твердо помните, что потенциалы U, V_j, W_j, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{Z}$ не являются скалярными полями. Каждая система координат обладает своими собственными потенциалами. Например, воспользовавшись соотношениями (39.29) в интеграле для $U_{\text{стар}}$, находим

$$\begin{aligned} U_{\text{стар}}(\boldsymbol{x}_{\text{стар}}, t_{\text{стар}}) &= \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}'_{\text{стар}}, t_{\text{стар}})}{|\boldsymbol{x}_{\text{стар}} - \boldsymbol{x}'_{\text{стар}}|}\, d^3x'_{\text{стар}} = \\ &= \left[U_{\text{нов}} - w_j\left(V_{j\text{нов}} - W_{j\text{нов}} + \tfrac{1}{2} w_j w_k \chi_{,jk}\right)\right]_{\boldsymbol{x}_{\text{нов}},\, t_{\text{нов}}} + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \tag{39.36}$$

2. Может оказаться полезным закон сохранения барионов (39.44).]

---

§ 39.10. ППН-ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Движение Солнечной системы подчиняется уравнениям $T^{\alpha\beta}_{\ ;\beta} = 0$. Прежде чем заниматься их изучением, необходимо вычислить постньютоновские поправки к тензору энергии-импульса в ППН-системе координат. Для этого требуется перейти от сопутствующей ортонормированной системы $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$, где

$$T^{\hat{0}\,\hat{0}} = \rho_0(1+\Pi), \quad T^{\hat{0}\,\hat{j}} = 0, \quad T^{\hat{j}\,\hat{k}} = t_{\hat{j}\,\hat{k}}, \tag{39.37}$$

к ППН-системе координат. Это преобразование можно проделать в два этапа: вторым этапом является преобразование

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{\tilde{0}} &\equiv [1 - U + O(\varepsilon^4)]\,\mathbf{d}t + \\ &\quad + \left[\tfrac{7}{2}\Delta_1 V_j + \tfrac{1}{2}\Delta_2 W_j + \left(\tfrac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2\right) w_j U + \alpha_2 w_k U_{kj} + O(\varepsilon^5)\right]\mathbf{d}x^j, \end{aligned} \tag{39.38а}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\tilde{j}} \equiv [(1+\gamma U)\,\delta_{jk} + O(\varepsilon^4)]\,\mathbf{d}x^k + O(\varepsilon^5)\,\mathbf{d}t \tag{39.38б}$$

между ППН-системой координат и связанной с ней ортонормированной системой; первым этапом служит чисто лоренцево преобразование (буст) между двумя ортонормированными системами $\tilde{\omega}^{\tilde{\alpha}}$ и $\omega^{\hat{\alpha}}$; 4-скорость этого буста равна взятой со знаком минус 4-скорости вещества, которая имеет компоненты

$$u^j = v_j u^0, \quad u^0 = 1 + \frac{1}{2}v^2 + U + O(\varepsilon^4) \text{ в ППН-системе,} \tag{39.39}$$

$$\left.\begin{aligned} u^{\tilde{j}} &= v_{\tilde{j}} u^{\tilde{0}}, \quad u^{\tilde{0}} = 1 + \frac{1}{2}v^2 + O(\varepsilon^4), \\ v_{\tilde{j}} &= v_j [1 + (1+\gamma) U] \end{aligned}\right\} \text{ в системе } \tilde{\omega}^{\tilde{\alpha}}. \tag{39.40}$$

Комбинируя буст, обычная трехмерная скорость которого равна $\beta_{\tilde{j}} = -v_{\tilde{j}}$, с преобразованием (39.38) и обращая полученное выражение, приходим к следующему результату (упражнение 39.12):

Преобразование от системы покоя вещества к ППН-системе координат

$$\mathbf{d}x^\alpha = A^\alpha{}_{\hat{\beta}}\, \omega^{\hat{\beta}} \left\{ \begin{array}{l} \omega^{\hat{\beta}} = \text{ортонормированный сопутствующий базис,} \\ \mathbf{d}x^\alpha = \text{базис ППН-координат;} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} A^0_{\hat{0}} &= 1 + \frac{1}{2}v^2 + U + O(\varepsilon^4), \\ A^0_{\hat{j}} &= v_j \left[1 + \frac{1}{2}v^2 + (2+\gamma)U\right] - \frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + \\ &\quad + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right) w_j U - \alpha_2 w_k U_{kj} + O(\varepsilon^5), \\ A^j_{\hat{0}} &= v_j \left[1 + \frac{1}{2}v^2 + U\right] + O(\varepsilon^5), \\ A^j_{\hat{k}} &= (1 - \gamma U)\,\delta_{jk} + \frac{1}{2} v_j v_k + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{39.41}$$

Координатная форма тензора энергии-импульса

Это преобразование, примененное к тензору энергии-импульса (39.37), дает в ППН-системе координат

$$T^{00} = \rho_0 (1 + \Pi + v^2 + 2U) + O(\rho_0 \varepsilon^4), \tag{39.42а}$$

$$T^{0j} = \rho_0 (1 + \Pi + v^2 + 2U)\, v_j + t_{\hat{j}\,\hat{m}} v_m + O(\rho_0 \varepsilon^5), \tag{39.42б}$$

$$\begin{aligned} T^{jk} &= t_{\hat{j}\,\hat{k}}\,(1 - 2\gamma U) + \rho_0 (1 + \Pi + v^2 + 2U)\, v_j v_k + \\ &\quad + \frac{1}{2}(v_j t_{\hat{k}\,\hat{m}} v_m + v_k t_{\hat{j}\,\hat{m}} v_m) + O(\rho_0 \varepsilon^6). \end{aligned} \tag{39.42в}$$

УПРАЖНЕНИЕ

39.12. Переход от сопутствующей системы к ППН-системе координат

Проведите во всех деталях вывод матрицы преобразования (39.41) и при этом вычислите поправки порядка $O(\varepsilon^4)$ к $A^0_{\hat{0}}$.

---

§ 39.11. ППН-УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Постньютоновские поправки к ньютоновским уравнениям движения (39.15) и (39.16) выводятся из закона сохранения числа барионов $(\rho_0 u^\alpha)_{;\alpha} = 0$, а также из локального закона сохранения энергии-импульса $T^{\alpha\beta}_{\ \ ;\beta} = 0$. Наиболее простым из уравнений движения является закон сохранения числа барионов. Точное выражение этого закона таково: $(\rho_0 u^\alpha)_{;\alpha} = (1/\sqrt{-g})\ (\sqrt{-g}\rho_0 u^\alpha)_{,\alpha} = 0$. Введем новую величину:

$$\rho^* \equiv \rho_0 \left(1 + \frac{1}{2} v^2 + 3\gamma U\right) = \rho_0 u^0 \sqrt{-g} + O(\rho_0 \varepsilon^4) \qquad (39.43)$$

[см. (39.39) для u^0 и (39.32) для метрики]. Тогда закон сохранения массы покоя принимает ту же форму, что и в ньютоновском приближении (39.15а), с той лишь разницей, что теперь он более точен:

$$\rho^*_{,t} + (\rho^* v_j)_{,j} = 0 + \text{ошибки порядка } O(\rho_{0,\,j}\varepsilon^5). \qquad (39.44)$$

Закон сохранения числа барионов

Следующим по простоте является уравнение движения $T^{0\alpha}_{\ \ ;\alpha} = 0$. Простые выкладки с использованием метрики, заданной формулами (39.32), а также формул (39.42) для энергии-импульса дают

$$[\rho_0 (1 + \Pi + v^2 + 2U)]_{,t} + [\rho_0 (1 + \Pi + v^2 + 2U) v_j + t_{\hat{j}\,\hat{m}} v_m]_{,j} +$$
$$+ (3\gamma - 2)\rho_0 U_{,t} + (3\gamma - 3)\rho_0 v_k U_{,k} = O(\rho_{0,\,j}\varepsilon^5). \qquad (39.45)$$

Вычитая отсюда уравнение (39.44) и используя уравнения движения (39.15) и (39.16), чтобы упростить некоторые члены, для которых применимо ньютоновское приближение, получаем

$$\rho_0\, d\Pi/dt + t_{\hat{j}\,\hat{k}} v_{j,\,k} = 0 + \text{ошибки порядка } O(\rho_{0,\,j}\varepsilon^5). \qquad (39.46)$$

Закон сохранения энергии

Как нетрудно заметить, это не что иное, как первый закон термодинамики (локальный закон сохранения энергии) в пренебрежении потоком энергии через вещество. (Пренебрежение потоком энергии было обосновано в § 39.5.) Этот первый закон термодинамики в действительности является постньютоновским гидродинамическим уравнением, а не ньютоновским, поскольку в ньютоновском приближении Π не влияет на гидродинамическое движение (см. § 39.7).

Последнее из уравнений движения $T^{j\alpha}_{\ \ ;\alpha} = 0$ сводится к постньютоновскому уравнению Эйлера

$$\rho^* \frac{dv_j}{dt} - \rho^* U_{,j} + [t_{\hat{j}\,\hat{k}}(1 + 3\gamma U)]_{,k} - t_{\hat{j}\,\hat{k}\,,\,k}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi\right) - \frac{t_{\hat{j}\,\hat{k}} t_{\hat{k}\,\hat{\ell},\,\ell}}{\rho^*} +$$
$$+ \rho^* \frac{d}{dt}\left[(2\gamma + 2) U v_j - \frac{1}{2}(7\Delta_1 + \Delta_2) V_j - \frac{1}{2}\alpha_1 U w_j\right] -$$
$$- v_j \rho^* U_{,t} + v_k t_{\hat{k}\,\hat{j},\,t} + \frac{1}{2}\Delta_2 \rho^* (V_j - W_j)_{,t} +$$
$$+ \frac{1}{2}\rho^* [(7\Delta_1 + \Delta_2) v_k + (\alpha_1 - 2\alpha_3) w_k] V_{k,j} -$$

Постньютоновское уравнение Эйлера

$$-\rho^*\left[2\Psi-\frac{1}{2}\zeta\mathcal{A}-\frac{1}{2}\eta\mathcal{Z}-\frac{1}{2}\alpha_2 w_i w_k U_{ik}+\alpha_2 w_i(V_i-W_i)\right]_{,j}-$$

$$-\rho^* U_{,j}\left[\gamma v^2-\frac{1}{2}\alpha_1 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\boldsymbol{w}^2-(2\beta-2)U+3\gamma p/\rho^*\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(v_{j,k}t_{\hat{k}\hat{m}}v_m-t_{\hat{j}\hat{m}}v_{m,k}v_k)+\frac{1}{2}[v_m(t_{\hat{m}\hat{j}}v_k)_{,k}-v_j(t_{\hat{k}\hat{\ell}}v_k)_{,\ell}]=0. \tag{39.47}$$

Пространственные производные обозначаются запятыми; d/dt — субстанциональная производная по времени [уравнение (39.16)].

Уравнения (39.44), (39.46) и (39.47) представляют собой полный набор уравнений движения в постньютоновском приближении.

УПРАЖНЕНИЯ

39.13. Уравнения движения

Проведите во всех деталях вывод уравнений движения (39.44), (39.46) и (39.47). В частности, получите следующие значения символов Кристоффеля в ППН-системе координат:

$$\Gamma^0_{00}=-U_{,t}+O(U_{,j}\varepsilon^3),\quad \Gamma^0_{0j}=-U_{,j}+O(U_{,j}\varepsilon^2),$$

$$\Gamma^0_{jk}=\gamma U_{,t}\delta_{jk}+\frac{7}{2}\Delta_1 V_{(j,k)}+\frac{1}{2}\Delta_2 W_{(j,k)}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_2\right)w_{(j}U_{,k)}+\alpha_2 w_i U_{i(j,k)}+O(U_{,j}\varepsilon^3);$$

$$\Gamma^j_{00}=-U_{,j}+\left[(\beta+\gamma)U^2-2\Psi+\frac{1}{2}\zeta\mathcal{A}+\frac{1}{2}\eta\mathcal{Z}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\boldsymbol{w}^2U+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_3)w_iV_i+ \tag{39.48}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\alpha_2 w_i w_k U_{ik}\right]_{,j}-\frac{7}{2}\Delta_1 V_{j,t}-\frac{1}{2}\Delta_2 W_{j,t}+$$

$$+\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\right)w_j U_{,t}-\alpha_2 w_i U_{ij,t}+O(U_{,j}\varepsilon^4),$$

$$\Gamma^j_{0k}=\gamma U_{,t}\delta_{jk}-\left(\frac{7}{2}\Delta_1+\frac{1}{2}\Delta_2\right)V_{[j,k]}-\frac{1}{2}\alpha_1 w_{[j}U_{,k]}+O(U_{,j}\varepsilon^3),$$

$$\Gamma^j_{k\ell}=-\gamma(U_{,j}\delta_{k\ell}-2U_{,(k}\delta_{\ell)j})+O(U_{,j}\varepsilon^2).$$

Здесь квадратные скобки, заключающие тензорные индексы, обозначают антисимметризацию, а круглые скобки — симметризацию. При выводе указанных формул может оказаться полезным доказать и использовать следующие соотношения:

$$\chi(t,\boldsymbol{x})=-\int\rho_0(t,\boldsymbol{x}')\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\,d^3x', \tag{39.49a}$$

$$\chi_{,jk}=-\delta_{jk}U+U_{jk}, \tag{39.49б}$$

$$\chi_{,tt} = V_i - W_i + O(\varepsilon^5), \tag{39.49в}$$

$$W_{[k,\,j]} = V_{[k,\,j]}. \tag{39.50}$$

Здесь χ — функция, первоначально определенная выражением (39.29в).

39.14. Постньютоновское приближение к общей теории относительности

Совершите постньютоновское разложение эйнштейновских уравнений поля, чтобы получить значения ППН-параметров общей теории относительности, которые приведены в дополнении 39.2. При вычислениях, по-видимому, лучше всего следовать методу Чандрасекара [442]. Положите $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ и предположите, что

$$h_{00} = O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^4),\ h_{0j} = O(\varepsilon^3),\ h_{jk} = 0\ (\varepsilon^2). \tag{39.51}$$

Выберите временну́ю и пространственные координаты так, чтобы удовлетворить четырем «калибровочным условиям»

$$\left.\begin{aligned} h_{jk,\,k} - \frac{1}{2} h_{,j} &= O(\varepsilon^4/R_\odot) \\ h_{0k,\,k} - \frac{1}{2} h_{kk,\,0} &= O(\varepsilon^5/R_\odot) \end{aligned}\right\} \text{ где } h = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = -h_{00} + h_{\ell\,\ell}. \tag{39.52}$$

а. Покажите, что пространственные калибровочные условия представляют собой постньютоновские приближения к калибровочным условиям (35.1а), которые использовались при изучении слабых гравитационных волн, но этого нельзя сказать о временно́м калибровочном условии.

б. Воспользуйтесь калибровочными условиями, а также соотношениями (8.24) и (8.47), взятыми в постньютоновском пределе, чтобы получить для тензора Риччи с точностью до порядка линеаризации следующие выражения:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} h_{00,\,mm} + O(\varepsilon^4/R_\odot^2), \quad R_{jk} = -\frac{1}{2} h_{jk,\,mm} + O(\varepsilon^4/R_\odot^2), \tag{39.53а}$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2} h_{0j,\,mm} - \frac{1}{4} h_{00,\,0j} + O(\varepsilon^5/R_\odot^2). \tag{39.53б}$$

в. Комбинируя эти выражения с ньютоновской формулой (39.13) для тензора энергии-импульса и с уравнением (39.27), получите следующие метрические коэффициенты с точностью до порядка линеаризации:

$$h_{00} = 2U + k_{00} + O(\varepsilon^6), \quad h_{0j} = -\frac{7}{2} V_j - \frac{1}{2} W_j + O(\varepsilon^5), \tag{39.54}$$

↑ — [неизвестные постньютоновские поправки

$$h_{jk} = 2U\delta_{jk} + O(\varepsilon^4).$$

УПРАЖНЕНИЯ

Здесь U, V_j и W_j следует рассматривать как величины, определенные выражениями (39.34а)—(39.34в). Сравнивая эти метрические коэффициенты с выражениями (39.32), получите для общей теории относительности

$$\gamma = 1, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1. \tag{39.55}$$

г. Зная эту метрику в приближении линеаризации, можно провести анализ, описанный в § 39.10 (используя всюду $\gamma = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$), чтобы получить постньютоновские поправки к тензору энергии-импульса [формула (39.42) с $\gamma = 1$].

д. Вычислите аналогично этому постньютоновские поправки к компоненте R_{00} тензора Риччи, пользуясь соотношением $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, формулой (39.54) для $h_{\alpha\beta}$ и калибровочными условиями (39.52). Должен получиться ответ

$$R_{00} = \left(-U - \frac{1}{2}k_{00} - U^2\right)_{,mm} + 4UU_{,mm} + O(\varepsilon^6/R_\odot^2). \tag{39.56}$$

е. Получите уравнение Эйнштейна $R_{00} = 8\pi(T_{00} - {}^1/_2 g_{00}T)$ с точностью до постньютоновского порядка, решите его и найдите тем самым постньютоновскую поправку к метрике

$$k_{00} = -2U^2 + 4\Psi, \tag{39.57}$$

где Ψ определяется формулой (39.43г) при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$. Сравнивая с выражениями (39.32в) и (39.34г), получите для общей теории относительности

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1, \quad \zeta = \eta = 0. \tag{39.58}$$

ж. Зная полную постньютоновскую метрику и полный тензор энергии-импульса, можно провести вычисления, упомянутые в § 39.11 (используя $\gamma = \beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$, $\zeta = \eta = 0$), и получить постньютоновские уравнения движения вещества [уравнения (39.44), (39.46) и (39.47)].

§ 39.12. СВЯЗЬ ППН-КООРДИНАТ С ОКРУЖАЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Остается выяснить один важный вопрос: Какова ориентация ППН-системы координат относительно окружающей Вселенной? Более конкретно: Вращается ли ППН-система координат относительно «неподвижных звезд на небе» или же она в каком-то смысле «жестко связана» с ними? Чтобы ответить на этот вопрос, представим себе, что ППН-формализм используется для исследования Солнечной системы. Не будем делать никаких предположений о скорости движения Солнечной системы относительно ППН-системы координат. Тогда по мере удаления от Солнца за орбиту Земли, затем на орбиту Плутона и далее в межзвездное пространство мы

видим, как ППН-система координат по своим глобальным свойствам все более приближается к лоренцевой ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(M_\odot/r)$). Таким образом, *вдали от Солнечной системы ППН-система координат становится «лоренцевой системой, движущейся относительно Галактики»*. Это означает, что пространственные оси ППН-системы координат ведут себя так, как если бы они были связаны с гироскопами, расположенными вдали от Солнечной системы. Или, что эквивалентно, пространственные оси ППН-системы координат испытывают перенос Ферми — Уолкера через пространство-время Галактики и Вселенной.

ППН-система координат Солнечной системы связана с локально лоренцевой системой отсчета Галактики

§ 39.13. ОБЗОР ППН-ФОРМАЛИЗМА

Краткое изложение ППН-формализма, построенного в этой главе, дано в дополнении 39.4. В последнее время в большей части литературы используется иной по сравнению с этой книгой набор ППН-параметров; переход от одного набора параметров к другому дан в дополнении 39.5.

39.15. Система многих тел в постньютоновском пределе общей теории относительности

УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрите в постньютоновском пределе общей теории относительности систему, состоящую из многих гравитационно взаимодействующих тел, расстояния между которыми велики по сравнению с их размерами (например, Солнечную систему). В качестве идеализации представьте каждое тело сферически симметричным, свободным от внутренних движений, и пусть внутренние натяжения в этом теле изотропны $t^{\hat{j}\hat{k}} = \delta_{jk} p$. Пусть мировая линия центра тела A в некоторой выбранной ППН-системе координат есть $\boldsymbol{x}_A(t)$, а (координатная) скорость центра тела A равна

$$\boldsymbol{v}_A(t) = d\boldsymbol{x}_A/dt. \tag{39.59а}$$

Полная масса-энергия тела A, измеренная в непосредственной близости от него (масса-энергия покоя плюс внутренняя энергия плюс энергия самогравитации) дается выражением

$$M_A = \int_{\mathcal{V}_A} \left(1 + \Pi - \tfrac{1}{2} U_{\text{собств}}\right) d(\text{масса покоя}) + O(M_A \varepsilon^4), \tag{39.59б}$$

где $U_{\text{собств}}$ — собственный ньютоновский потенциал тела (без учета вклада других тел), а $\mathcal{V}_A$ — область внутри тела.

а. Покажите, что выражение для M_A, записанное в выбранной ППН-системе координат, принимает вид

$$M_A = \int_{\mathcal{V}_A} \rho_0 \left(1 + \Pi + \tfrac{1}{2} v_A^2 + 3U - \tfrac{1}{2} U_{\text{собств}}\right) d^3x + O(M_A \varepsilon^4). \tag{39.59в}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Воспользуйтесь уравнениями (39.43), (39.44) и (39.46), чтобы доказать, что M_A сохраняется при движении окружающих тел, $dM_A/dt = 0$.

б. Выберите некоторое событие $(t, \boldsymbol{x})$ вне всех тел и для некоторого момента t введите следующие обозначения:

$$\boldsymbol{r}_A \equiv \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{r}_{AB} \equiv \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B, \quad r_A \equiv |\boldsymbol{r}_A|, \quad r_{AB} = |\boldsymbol{r}_{AB}|. \tag{39.59г}$$

Покажите, что общерелятивистская постньютоновская метрика (39.32) в этом выбранном событии имеет вид

$$g_{ik} = \delta_{ik}\left(1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right) + O(\varepsilon^4), \tag{39.60а}$$

$$g_{0j} = -\sum_A \frac{M_A}{r_A}\left[\frac{7}{2}v_{Aj} + \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_A)\,r_{Aj}}{r_A^2}\right] + O(\varepsilon^5), \tag{39.60б}$$

$$g_{00} = -1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{M_A v_A^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{M_A M_B}{r_A r_{AB}} + O(\varepsilon^6). \tag{39.60в}$$

[*Указание*. Исходя из ньютоновской теоремы вириала (39.21а), применяемой к самому телу A в его собственной системе покоя, получите

$$\int_{\mathcal{V}_A} \left(3p - \frac{1}{2}\rho_0 U_{\text{собств}}\right) d^3x = O(M_A\varepsilon^4), \tag{39.61}$$

где интегрирование производится в ППН-системе координат.]

в. Совершите инфинитезимальное преобразование координат

$$t_{\text{стар}} = t_{\text{нов}} - \frac{1}{2}\sum_A \frac{M_A(\boldsymbol{r}_A\cdot\boldsymbol{v}_A)}{r_A}, \quad \boldsymbol{x}_{\text{стар}} = x_{\text{нов}}, \tag{39.62}$$

чтобы привести метрику (39.60) к привычному виду, первоначально найденному Эйнштейном, Инфельдом и Гофманом [349], а также Эддингтоном и Кларком [350]:

$$g_{jk} = \delta_{jk}\left(1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right) + O(\varepsilon^4), \tag{39.63а}$$

$$g_{0j} = -4\sum_A \frac{M_A}{r_A} v_{Aj} + O(\varepsilon^5). \tag{39.63б}$$

$$g_{00} = -1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{M_A v_A^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{M_A M_B}{r_A r_{AB}} - \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + O(\varepsilon^6), \tag{39.63в}$$

где χ (39.49а) дается выражением

$$\chi = -\sum_A M_A r_A .$$

г. Уравнения движения тел можно получить двумя способами: либо беря объемные интегралы от уравнений Эйлера (39.48) по внутренней области каждого тела, либо привлекая общие соображения, изложенные в § 20.6. Последний путь проще. Воспользуйтесь им, чтобы сделать следующий вывод: любое выбранное тело K движется вдоль геодезической в метрике, которая получается, если в сумме в формуле (39.63) опустить члены с $A = K$. Покажите, что уравнение геодезических для тела K принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_K}{dt^2} \equiv \frac{dv_K}{dt} = \sum_{A\neq K} r_{AK}\frac{M_A}{r_{AK}^3}\Big[1 - 4\sum_{B\neq K}\frac{M_B}{r_{BK}} - \\ - \sum_{C\neq K}\frac{M_C}{r_{CA}}\Big(1 - \frac{r_{AK}\cdot r_{CA}}{2r_{CA}^2}\Big) + \\ + v_K^2 + 2v_A^2 - 4v_A\cdot v_K - \frac{3}{2}\Big(\frac{v_A\cdot r_{AK}}{r_{AK}}\Big)^2\Big] - \\ - \sum_{A\neq K}(v_A - v_K)\frac{M_A r_{AK}\cdot(3v_A - 4v_K)}{r_{AK}^3} + \\ + \frac{7}{2}\sum_{A\neq K}\sum_{C\neq A} r_{CA}\frac{M_A M_C}{r_{AK}r_{CA}^3} .\end{aligned} \tag{39.64}$$

Уравнения (39.63) и (39.64) называются уравнениями Эйнштейна—Инфельда — Гофмана (ЭИГ) для геометрии и эволюции системы многих тел. Они широко используются при расчете орбит планет Солнечной системы. Например, в лаборатории реактивных двигателей Калифорнийского технологического института ими воспользовались в модифицированной форме для расчета астрономических таблиц, предназначенных для слежения с большой точностью за планетами и космическими кораблями. Приведенный выше метод вывода уравнений ЭИГ и метрик был разработан Фоком [345]. Аналогичные расчеты в теории Дикке — Бранса — Йордана см. в работе [351], а вывод аналогичных уравнений для многих тел в полном ППН-формализме см. в работе [279].

Дополнение 39.4. ОБЗОР ППН-ФОРМАЛИЗМА

I. Переменные

$\rho_0(x, t)$ — плотность «массы» барионов (§ 39.3), определяемая в системе покоя;

$\Pi(x, t)$ — удельная внутренняя энергия (безразмерная величина, § 39.3), измеряемая в системе покоя;

$t_{\hat{j}\hat{k}}(x, t)$ — компоненты натяжений, отнесенные к ортонормированным осям системы покоя;

$v_j(x, t)$ — координатная скорость вещества (т. е. системы покоя) относительно ППН-координат;

$U(x, t)$, $\Psi(x, t)$, $\mathcal{A}(x, t)$, $\mathcal{D}(x, t)$, $V_j(x, t)$, $W_j(x, t)$, $U_{jk}(x, t)$ — гравитационные потенциалы;

γ, β, β_1, β_2, β_3, β_4, Δ_1, Δ_2, ζ, η — параметры, значения которых отличают одну теорию от другой (см. дополнение 39.2);

$\boldsymbol{w}$ — скорость ППН-системы координат относительно «универсальной системы покоя» [только для теорий с ненулевыми α_1, α_2 или α_3, см. формулы (39.33)].

II. Уравнения, которым подчиняется изменение этих переменных

ρ_0 — сохранение массы покоя, уравнение (39.44);

Π — первый закон термодинамики, уравнение (39.46);

$t_{\hat{j}\hat{k}}$ — определяется через ρ_0, Π и другие переменные, связанные с веществом (химический состав, напряжения и т. д.) с помощью уравнений состояния и обычной теории деформированного вещества, которая здесь не рассматривается;

v_j — уравнения движения ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$), уравнения (39.47);

U, Ψ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, V_j, W_j, U_{jk} — уравнения для источников (39.34).

III. Величины, которые нужно получить из этих переменных

$g_{00}(x, t)$, $g_{0j}(x, t)$, $g_{jk}(x, t)$ — эти компоненты метрики в ППН-системе координат выражаются через гравитационные потенциалы формулами (39.32);

$u^0(x, t)$, $u^j(x, t)$ — эти компоненты 4-скорости вещества в ППН-системе координат даются формулами (39.39);

$T^{00}(x, t)$, $T^{0j}(x, t)$, $T^{jk}(x, t)$ — эти компоненты тензора энергии-импульса в ППН-системе координат даются формулами (39.42).

IV. Связь между системой покоя, ППН-координатами и Вселенной

1. Ортонормированный базис $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$ системы покоя, в котором определяются $t_{\hat{j}\hat{k}}$, связан с ППН-координатным базисом $\mathbf{d}x^{\alpha}$ соотношениями (39.41).
2. Вдали от Солнца ППН-координаты становятся асимптотически лоренцевыми, т. е. они образуют инерциальную систему, движущуюся относительно пространственно-временной геометрии Галактики и Вселенной.
3. Расширение Вселенной или космические гравитационные волны, падающие на Солнечную систему, совершенно не учитываются.

Дополнение 39.5. ППН-ПАРАМЕТРЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЛИТЕРАТУРЕ: РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПЕРЕВОДА

В первоначальной «трактовке точечных частиц» ППН-формализма [284] и в первоначальной «трактовке идеальной жидкости» [286] использовались различные наборы ППН-параметров. В этой книге принят набор параметров Вилла [286] и добавлен параметр η, характеризующий эффекты, связанные с анизотропией натяжений. Позднее Вилл и Нордведт совместно приняли пересмотренный набор параметров, описанный ниже.

А. Переводная таблица

Пересмотренные параметры Вилла-Нордведта [1]	Пересмотренные параметры в обозначениях этой книги [2]	Пересмотренные параметры в обозначениях Нордведта [284] [3]
γ	γ	γ
β	β	β
α_1	$7\Delta_1+\Delta_2-4\gamma-4$	$8\Delta-4\gamma-4$
α_2	$\Delta_2+\zeta-1$	$\alpha'''-1$
α_3	$4\beta_1-2\gamma-2-\zeta$	$4\alpha''-\alpha'''-2\gamma-1$
ζ_1	ζ	$\alpha'''-\chi$
ζ_2	$2\beta+2\beta_2-3\gamma-1$	$2\beta-\alpha'-1$
ζ_3	β_3-1	отсутствует
ζ_4	$\beta_4-\gamma$	отсутствует

[1] Пересмотренные параметры, используемые в работах [279, 287, 337, 348].
[2] Обозначения этой книги используются в работах [286, 293, 294, 352—354].
[3] Первоначальные параметры Нордведта в «трактовке точечных частиц» используются в работах [284, 355—357].

Б. Смысл пересмотренных параметров

Параметры α_1, α_2, α_3 определяют величину и природу «эффектов, связанных с наличием предпочтительной системы», см. § 39.9. Всякая теория гравитации, для которой по крайней мере один из параметров α отличен от нуля, называется *теорией с предпочтительной системой*.

Параметры ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, α_3 определяют степень и природу нарушений глобальных законов сохранения. Все 10 глобальных законов сохранения (4 для энергии-импульса и 6 для момента импульса, см. гл. 19 и 20) выполняются для той и только той теории, в которой $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$. Доказательства и обсуждение см. в работах [279, 287, 352]. Всякая теория, в которой $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$, называется *консервативной теорией*.

В общей теории относительности и в теории Дикке — Бранса — Йордана все параметры α и ζ обращаются в нуль. Таким образом, общая теория относительности и теория Дикке — Бранса — Йордана являются консервативными теориями, в которых отсутствуют эффекты, связанные с предпочтительной системой.

40. ЭКСПЕРИМЕНТЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

§ 40.1. РАЗЛИЧНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ, ЦЕЛЬ КОТОРЫХ — ОТЛИЧИТЬ ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ОТ ДРУГИХ МЕТРИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ГРАВИТАЦИИ

Поединок не привлечет к себе внимания публики, если, по общему мнению, претендент не имеет никаких шансов на победу. Ни один устроитель боя, жаждущий финансировать этот поединок, не выставит на ринг против чемпиона кого попало; вместо этого он попытается найти как можно более достойного претендента. Против эйнштейновской метрической теории гравитации, согласно современным данным (§ 39.2), можно выставить лишь другую теорию гравитации, которая также является метрической (или метрической с кручением).

Анализ экспериментов с помощью ППН-формализма

Устроить такое состязание — это значит разработать и провести эксперименты, которые позволят отличить общую теорию относительности от некоторой не являющейся заведомо ложной метрической теории гравитации. В этой главе описываются подобные эксперименты (некоторые из них уже проведены, некоторые намечается провести в будущем) и анализируется значение этих экспериментов с помощью ППН-формализма, развитого в гл. 39.

Сложность пространственной геометрии Солнечной системы

В большинстве описываемых экспериментов исследуется движение Луны, планет, космических кораблей, лучей света или гироскопов в геометрии пространства-времени Солнечной системы. Эта пространственно-временная геометрия является весьма сложной. В нее входят сферические поля Солнца и всех планет, несферические поля, обусловленные их квадрупольными деформациями, а также деформациями более высоких порядков, и, наконец, поля,

обусловленные их импульсами и моментами испульса. Более того, геометрия пространства-времени представляет собой результат (или по крайней мере в постньютоновском формализме рассматривается как результат) *нелинейной* суперпозиции всех этих полей [1]).

К счастью, некоторые из наиболее важных рассматриваемых здесь экспериментов свободны почти от всех этих усложнений. Измеряемые в них эффекты связаны исключительно со сферической частью гравитационного поля Солнца. Мы начнем с описания этих экспериментов (§ 40.2—40.5), а затем обратим внимание на эксперименты, в принципе более сложные.

Идеализированная геометрия изолированного, статического, сферически симметричного Солнца:

Для обсуждения экспериментов в центральном поле нам понадобится выражение для внешнего гравитационного поля идеализированного изолированного, статического, сферически симметричного Солнца. В общей теории относительности подобное гравитационное поле описывается шварцшильдовским линейным элементом

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M_\odot}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M_\odot/r} + r^2(d\theta^2+\sin^2\phi\, d\phi^2). \qquad (1)$$

1) в шварцшильдовских координатах

Но этот линейный элемент не годится для нас по двум причинам: 1) он слишком точен и 2) он записан в «неподходящей» системе координат.

Почему слишком точен? Потому что он прост только в невозмущенном и в немодифицированном виде, в то время как в некоторых модифицированных теориях появляются новые эффекты, настолько сложные, что они поддаются количественному рассмотрению лишь в постньютоновском приближении. Почему неподходящая система координат? Потому что физики, астрономы и специалисты по небесной механике при анализе Солнечной системы обычно используют не «шварцшильдовские», а «изотропные» координаты. Например, в постньютоновских разложениях, включающих ППН-формализм (гл. 39), почти всегда используют изотропные координаты. Еще один пример. В релятивистских астрономических таблицах, составленных Лабораторией реактивных двигателей Калифорнийского технологического института [358, 359], которые широко используются во всем мире, применяются изотропные координаты.

Таким образом, необходимо модифицировать шварцшильдовский линейный элемент. Сначала запишем его в изотропных координатах (упражнение 31.7); затем разложим метрические коэффициенты по степеням $M_\odot/r$ с постньютоновской точностью. При

[1]) Конечно, с точки зрения неупрощенной эйнштейновской теории имеет значение лишь одна и единственная геометрия искривленного пространства-времени реального физического мира. Все эти «отдельные поля» нужны лишь для «бухгалтерского учета», и от них лучше всего отказаться (они перестают быть полезными), когда от постньютоновского предела мы переходим к неупрощенной эйнштейновской теории.

этом мы получим

2) в изотропных координатах

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 - 2\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] =$$

$$= -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\frac{M_\odot}{r}\right][dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (40.1)$$

Здесь r, θ, ϕ связаны с x, y, z обычным образом:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}[z/(x^2 + y^2)^{1/2}], \quad \phi = \operatorname{arctg}(y/x), \quad (40.2)$$

а r — новая «изотропная» радиальная координата, которую не следует смешивать со шварцшильдовским r. (Читатель, пропустивший § 39.6, узнает в следующем параграфе, почему мы оставили члены порядка $M_\odot^2/r^2$ в g_{00}, но не оставили их в g_{jk}.) *Замечание.* Это постньютоновское выражение для метрики представляет собой частный случай результата, полученного в упражнении 19.3.

Вычисляя гравитационное поле того же источника (Солнца) в том же постньютоновском приближении в других метрических теориях гравитации, мы получаем очень похожий результат:

3) в ППН-формализме

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] =$$

$$= -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (40.3)$$

(см. упражнение 40.1). Здесь γ и β — два из десяти ППН-параметров, описанных в дополнении 39.2. Напомним, что γ определяет «величину пространственной кривизны, создаваемую единичной покоящейся массой», а β является мерой «величины нелинейности в законе суперпозиции для g_{00}». Это качественное описание находит свое математическое отражение в приведенном выше выражении для идеализированной метрики, окружающей сферически симметричный центр притяжения.

Измеряя с высокой точностью параметр γ, можно отличить общую теорию относительности ($\gamma = 1$) от теории Дикке — Бранса — Йордана [$\gamma = (1 + \omega)/(2 + \omega)$, где ω — «константа взаимодействия Дикке»]; см. дополнение 39.2. Но общая теория относительности и теория Дикке — Бранса — Йордана предсказывают одно и то же значение для β ($\beta = 1$). Эта тождественность не означает, что величину β не следует измерять. Значение $\beta \neq 1$ предсказывается другими теориями [294]; поэтому измерения β полезны, чтобы отличить подобные теории от общей теории относительности.

На самом деле приведенная выше форма выражения для метрики Солнца (40.3) является не вполне общей. В любой теории с предпочтительной «универсальной системой покоя» (например, теория Ни, дополнение 39.1) в метрике имеются дополнительные члены, обусловленные движением Солнца относительно этой предпочтительной системы (упражнение 40.1):

$$ds^2 = [\text{выражение (40.3)}] + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\frac{M_\odot}{r} w^2\,dt^2 + \\ + 2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\frac{M_\odot}{r} w_j\,dx^j\,dt - \alpha_2\left[\frac{M_\odot}{r^3}x^j x^k - \frac{I_\odot}{r^5}\left(x^j x^k - \frac{1}{3}r^2\delta_{jk}\right)\right]\times \\ \times w_j\,dt\,(2\,dx^k + w_k\,dt). \qquad (40.3')$$

4) с учетом эффектов, связанных с предпочтительной системой отсчета

В этих «членах, связанных с наличием предпочтительной системы», $I_\odot \equiv I_{jj} = \int \rho r^2 d^3x$ есть след второго момента распределения масс в Солнце; величины

$$\alpha_1 = 7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4,$$
$$\alpha_2 = \Delta_2 + \zeta - 1,$$
$$\alpha_3 = 4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta$$

являются комбинациями ППН-параметров; $\boldsymbol{w}$ — скорость Солнца (тождественно равная скорости системы координат) относительно предпочтительной системы. (Теории, подобные общей теории относительности и теории Дикке — Бранса — Иордана, которые не обладают предпочтительной системой, имеют $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, и поэтому в метрике отсутствуют члены, связанные с наличием предпочтительной системы.) Для простоты изложения во всех уравнениях и при всех вычислениях в этой главе такие члены не будут учитываться, но будут обсуждаться следствия, к которым эти члены приводят, и будут указаны работы, в которых эти члены подробно исследуются.

40.1. ППН-метрика для идеализированного Солнца (курс 2) УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что для изолированного статического сферического Солнца, находящегося в начале системы ППН-координат, ППН-метрика (39.32) сводится к выражениям (40.3), (40.3'). В частности, покажите, что полная масса-энергия Солнца дается выражением

$$M_\odot = \int_0^{R_\odot} \rho_0\,(1 + 2\beta_2 U + \beta_3 \Pi + 3\beta_4 p/\rho_0)\,4\pi r^2\,dr. \qquad (40.4)$$

(*Предостережение.* Не следует, взглянув на эту формулу, немедленно думать: «Вклад массы покоя есть $\int \rho_0 4\pi r^2 dr$, вклад гравитационной энергии есть $\int 2\beta_2\rho_0 U 4\pi r^2 dr$ и т. д.». Вместо этого, давая

УПРАЖНЕНИЕ

такого рода интерпретацию, мы должны помнить, что 1) пространство-время искривлено, так что $4\pi r^2 dr$ не является *собственным объемом*, измеряемым с помощью физических линеек, а также что 2) теоремы вириала (упражнение 39.6) и другие интегральные теоремы могут быть использованы для того, чтобы изменить форму выражений, стоящих под интегралом. Дальнейшее обсуждение см. ниже в упражнениях 40.9 и 40.10.)

---

§ 40.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛУЧЕЙ СВЕТА И РАДИОВОЛН ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ

Лучи света и радиоволны позволяют провести «чистые» тесты теории относительности

В ньютоновском пределе орбиты планет и космических кораблей испытывают сильное влияние гравитации; зато на распространение света и радиоволн (с «бесконечной» скоростью) гравитация не влияет вовсе. Поэтому экспериментальное изучение орбит наталкивается на сложную проблему выделения релятивистских эффектов на фоне существенно более сильных классических ньютоновских эффектов. Напротив, при экспериментальном изучении распространения света и радиоволн не нужно бороться с превосходящим ньютоновским фоном. Неудивительно поэтому, что эксперименты по распространению света и радиоволн — самые чистые и наиболее убедительные из всех экспериментов в Солнечной системе.

С точки зрения математики параметром, который отличает луч света от планеты, является большая скорость первого. В уравнении для геодезических величина скорости определяет, какие из метрических коэффициентов могут влиять на движение. Рассмотрим, например, слабое статическое поле $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ и частицу при $(x, y, z) = (r, 0, 0)$, движущуюся со скоростью $(v_x, v_y, v_z) = (0, v, 0)$ (фиг. 40.1). Здесь действие гравитации на траекторию частицы характеризуется величиной

$$\begin{pmatrix}\text{кривизна траектории в трехмерном}\\ \text{почти евклидовом пространстве}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{радиус кривизны}\\ \text{траектории}\end{pmatrix}^{-1} =$$

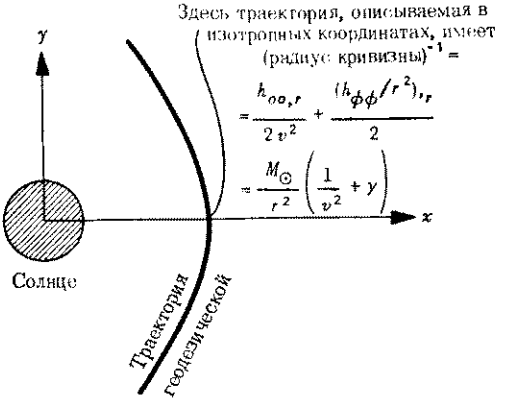
$$= \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\tau}{dy}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{dy}\frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{u^y}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^x}{u^y}\right) = \frac{1}{(u^y)^2}\frac{du^x}{d\tau} =$$

$$= -\frac{(1-v^2)}{v^2}\Gamma^x_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{1}{v^2}\Gamma^x_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} =$$

$$= -\Gamma^x_{00}v^{-2} - 2\Gamma^x_{0y}v^{-1} - \Gamma^x_{yy} =$$

$$= \frac{1}{2}h_{00,\,x}v^{-2} + (h_{0y,\,x} - h_{0x,\,y})v^{-1} + \left(\frac{1}{2}h_{yy,\,x} - h_{xy,\,y}\right).$$

Выраженная в сферических координатах в терминах идеализированного линейного элемента для Солнца (40.3), эта формула гла-



ФИГ. 40.1.
Искривление траектории пробного тела в точке наибольшего приближения к Солнцу как функция его 3-скорости. (Вычисление и обсуждение см. в тексте.)

сит, что для частицы в точке наибольшего приближения к Солнцу

$$\begin{pmatrix}\text{кривизна траектории}\\ \text{в 3-пространстве}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}h_{00,\,r}v^{-2} + \frac{1}{2}(h_{\phi\phi}/r^2)_{,r} \approx$$
$$\approx -(M_\odot/r^2)(v^{-2}+\gamma), \qquad (40.5)$$

(ср. с упражнением 25.21). Заметим, что здесь γ есть ППН-параметр, а не $(1-v^2)^{-1/2}$.

Обратим внимание на то, что случится, если скорость частицы подвергнуть бусту. Для малых скоростей [$v^2 \sim$ (постньютоновский параметр разложения ε^2) $\approx M_\odot/R_\odot$] полностью преобладает ньютоновская часть величины h_{00}, а малые постньютоновские поправки обусловлены равным образом частью порядка ε^4 величины h_{00}, частью ε^3 величины h_{0j} и частью ε^2 величины h_{jk}. [Это служило обоснованием разложения h_{00} до порядка $O(\varepsilon^4)$, h_{0j} — до $O(\varepsilon^3)$ и h_{jk} — до $O(\varepsilon^2)$ в постньютоновском пределе; см. § 39.6.] Но по мере увеличения v такой порядок членов меняется. В режиме высокой скорости v ($v \sim 1 \gg \varepsilon^2$) искривление траектории становится почти незаметным вследствие большого продольного импульса частицы и малого времени, в течение которого она получает поперечный импульс благодаря притяжению Солнца. То искривление, которое остается, обусловлено (ньютоновской) частью порядка ε^2 величины h_{00} и (постньютоновской) частью ε^2 величины h_{jk}. Ничто другое не оказывает существенного влияния. Более того, даже если учесть эффекты «предпочтительной системы», эти преобладающие члены

$$h_{00} = 2U = 2M_\odot/r,\ h_{jk} = 2\gamma U\delta_{jk} = 2\gamma(M_\odot/r)\delta_{jk}$$

зависят только от ньютоновского потенциала $U \equiv -\Phi$ и ППН-параметра γ.

Движение лучей света определяется только ньютоновским потенциалом и ППН-параметром γ

Это частный случай более общего результата: *с точностью до относительных ошибок порядка* $\varepsilon^2 < 10^{-6}$ *релятивистские эффекты в распространении света и радиоволн полностью определяются ньютоновским потенциалом* U *и ППН-параметром* γ. Эти релятивистские эффекты включают гравитационное красное смещение (которое обсуждается в предыдущей главе; не зависит от γ), гравитационное отклонение света и радиоволн (которое обсуждается ниже; зависит от γ) и «релятивистское временно́е запаздывание» (которое обсуждается ниже; зависит от γ).

§ 40.3. ОТКЛОНЕНИЕ «СВЕТА»

Отклонение света:

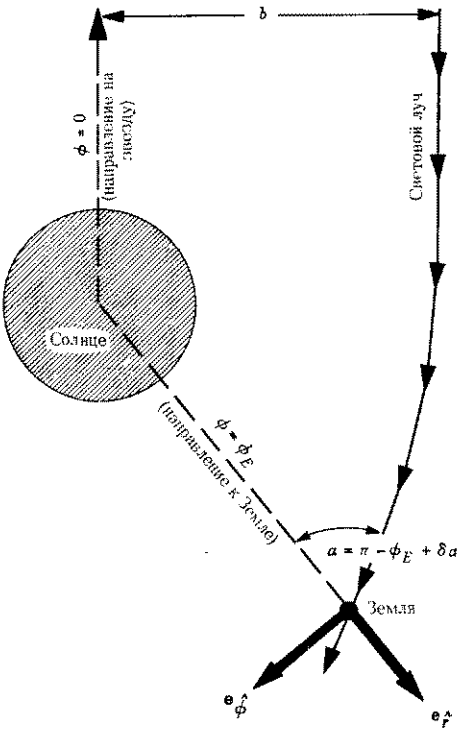
Рассмотрим световой или радиолуч, приходящий в телескоп на Земле от удаленной звезды или квазара. Не будем предполагать, как это делается при обычном рассмотрении (упражнения 18.6 и 25.24), что луч проходит вблизи Солнца. Отклонение в гравитационном поле Солнца, вероятно, можно будет измерить в конце 70-х годов, даже если луч проходит вдали от Солнца. (Следующее ниже вычисление разработано Вардом [360], по Шапиро [361] первым получил ответ.)

1) вывод

Ориентируем сферические ППН-координаты уравнения (40.3) так, чтобы луч лежал в «плоскости» $\theta = \pi/2$. Из соображений симметрии следует, что если луч начинает движение вдали от Земли в этой плоскости, то он должен все время лежать в ней. Пусть приходящий луч входит в Солнечную систему вдоль линии $\phi = 0$, и пусть Земля, когда ее достигает луч, расположена при $r = r_E$, $\phi = \phi_E$ (фиг. 40.2). Мы хотим вычислить угол α между приходящим лучом и направлением на центр Солнца, каким его измеряет в ортонормированной системе $(\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}})$ наблюдатель на Земле. Если бы Солнце обладало нулевой массой (плоское эвклидово пространство), то α было бы равно $\pi - \phi_E$ (фиг. 40.2). Однако Солнце создает отклонение: $\alpha = \pi - \phi_E + \delta\alpha$. Именно угол $\delta\alpha$ и надлежит рассчитать.

При вычислениях не учитываются орбитальное и вращательное движения Земли. Они приводят к аберрации, поправки на которую можно получить с помощью обычных формул специальной теории относительности (преобразование Лоренца в окрестности телескопа). Не учитывается также отклонение света, обусловленное гравитационным полем Земли (угол отклонения $\sim 2\,M_E/R_E \sim \sim 0'',0003$), хотя это отклонение, возможно, удастся обнаружить в конце 70-х годов.

В качестве первого шага при вычислении угла отклонения определим траекторию луча в плоскости r, ϕ. Траекторию можно рассчитать, пользуясь либо уравнением для геодезических, либо методом эйконала геометрической оптики (метод Гамильтона —



ФИГ. 40.2.
Координаты, используемые в тексте для вычисления отклонения света. Обратите внимание, что на этом рисунке ϕ растет в направлении по часовой стрелке.

Якоби, § 22.5 и дополнение 25.4). Результатом этого вычисления (упражнение 40.2) является уравнение, связывающее r с ϕ:

$$\frac{b}{r} = \sin\phi + \frac{(1+\gamma)\,M_\odot}{b}(1-\cos\phi). \tag{40.6}$$

Отметим, что b имеет простую геометрическую интерпретацию: вдали от Солнца траектория луча есть $\phi = b/r + O\,(M_\odot b/r^2)$. Следовательно, b представляет собой прицельный параметр, как в обычной классической теории рассеяния (фиг. 40.2). Луч наиболее близко приближается к Солнцу (в предположении, что он еще раньше не будет захвачен Землей) при радиусе в ППН-координатах

$$r_{\text{мин}} = b\left[1 - \frac{(1+\gamma)\,M_\odot}{b}\right] \approx b. \tag{40.7}$$

Таким образом, b можно также представлять себе как радиус «перигелия» луча.

Заметим, что луч возвращается к $r = \infty$ не при угле $\phi = \pi$, а при

$$\phi\,(r=\infty) = \pi + 2\,(1+\gamma)\,M_\odot/b. \tag{40.8a}$$

Таким образом,

$$\text{угол полного отклонения} = 2\,(1+\gamma)\,M_\odot/b = \frac{1}{2}\,(1+\gamma)\cdot 1'',75 \tag{40.8б}$$

для луча, который только касается Солнца.

Но не эта величина представляет главный интерес. Мы ищем положение звезды, каким его видит астроном на Земле. Угол $\alpha = \pi - \phi_E + \delta\alpha$ между Солнцем и звездой, измеренный астрономом, дается выражением (фиг. 40.2)

$$\operatorname{tg}(\pi - \phi_E - \delta\alpha) = -\operatorname{tg}\phi_E + \delta\alpha/\cos^2\phi_E =$$

$$= \frac{u^{\hat{\phi}}}{u^{\hat{r}}} = \left[\frac{(1+\gamma M_\odot/r)\,r\,d\phi/d\lambda}{(1+\gamma M_\odot/r)\,dr/d\lambda}\right]_E = \left[\frac{r\,d\phi}{dr}\right]_E = -\left[\frac{(b/r)\,d\phi}{d\,(b/r)}\right]_E, \tag{40.9}$$

где $u^\beta = dx^\beta/d\lambda$ — компоненты касательной к лучу у Земли. Подставляя в это уравнение выражение (40.6) для траектории луча, получаем

$$\operatorname{tg}\phi_E - \frac{\delta\alpha}{\cos^2\phi_E} = \frac{\sin\phi_E + [(1+\gamma)\,M_\odot/b]\,(1-\cos\phi_E)}{\cos\phi_E + [(1+\gamma)\,M_\odot/b]\sin\phi_E} =$$

$$= \operatorname{tg}\phi_E - [(1+\gamma)\,M_\odot/b]\,(1-\cos\phi_E)/\cos^2\phi_E. \tag{40.10}$$

2) формула для угла отклонения

Таким образом, угол отклонения, измеренный на Земле, равен

$$\delta\alpha = \frac{(1+\gamma)\,M_\odot}{b}\,(1+\cos\alpha) = \frac{(1+\gamma)\,M_\odot}{r_E}\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^{1/2}. \tag{40.11}$$

Он меняется в пределах от нуля, когда луч проходит в направлении, противоположном направлению на Солнце ($\alpha = \pi$), принимая промежуточное значение

$$(1+\gamma)\,M_\odot/r_E = \frac{1}{2}\,(1+\gamma)\,0'',0041, \tag{40.12}$$

когда луч проходит перпендикулярно линии, соединяющей Землю и Солнце ($\alpha = \pi/2$), до «классического значения» $\frac{1}{2}\,(1+\gamma)\cdot 1'',75$, когда луч касается солнечного диска.

Экспериментальные измерения отклонения

Все эксперименты до сегодняшнего дня (1972 г.) исследовали случай касательного прохождения. Экспериментальные результаты приведены и обсуждаются в дополнении 40.1. Они показывают, что ППН-параметр γ имеет значение 1, соответствующее общей теории относительности, с неопределенностью около 20%.

К середине и к концу 70-х годов измерения отклонения радиоволн от квазаров должны определить γ с точностью, превышающей 1%. Кроме того, к этому времени радиоастрономы, возможно, достигнут большого прогресса в разрешении координат на небе с высокой точностью, используя интерферометрию с очень боль-

шими базами [1]). Тогда они вынуждены будут использовать уравнение (40.11), чтобы учитывать «искажение» координат, вызванное отклонением радиоволн Солнцем во всех областях неба, а не только вблизи солнечного диска.

40.2. Траектория луча света в гравитационном поле Солнца УПРАЖНЕНИЕ

Выведите уравнение (40.6) для траектории луча света в изотропных координатах (40.3) в «экваториальной» плоскости Солнца. Воспользуйтесь одним или несколькими из следующих альтернативных подходов: 1) непосредственное интегрирование уравнения геодезической (самый трудоемкий подход!); 2) расчет, основанный на трех интегралах движения

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0, \quad \mathbf{k}\cdot(\partial/\partial t)=k_0, \quad \mathbf{k}\cdot(\partial/\partial\phi)=k_\phi=-bk_0$$

$$\mathbf{k}\equiv d/d\lambda = \text{вектор, касательный к геодезической}$$

(см. § 25.2 и 25.3); 3) расчет, в основе которого лежит метод Гамильтона — Якоби (дополнение 25.4); для фотонов (с нулевой массой покоя) этот метод сводится к «методу эйконала» геометрической оптики (см. § 22.5).

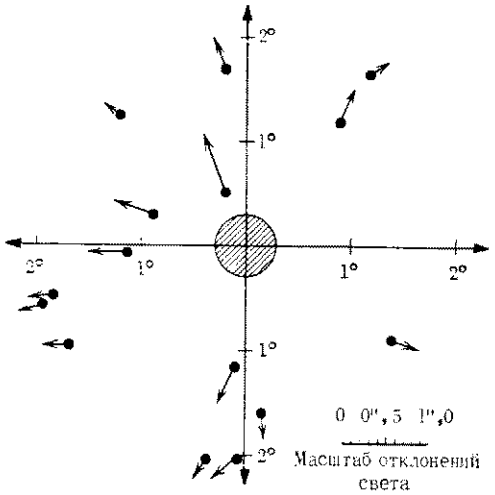
Дополнение 40.1. ОТКЛОНЕНИЕ СВЕТА И РАДИОВОЛН СОЛНЦЕМ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Измерения при затмениях

Вплоть до 1968 г. каждый эксперимент по измерению отклонения света от звезд проводился во время полного солнечного затмения. Эти измерения были сопряжены с такими трудностями, как плохая погода, оптические искажения из-за вариаций температуры, а также странная склонность затмений достигать максимального времени то в джунглях, то посреди океана, то в пустынях, то в арктической тундре. Списки всех результатов и ссылки на литературу даны в работах [315, 362]. Дикке [277] подвел следующий итог этим результатам:

«Обработка [экспериментальных данных] дает разброс отклонения света при прохождении вблизи солнечного диска от 1″,43 до 2″,7 [по сравнению со значением, даваемым ОТО, равным 1″,75]. Разброс был бы не так уж страшен, если бы мы были уверены, что метод свободен от систематических ошибок. По-видимому, мы должны считать, что наблюдения имеют неопределенность по крайней мере 10%, а возможно, и 20%.» Этот результат соответствует неопределенности в γ от 20 до 40%.

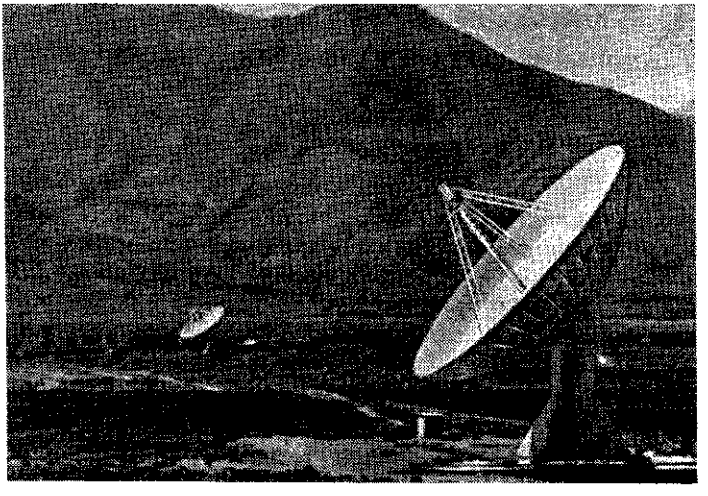
[1]) Измерения отклонения в гравитационном поле Солнца радиоизлучения от 3С 279 и 3С 273В, выполненные в 1972—1974 г., дали результат $0{,}99 \pm 0{,}03$ (общей теории относительности соответствует значение 1). Подробнее см. работу [498]. — *Прим. ред.*



Наблюдаемые отклонения света (среднее по двум инструментам) от 15 наиболее удачно измеренных звезд, расположенных в пределах 2°,5 от центра Солнца в момент полного солнечного затмения 21 сентября 1922 г. в Уоллоле (Западная Австралия). Измерения проведены Комбелом и Трамплером [363]. Стрелки указывают величину и направление наблюдаемых отклонений света относительно контрольных звезд (от 5 до 10° от центра Солнца). (См. дополнение 1.6, где дается эйнштейновское описание отклонения света в терминах кривизны геометрии вблизи Солнца.)

Измерения отклонения радиоволн

Каждый год 8 октября Солнце, если смотреть с Земли, проходит перед квазаром 3С 279. Следя за угловым расстоянием между 3С 279 и соседним квазаром 3С 273, радиоастрономы могут измерить отклонение радиоволн от 3С 279, вызванное Соли-



Система радиоинтерферометров, состоящая из 90-футового (на заднем плане) и 130-футового интерферометров, на радиоастрономической обсерватории в Оуэнской долине (Калтех). Она использовалась Сейелстадом, Шрамеком и Вейлером [364] в первой работе по измерению отклонения Солнцем радиоволн от квазара. Во время эксперимента две антенны были разделены расстоянием 1,07 км.

цем. При слежении используются радиоинтерферометры. (Литература указана ниже в таблице.) Уровень техники первой половины 70-х годов позволяет проводить измерения с точностью 0″,001 или лучше, если два конца интерферометра разнесены на несколько тысяч километров («межконтинентальная» или «трансмировая» базисная длина). Но до 1971 г. единственные успешные эксперименты были куда более скромными: в них использовались базисные длины меньше 10 км. Сводка этих результатов, полученных до 1971 г. при коротких базисных длинах, дана в таблице.

Даты наблюдений	Обсерватория	Экспериментаторы и литература	Число телескопов и расстояние между ними	Длины волн, см	Экспериментальные результаты [1]: $\frac{1}{2}(1+\gamma)=$ наблюдаемое отклонение / предсказание Эйнштейна	формальная стандартная ошибка	ошибка в одну сигму
30 сент.— 15 окт. 1969 г.	Оуэнская долина (Калтех)	Сейелстад, Шрамек, Вейлер [364]	2, 1,07 км	3,1	1,01	±0,12	±0,12
2 окт.— 10 окт. 1969 г.	Голдстоун (Калтех-ЛРД)	Мулеман, Экерс, Фомалон [365]	2, 21,56 км	12,5	1,04	±0,05	+0,15 −0,10
2 окт.— 12 окт. 1970 г.	Национальная радиоастрономическая обсерватория (США)	Шрамек [366]	3, 0,80 км, 1,90 км, 2,70 км	11,1 3,7	0,90	±0,05	±0,05
30 сент.— 15 окт. 1970 г.	Маллардская радиоастрономическая обсерватория (Кембридж)	Хилл [367]	3, 0,66 км, 1,41 км	11,1 6,0	1,07	±0,17	±0,17

[1] Здесь (наблюдаемое отклонение)/(предсказание Эйнштейна) есть число $\frac{1}{2}(1+\gamma)$, которое получается, если привести в соответствие данные наблюдений и предсказания ППН-формализма (40.11). В этих экспериментах лучи проходят вблизи солнечного диска, поэтому (40.11) сводится к $\delta\alpha = 1/2\,(1+\gamma)(M_\odot/b)$.] «Формальная стандартная ошибка» получается из экспериментальных данных с помощью обычных статистических методов. Однако она, как правило, не является хорошим показателем надежности результата, поскольку она не учитывает систематические ошибки. Указанная «ошибка в одну сигму» есть наилучшая оценка экспериментатором совокупности статистических и систематических неопределенностей. По оценкам экспериментаторов, вероятность того, что истинный результат лежит в пределах 1σ, составляет 68%; вероятность того, что результат лежит в пределах 2σ, равна 95% и т.д.

§ 40.4. ВРЕМЕННАЯ ЗАДЕРЖКА РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

Задержка радиолокационного сигнала

Другим эффектом пространственно-временной кривизны на электромагнитные волны является релятивистская задержка при распространении радиолокационного сигнала. На этот эффект впервые указал Шапиро [368]; см. также [369, 370].

1) основы расчета; принцип Ферма

Пусть радиолокационный передатчик на Земле посылает радиоволну к отражателю, расположенному в другом месте Солнечной

системы, и пусть отражатель возвращает волны на Землю. Вычислим время распространения волны туда и обратно, измеренное по часам на Земле. Для простоты вычисления примем, что Земля и отражатель не вращаются, а покоятся в статическом сферическом гравитационном поле Солнца. Влияние вращения и движения мы рассмотрим отдельно в конце расчета. Не будем учитывать также временную задержку часов передатчика, обусловленную гравитационным полем Земли; поправку на это поле нетрудно сделать, и она столь мала, что до середины или конца 70-х годов не будет играть роли в радиолокационных экспериментах. Гравитационное влияние других планет на радиоволны слишком слабо, чтобы его можно было заметить в обозримом будущем, за исключением случая, когда луч касается диска одной из планет. Однако эффекты дисперсии в солнечном ветре и в солнечной короне вполне заметны, и на них необходимо внести поправки. Эти поправки не будут здесь обсуждаться, поскольку не имеют никакого отношения к общей теории относительности.

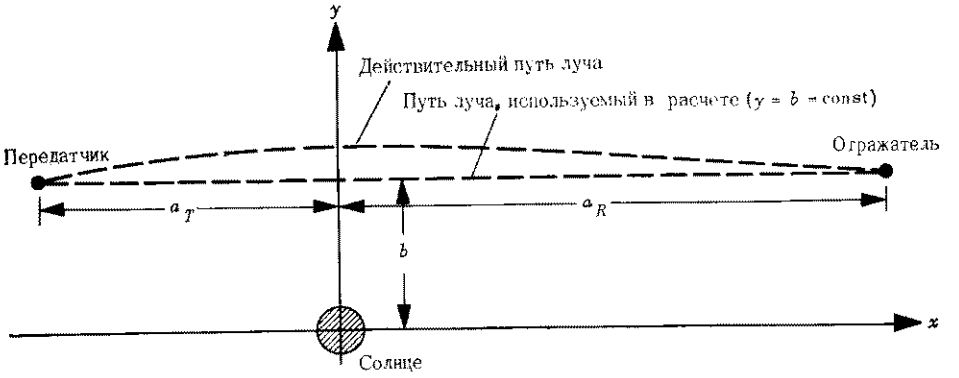
Вычисление времени распространения туда и обратно можно упростить, используя общерелятивистский вариант принципа Ферма: *В любом статическом поле* ($g_{0j} = 0$, $g_{\alpha\beta,0} = 0$) *рассмотрим все нулевые кривые между точками в пространстве* $x^j = a^j$ и $x^j = b^j$. *Каждой такой нулевой кривой* $x^j(t)$ *требуется свой интервал координатного времени* Δt, *чтобы попасть из* a^j *в* b^j. *Кривые с экстремальным* Δt *являются нулевыми геодезическими пространства-времени*. План доказательства этой теоремы дается в упражнении 40.3.

Вследствие принципа Ферма промежуток координатного времени между посылкой радиолокационного пучка и отражением его от рефлектора t_{TR} один и тот же как для прямолинейного пути в ППН-координатах, так и для слегка искривленного пути, по которому пучок распространяется в действительности. [Эти промежутки времени различаются на относительную величину $\Delta t_{TR}/t_{TR} \sim$ (угол отклонения)$^2 \lesssim 10^{-12}$, которая слишком мала, чтобы ее можно было наблюдать.] Следовательно, гравитационное искривление луча можно не учитывать при расчете.

2) детали расчета

Выберем такие декартовы ППН-координаты, чтобы Солнце находилось в начале координат, передатчик, Солнце и отражатель — в «плоскости» $z = 0$, а линия, соединяющая передатчик и отражатель, совпадала с направлением x (фиг. 40.3). Передатчик расположен при $(x, y) = (-a_T, b)$ в ППН-координатах, а отражатель — при $(x, y) = (a_R, b)$. Напомним, что для нулевого луча $ds^2 = 0 = g_{00}dt^2 - g_{xx}dx^2$. Отсюда следует, что промежуток координатного времени между посылкой сигнала и его отражением

$$t_{TR} = \int_{-a_T}^{a_R} \left(\frac{g_{xx}}{-g_{00}}\right)^{1/2} dx = \int_{-a_T}^{a_R} \left[1 + \frac{(1+\gamma)\,M_\odot}{\sqrt{x^2+b^2}}\right] dx.$$



ФИГ. 40.3.
К расчету релятивистской временной задержки (схема в ППН-системе координат).

Интегрирование дает

$$t_{TR} = a_R + a_T + (1+\gamma) M_\odot \ln\left[\frac{\left(a_R + \sqrt{a_R^2+b^2}\right)\left(a_T+\sqrt{a_T^2+b^2}\right)}{b^2}\right]. \tag{40.13}$$

Промежуток координатного времени, затрачиваемый на путь туда и обратно, имеет удвоенное значение. Промежуток собственного времени, измеренный по часам, расположенным на Земле,

3) формула для задержки

$$\Delta\tau = |g_{00}|^{1/2}_{\text{Земля}}\, 2t_{TR},$$

$$\Delta\tau = 2(a_R+a_T)\left(1-\frac{M_\odot}{\sqrt{a_T^2+b^2}}\right)+$$

$$+2(1+\gamma)M_\odot \ln\left[\frac{\left(a_R+\sqrt{a_R^2+b^2}\right)\left(a_T+\sqrt{a_T^2+b^2}\right)}{b^2}\right]. \tag{40.14}$$

Это промежуток времени по часам, расположенным на Земле, без учета поправок на орбитальное и вращательное движение Земли, на орбитальное движение отражателя, на дисперсию излучения, пересекающего солнечный ветер и корону, и, наконец, без учета поправок на временную задержку в гравитационном поле Земли.

4) сравнение с экспериментом

Любой читатель может возразить против той формы, в которой записано выражение (40.14) для временной задержки. Величины a_R, a_T и b суть координаты, указывающие положение в ППН-системе координат, а не те величины, которые астроном может непосредственно измерить. Они отличаются от координат, задающих положение в других, столь же хороших системах координат, на величину порядка $M_\odot \sim 1{,}5$ км. Но дело здесь не в математической форме. Величины a_R, a_T и b вполне хорошо определены

(с постньютоновскими неопределенностями порядка $b\,(M_\odot/b)^2 \lesssim \lesssim 10^{-6}$ км), так как вполне хорошо определена сама ППН-система координат. Но они не являются теми величинами, которые экспериментатор может измерять непосредственно с точностью, хотя бы приближающейся к той, которая требуется для проверки релятивистских членов в формуле для временной задержки (40.14).

На практике, к счастью, экспериментатору нет необходимости измерять a_R, a_T или b с высокой точностью. Вместо этого он проверяет формулу для временной задержки путем измерения изменений $\Delta\tau$ по мере того, как Земля и отражатель движутся по своим орбитам вокруг Солнца, т. е. он измеряет $\Delta\tau$ как функцию земного времени τ. Заметим, что, когда луч проходит вблизи Солнца ($b \ll a_R$, $b \ll a_T$, но $db/d\tau \gg da_R/d\tau$ и $db/d\tau \gg da_T/d\tau$, поскольку орбиты Земли и отражателя близки к круговым), изменение величины b в логарифмическом члене (40.14) преобладает над всеми другими релятивистскими поправками к ньютоновской задержке; следовательно (используя значение для типичных экспериментов $db/d\tau \sim 10$ км/с),

$$\frac{d\Delta\tau}{d\tau} - \begin{pmatrix}\text{постоянная}\\ \text{ньютоновская}\\ \text{часть}\end{pmatrix} \approx -4\,(1+\gamma)\,\frac{M_\odot}{b}\,\frac{db}{d\tau} \sim$$

$$\sim 4\,(1+\gamma)\left(\frac{1{,}5\text{ км}}{10^8\text{ км}}\right)\left(\frac{10\text{ км}}{c}\right) \sim \frac{30\text{ мкс}}{\text{сут}}. \qquad (40.15)$$

Подобные относительные изменения времени распространения сигнала туда и обратно, которые возрастают при приближении линии Земля — отражатель к Солнцу и уменьшаются при ее удалении от Солнца, легко наблюдаемы.

На практике, чтобы получить точность лучше чем 20%, при определении параметра γ путем измерений временной задержки необходимо тщательно накапливать и обрабатывать данные за время порядка года — от момента, когда луч проходит далеко от Солнца ($b \sim a_T \sim 10^8$ км), до момента наибольшего кажущегося сближения Солнца и отражателя ($b \sim R_\odot \sim 10^6$ км) и далее до момента, когда луч снова удален от Солнца. Такая длинная «дуга» данных необходима для определения с высокой точностью орбиты отражателя и для того, чтобы в полной мере воспользоваться логарифмически медленным спаданием $\Delta\tau$ с увеличением b в (40.14). Когда луч далек от Солнца ($b \gg R_\odot$), упрощающие допущения, сделанные в (40.15), несправедливы, и релятивистскую временную задержку трудно отделить от эффектов орбитального движения Земли и отражателя. В этом случае по-прежнему может проводиться непосредственный анализ, но его детали столь сложны, что для проведения этого анализа прибегают к численным интегрированиям на компьютере. Поскольку сюда входят орбитальные движения, данные по временной задержке содержат информацию о других метрических параметрах (главным образом β) помимо γ.

Экспериментальные данные, полученные до 1972 г., описаны в дополнении 40.2. Они дают значение ППН-параметра γ

$$\gamma = 1{,}02 \pm 0{,}08 \tag{40.16}$$

5) экспериментальные результаты для γ

с большей точностью, чем эксперименты по отклонению света и радиоволн. Будущие эксперименты с использованием космических кораблей могут улучшить точность определения γ до $\pm 0{,}001$ или еще выше.

40.3. Принцип Ферма

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите принцип Ферма для статического гравитационного поля. [*Указание.* Доказательство можно проводить следующим образом. Выпишите уравнения для геодезических в четырехмерном пространстве-времени, используя аффинный параметр λ. Перейдите от параметра λ к координатному времени t и, пользуясь тем, что $ds^2 = 0$, получите уравнение

$$g_{ih}\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma_{jh\ell}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^\ell}{dt} - \Gamma_{j00}\frac{g_{k\ell}}{g_{00}}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^\ell}{dt} + \frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}g_{ih}\frac{dx^h}{dt} = 0.$$

Скомбинируйте его с временной частью уравнения для геодезических

$$\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma_{0h0}\frac{dx^h/dt}{g_{00}}$$

и, воспользовавшись выражением для символов Кристоффеля через метрику, получите

$$\gamma_{jh}\frac{d^2x^h}{dt^2} + \frac{1}{2}(\gamma_{jh,\ell} + \gamma_{j\ell,h} - \gamma_{h\ell,j})\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^\ell}{dt} = 0, \quad \gamma_{jh} \equiv -\frac{g_{jh}}{g_{00}}.$$

Затем обратите внимание на то, что это уравнение для геодезических с аффинным параметром t в трехмерном многообразии с метрикой γ_{jh}. Хорошо знакомый принцип экстремума для этой геодезической имеет вид

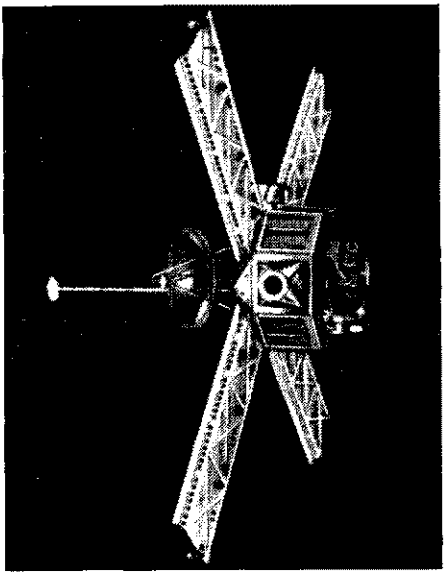
$$\delta\int_{a^j}^{b^j}(\gamma_{jh}\,dx^j\,dx^h)^{1/2} = \delta\int_{a^j}^{b^j}dt = 0;$$

это и есть в точности принцип Ферма!]

Дополнение 40.2. ВРЕМЕННАЯ ЗАДЕРЖКА РАДИОЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Были проведены эксперименты двух типов по измерению релятивистских эффектов [пропорциональных $\frac{1}{2}(1+\gamma)$, формула (40.14)], проявляющихся во времени распространения радиолокационного сигнала туда и обратно в Солнечной системе.

В экспериментах первого типа (*пассивный* эксперимент) отражателем служит поверхность планеты Венера или Меркурий. В экспериментах второго типа (*активный* эксперимент) «отражателем» является электронное оборудование, установленное на борту космического корабля, которое получает сигналы и передает их обратно на Землю (импульсные повторители). Пассивные эксперименты страдают от шума, вызванного рельефом отражающей планеты (сигнал, отразившийся от вершины горы, возвращается раньше, чем сигнал, отразившийся от равнины), а также от ослабления возвращающегося сигнала. Активные же эксперименты страдают от сноса космических кораблей солнечным ветром, вследствие флуктуаций давления солнечного излучения, а также из-за утечки газа из двигателей. Эксперименты будущего должны разрешить эти проблемы, помещая импульсные повторители на поверхности планеты или на космическом корабле, «свободном от сноса». Но как современные эксперименты, так и эксперименты будущего должны примириться с флуктуациями временной задержки, обусловленными дисперсией в флуктуирующем солнечном ветре и короне. К счастью, эти флуктуации меньше, чем релятивистские эффекты, за исключением тех случаев, когда луч проходит на расстоянии 2 или 3 солнечных радиусов от Солнца.



Космический корабль Маринер VI (макет), который служил отражателем при измерении величины $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ по временной задержке радиолокационного сигнала в 1970 г.

Результаты экспериментов, выполненных до 1972 г., приведены в таблице.

Даты наблюдений	Радиолокационные телескопы	Отражатель	Экспериментаторы и литература	Длина волны, см	Экспериментальные результаты [1]: $\frac{1}{2}(1+\gamma)=$ наблюдаемая задержка / предсказание Эйнштейна	формальная стандартная ошибка	ошибка в одну сигму
Ноябрь 1966 г.— август 1967 г.	Хейстэк (МТИ) [2]	Венера и Меркурий	Шапиро [371]	3,8	0,9		±0,2
1967 г. — конец 1970 г.	Хейстэк (МТИ) и Аресибо (Корнель)	Венера и Меркурий	Шапиро, Эш и др. [372]	3,8 и 70	1,015	±0,02	±0,05

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Даты наблюдений	Радиолокационные телескопы	Отражатель	Экспериментаторы и литература	Длина волны, см	Экспериментальные результаты[1]: $\frac{1}{2}(1+\gamma)=\frac{\text{наблюдаемая задержка}}{\text{предсказание Эйнштейна}}$	формальная стандартная ошибка	ошибка в одну сигму
Октябрь 1969 г. — январь 1971 г.	система по исследованию дальнего космоса (НАСА)[2]	космические корабли Маринер VI и VII	Андерсон и др. [373]	14	1,00	±0,014	±0,04

[1] Здесь (наблюдаемая задержка)/(предсказание Эйнштейна) есть величина $\frac{1}{2}(1+\gamma)$, получаемая, если привести в соответствие наблюдательные данные $\Delta\tau(\tau)$ с более сложной трактовкой ППН-предсказания (40.14). Эта более сложная трактовка включает в себя гравитационные влияния всех планет на орбиты отражателя и Земли, а также действие Луны на земную орбиту и влияние на время движения вращения Земли; кроме того, сюда входит, насколько это возможно, учет запаздывания, обусловленного дисперсией в солнечной короне и в солнечном ветре. «Формальная стандартная ошибка» и «ошибка в одну сигму» определены в таблице из дополнения 40.1.

[2] МТИ — Массачусетский технологический институт, НАСА — Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства.— *Прим. перев.*

§ 40.5. СМЕЩЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОРБИТ

В экспериментах по отклонению света и по временной задержке измеряют параметр γ. Чтобы измерить другие ППН-параметры, нужно изучить влияние гравитации на медленно движущиеся тела; это является содержанием § 40.2.

Смещение перигелия геодезических орбит вокруг сферического Солнца

Начнем с самого простого случая: с геодезической орбиты пробного тела в сферическом гравитационном поле Солнца без учета гравитационных эффектов со стороны планет, сплюснутости Солнца и движения относительно какой-либо предпочтительной системы координат. Тогда ППН-метрика имеет вид (40.3)

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\beta\frac{M_\odot^2}{r^2}\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)].$$

Ориентируем оси координат так, чтобы пробное тело двигалось в экваториальной «плоскости» $\theta = \pi/2$, и вычислим форму его почти кеплеровской, почти эллиптической геодезической орбиты $r(\phi)$. В результате с точностью порядка $M_\odot/r$ лучше, чем в ньютоновской теории, получим

$$r = \frac{(1-e^2)\,a}{1 + e\cos[(1 - \delta\phi_0/2\pi)\,\phi]}, \qquad (40.17)$$

где a и e — постоянные интегрирования, а $\delta\phi_0$ в общей теории относительности определяется выражением

$$\delta\phi_0 = \frac{(2-\beta+2\gamma)}{3}\frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)} = \frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)} \qquad (40.18)$$

(вывод см. в упражнении 40.4).

Заметим, что если бы $\delta\phi_0$ равнялось нулю, как в ньютоновском пределе, то орбита (40.18) представляла бы собой эллипс с большой полуосью a и эксцентриситетом e (см. дополнение 25.4). Постоянное значение $\delta\phi_0$ лишь заставляет эллипс прецессировать: для полного цикла изменения r от перигелия до афелия и вновь к перигелию $(1 - \delta\phi_0/2\pi)\,\phi$ должно измениться на 2π, поэтому ϕ должно измениться на $2\pi + \delta\phi_0$. Таким образом, *за каждое обращение тела по эллипсу перигелий смещается в направлении вращения на угол* $\delta\phi_0$.

Относительно чего смещается перигелий? Он смещается: 1) относительно ППН-системы координат, 2) относительно инерциальных систем, расположенных на окраинах Солнечной системы (поскольку ППН-координаты привязаны к этим системам, см. § 39.12), 3) относительно системы, определяемой «неподвижными звездами» (так как инерциальные системы вдали от Солнца, инерциальные системы, расположенные в любом месте нашей Галактики, и, наконец, инерциальные системы в нашем скоплении галактик не должны испытывать существенного вращения относительно друг друга), 4) относительно перигелиев (других) планет, которые сами смещаются с доступными вычислению скоростями, уменьшающимися по мере движения наружу в Солнечной системе от Меркурия к Венере, от Венеры к Земле и т. д.

Периодические возмущения геодезических орбит

Смещение перигелия — не единственный релятивистский эффект, проявляющийся в орбитальном движении пробного тела. Имеются и другие эффекты, но все они носят периодический характер и не накапливаются со временем, поэтому с ограниченными техническими возможностями эпохи, предшествовавшей освоению космоса, обнаружить их было невозможно. Но техника 70-х годов сделала эти эксперименты осуществимыми. Более того, многие эксперименты космического века с необходимостью имеют малую длительность (меньше или порядка одного оборота по орбите), особенно те из них, для которых используются космические корабли и импульсные повторители, посланные на планеты. Для этих экспериментов периодические возмущения орбиты имеют почти ту же экспериментальную величину, что и накапливающийся сдвиг перигелия. Периодические эффекты не очевидны в ППН-орбитальном уравнении (40.17); оно выглядит как простая прецессия эллипса. Но a, e и $\delta\phi_0$ не являются теми величинами, которые наблюдатель непосредственно измеряет. Вместо этого он измеряет изменение со временем интервалов времени, необходимых для прохождения радиолокационного сигнала туда и обратно, т. е. он измеряет $\Delta\tau\,(\tau)$ и угловые положения на небе $[\theta_0\,(\tau),\ \phi_0\,(\tau)]$. Вычислить эти величины в принципе совершенно просто, но на

практике это оказывается крайне сложной задачей. Вычисления предсказывают периодические релятивистские эффекты с частотой орбитального движения и со всеми ее гармониками. Амплитуды этих эффектов на низших гармониках, очевидно, должны быть порядка $M_\odot \sim 1$ км ~ 10 мкс $\sim 0'',01$. (Расстояние $M_\odot = 1{,}48$ км является характерной длиной для всех релятивистских эффектов в сферическом поле Солнца!)

Сравнение теории с орбитами планет

Самыми благоприятными для проведения экспериментальных проверок смещения перигелия и периодических эффектов являются те орбиты, которые наиболее близко подходят к Солнцу и имеют наибольшие эксцентриситеты [см. (40.18)], т. е. орбиты Меркурия, Венеры, Земли, Марса и астероида Икарус. Но откуда известно, что эти орбиты являются геодезическими? В конце концов, планеты не являются «пробными телами»; они сами создают кривизну пространства-времени, которой нельзя пренебрегать. Оказывается (подробное обсуждение этого вопроса см. в § 40.9), должны существовать слабые отклонения от геодезического движения, но они слишком малы, чтобы конкурировать со смещением перигелия или с периодическими эффектами, обсуждавшимися выше, по крайней мере это так для перечисленных пяти тел.

Интенсивные астрономические наблюдения за орбитами планет, начавшиеся в середине 19 века, на помощь которым после 1966 г. пришла радиолокация, дали точные значения смещений перигелиев орбит различных планет (с точностью до $\pm 0'',4$ за столетие для Меркурия). На основе этих данных, обзор и обсуждение которых даются в дополнении 40.3, для отношения наблюдаемого релятивистского смещения к предсказываемому общей теорией относительности мы получаем следующее значение:

$$\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma) = 1{,}00 \begin{cases} +0{,}01, \\ -0{,}10. \end{cases} \qquad (40.19а)$$

Объединяя этот результат со значением γ, найденным из экспериментов по запаздыванию радиолокационного сигнала, мы получаем значение ППН-параметра β

Экспериментальные результаты для β

$$\beta = 1{,}0 \begin{cases} +0{,}4, \\ -0.2. \end{cases} \qquad (40.19б)$$

(Напомним: β является мерой «нелинейности в законе суперпозиции для g_{00}».)

Периодические эффекты в орбитах планет еще не изучены экспериментально (в 1973 г.).

В приведенном выше рассмотрении и в дополнении 40.3 не учитывается движение Солнечной системы относительно предпочтительной системы (если такая существует), т. е. не учитываются члены (40.3′) в метрике для Солнца. Если учесть эти члены, то мы найдем дополнительный вклад в смещение перигелия, который

для малых эксцентриситетов $e \ll 1$ дается выражением [337]

Смещение перигелия, обусловленное существованием предпочтительной системы

$$\delta\phi_0 = -\alpha_1 \frac{\pi}{2e}\left(\frac{M_\odot}{a}\right)^{1/2} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q} - \alpha_2 \frac{\pi}{4}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{P})^2 - (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q})^2] + \\ + \alpha_3 \frac{\pi}{e}\left(\frac{|\Omega_\odot|}{M_\odot}\right)\left(\frac{\omega_\odot a^2}{M_\odot}\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q}. \qquad (40.20)$$

Здесь $M_\odot$, $\Omega_\odot$ и $\omega_\odot$ — масса, собственная гравитационная энергия и угловая частота вращения Солнца, $\boldsymbol{w}$ — скорость Солнца относительно предпочтительной системы, a и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты, $\boldsymbol{P}$ — единичный вектор в направлении от Солнца к перигелию и $\boldsymbol{Q}$ — единичный вектор, ортогональный $\boldsymbol{P}$ и лежащий в плоскости орбиты. Сравнение с наблюдениями для Меркурия и использование ограничений для α_1 и α_2, которые обсуждаются ниже [формулы (40.46б) и (40.48)], дают ограничение

Экспериментальные результаты для α_3

$$\left|\alpha_3 \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q}}{200\ \text{км/с}}\right| \leqslant 2\cdot 10^{-5}. \qquad (40.21а)$$

Поскольку скорость Солнца относительно центра Галактики ~ 200 км/с и скорость пекулярного движения Галактики относительно соседних галактик ~ 200 км/с, значение $\boldsymbol{w} \sim 200$ км/с является вполне разумным. Кроме того, нет оснований думать, что $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{Q}$ ортогональны, поэтому мы с достаточной уверенностью можем написать

$$|\alpha_3| = |4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta| \leqslant 2\cdot 10^{-5}. \qquad (40.21б)$$

Это сильное ограничение для теорий, в которых фигурируют универсальные системы покоя. Например, оно со всей определенностью исключает теорию, развитую Колеманом [374], в которой $\beta = \gamma = 1$, но $\alpha_3 = -4$ (см. [294]).

Будущее орбитальных экспериментов

Заглядывая в будущее, мы не можем ожидать, что данные по орбитам космических кораблей дадут решающие тесты общей теории относительности, несмотря на высокую точность (~ 10 м в 1972 г.), с которой мы можем следить за космическими кораблями. Космические корабли испытывают действие солнечного ветра. Они реагируют на флуктуации этого ветра и давления солнечного излучения; они реагируют также на «утечку газов» в двигателях. Поэтому до тех пор, пока не будет создан космический корабль, «свободный от сноса», мы должны продолжать полагаться на планеты как на источник сведений о геодезических. Однако в будущем сами планетные данные могут быть сильно улучшены путем размещения радиолокационных импульсных повторителей на поверхности планет или на орбитах вокруг них, за счет усовершенствования радиолокационной техники и, наконец, за счет непрерывного накопления все большего и большего числа наблюдений.

40.4. Вывод смещения перигелия в ППН-формализме

УПРАЖНЕНИЯ

[Точный вывод в общей теории относительности, если гравитация сильна ($2M/r$ достигает 1/3), но при условии малости эксцентриситета см. в упражнении 25.16. Настоящее упражнение применимо для любой «метрической теории» и для любого эксцентриситета, но в предположении, что гравитация слаба ($2M/r \ll 1$) и без учета движения относительно какой-то универсальной системы покоя.] Выведите уравнение (40.17) для формы произвольной связанной орбиты пробной частицы, движущейся в экваториальной плоскости ППН-гравитационного поля (40.3). Сохраните лишь поправки «первого порядка» сверх ньютоновской теории (первого порядка по степеням $M_\odot/r$). [*Краткий набросок решения*, использующего теорию Гамильтона — Якоби (дополнение 25.4): 1. Уравнение Гамильтона — Якоби для пробного тела единичной массы имеет вид

$$-1 = g^{\alpha\beta}\tilde{S}_{,\alpha}\tilde{S}_{,\beta} = -\left[1 + 2\frac{M_\odot}{r} + (4-2\beta)\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right) + \left[1 - 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right]\left[\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2\right].$$

2. Решение уравнения Гамильтона — Якоби, в котором отброшены постпостньютоновские поправки, есть

$$\tilde{S} = -\tilde{E}t + \tilde{L}\phi \pm \int^r \left\{-(1-\tilde{E}^2) + \frac{2M_\odot}{r}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)] - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\left[1 - \frac{2M_\odot^2}{\tilde{L}^2}(2-\beta+2\gamma)\right]\right\}^{1/2} dr. \qquad (40.22)$$

Опуская постпостньютоновские поправки, помните, что $\tilde{E}$ — сохраняющаяся энергия на единицу массы покоя, а $\tilde{L}$ — угловой момент на единицу массы покоя (см. дополнение 25.4). Следовательно, мы имеем соотношения по порядку величины

$$1 - \tilde{E}^2 \sim (\text{скорость пробного тела})^2 \sim M_\odot/r,$$
$$(M_\odot/\tilde{L})^2 \sim (M_\odot/rv)^2 \sim M_\odot/r.$$

3. Форма орбиты определяется условием «конструктивной интерференции» $\partial\tilde{S}/\partial\tilde{L} = 0$:

$$\phi = \pm\int \left\{-\frac{1-\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} + \frac{2M_\odot}{\tilde{L}^2 r}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)] - \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{2M_\odot^2}{\tilde{L}^2}(2-\beta+2\gamma)\right]\right\}^{-1/2} d(1/r).$$

УПРАЖНЕНИЯ

4. Этот интеграл легко берется в тригонометрических функциях. Для связанной орбиты ($\tilde{E} < 1$) он равен

$$\phi = \left(1 + \frac{\delta\phi_0}{2\pi}\right) \arccos\left[\frac{(1-e^2)\,a}{er} - \frac{1}{e}\right],$$

где

$$a \equiv \frac{M_\odot}{1-\tilde{E}^2}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)],$$

$$1-e^2 \equiv \left(\frac{\tilde{L}}{M_\odot}\right)^2(1-\tilde{E}^2)\left[1+2(1+\gamma)(1-E^2)-2\left(\frac{M_\odot}{\tilde{L}}\right)^2(2-\beta+2\gamma)\right], \tag{40.23}$$

$$\delta\phi_0 \equiv \frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma)\,6\pi\,(M_\odot/\tilde{L})^2.$$

5. Простые преобразования приводят этот результат к уравнениям (40.17) и (40.18).]

40.5. Смещение перигелия при учете сплюснутости Солнца

а. Ньютоновский потенциал сплюснутого Солнца имеет вид

$$U = -\frac{M_\odot}{r}\left(1 - J_2\frac{R_\odot^2}{r^2}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right), \tag{40.24}$$

где J_2 —«параметр квадрупольного момента». Известно, что $J_2 \leqslant 3\cdot10^{-5}$. Покажите, что если сплюснутое Солнце покоится в начале системы ППН-координат, то метрику окружающего пространства-времени (39.32) можно привести к виду

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} - 2J_2\left(\frac{M_\odot R_\odot^2}{r^3}\right)\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right) + 2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 +$$
$$+\left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)] +$$
$$+ \text{постпостньютоновские поправки}. \tag{40.25}$$

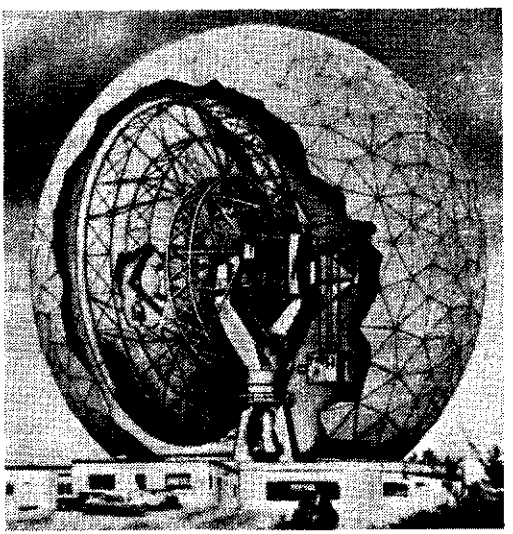
б. Пусть пробная частица движется по связанной орбите в экваториальной плоскости. Пользуясь теорией Гамильтона — Якоби, покажите, что орбита частицы представляет собой прецессирующий эллипс (40.17); прецессия за оборот дается выражением

$$\delta\phi_0 = \frac{2-\beta+2\gamma}{3}\,\frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)} + J_2\,\frac{3\pi R_\odot^2}{a^2(1-e^2)^2}. \tag{40.26}$$

О важности этого результата см. дополнение 40.3.

Дополнение 40.3. СМЕЩЕНИЯ ПЕРИГЕЛИЯ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Релятивистские поправки к ньютоновской теории — не единственная причина смещения перигелия орбиты планеты. Любое отклонение ньютоновского гравитационного поля от его идеализированной сферически симметричной формы со спаданием по закону обратных квадратов также приводит к смещению перигелия. Подобные отклонения от сферической симметрии и возникающие в их результате смещения обусловлены 1) гравитационным притяжением со стороны других планет и 2) деформированностью Солнца («сплюснутость Солнца», «квадрупольный момент»). Кроме того, если исходными данными служат оптические положения планет на небе (прямое восхождение и наклонение как функции времени), то имеется видимое смещение перигелия, вызванное прецессией земной оси («общая прецессия», наблюдатель не на «покоящейся платформе»; см. упражнение 16.4).



Радарная антенна Хэйстэк, которую Ирвин Шапиро и его группа использовали для накопления обширного материала по систематизации планет внутренней части Солнечной системы. Эти данные быстро стали самым важным источником информации о смещениях перигелиев.

Смещения перигелиев, обусловленные общей прецессией и гравитационными притяжениями со стороны других планет, могут быть рассчитаны с высокой точностью. Но в 1973 г. еще нет вполне надежного способа определения квадрупольного момента Солнца. В качестве количественной характеристики квадрупольного момента Солнца обычно используют безразмерный параметр J_2, который входит в следующее выражение для ньютоновского потенциала:

$$U = \frac{M_\odot}{r}\left[1 - J_2 \frac{R_\odot^2}{r^2}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right].$$

Если бы Солнце вращалось со скоростью, близкой к скорости развала, то J_2 было бы близко к единице. Очень тщательные измерения видимой формы Солнца [304] указывают на сплюснутость, из которой следует, что J_2 может быть близким к $3 \cdot 10^{-5}$.

Суммарное смещение перигелия, создаваемое релятивистскими эффектами и квадрупольным моментом Солнца, равно (см. упражнение 40.5)

$$\delta\phi = \frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)}\lambda_p,$$

$$\lambda_p \equiv \frac{2-\beta+2\gamma}{3} + J_2 \frac{R_\odot^2/M_\odot}{2a(1-e^2)}.$$

Заметим, что релятивистские и квадрупольные смещения по-разному зависят от большой полуоси a и от эксцентриситета e орбиты. Это различие зависимостей позволяет получить как параметр квадрупольного момента J_2, так и ППН-параметр $\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma)$ путем сопоставления измерений $\delta\phi$ для нескольких планет.

Ниже приводятся экспериментальные результаты, полученные до 1972 г.

I. Данные для Меркурия, полученные из оптических измерений [375, 376] [1] (ОТО без сплюснутости Солнца предсказывает 43″,03 за столетие)

Величина	Значение
а. Полное наблюдаемое смещение за столетие	5599″,74±0″,41
б. Вклад в смещение, обусловленный тем, что наблюдатель находится не в инерциальной системе отсчета вдали от Солнца («общая прецессия», рассчитанная в 1947 г.)	5025″,645±0″,50
в. Смещение за столетие, обусловленное ньютоновским притяжением других планет	531″54±0″,68
г. Остающееся смещение за столетие, которое следует приписать ОТО и сплюснутости Солнца	42″,56±0″,94
д. Остающееся смещение, если использовать для «общей прецессии» значение 1973 г.	41″,4±0″,90
е. Соответствующее значение λ_p (см. выше)	$\lambda_p = 0{,}96 \pm 0{,}02$

II. Результаты 1970 г., полученные Шапиро [339, 377, 378] и Шапиро и др. [379]

а. Значения λ_p, полученные из пересмотра совокупности всех имеющихся оптических данных и сопоставления их с радиолокационными данными	$\begin{cases} (\lambda_p)_{\text{Меркурий}} = 1{,}00 \pm 0{,}01 \\ (\lambda_p)_{\text{Марс}} = 1{,}07 \pm 0{,}10 \end{cases}$
б. Значение J_2, полученное путем сравнения наблюдаемых смещений перигелиев Меркурия и Марса	$J^2 \leqslant 3 \cdot 10^{-5}$

III. Теоретические следствия из результатов Шапиро

а. Значение $(2-\beta+2\gamma)/3$	$1{,}00 \begin{cases} +0{,}01 \\ -0{,}10 \end{cases}$
б. Значение β, полученное путем сопоставления с γ из экспериментов по временной задержке [формула (40.16)]	$1{,}0 \begin{cases} +0{,}4 \\ -0{,}2 \end{cases}$

[1]) Клеменс [376] заметил: «Нельзя проводить наблюдения в ньютоновской системе отсчета. Они привязываются к точке весеннего или осеннего равноденствия, т. е. на них влияет прецессия точек равноденствия, а определение прецессионного движения — одна из наиболее трудных, если не самая трудная проблема наблюдательной астрономии. Ввиду всех этих помех неудивительно, что могут существовать разные мнения относительно того, насколько хорошо наблюдаемые движения согласуются с теоретическими».

2

Остальная часть этой главы относится к курсу 2. Для подготовки к ней никакой предшествующий материал курса 2 не является обязательным, но полезны следующие разделы: 1) гл. 6 (ускоренные наблюдатели), 2) § 17.6 (отсутствие первичной геометрии) и 3) гл. 38 и 39 (проверки основ; другие теории; ППН-формализм). Эта глава не является обязательной для подготовки к каким-либо последующим главам.

§ 40.6. ЭФФЕКТЫ ТРЕХ ТЕЛ ДЛЯ ОРБИТЫ ЛУНЫ

Все обсуждавшиеся до сих пор релятивистские эффекты касаются сферической части внешнего гравитационного поля Солнца, и, таким образом, в них проявляются лишь ППН-параметры β и γ, а также «параметры, связанные с наличием предпочтительной системы», α_1, α_2 и α_3. Попытки измерить другие ППН-параметры можно свести к исследованию взаимодействия трех тел (что обсуждается в этом параграфе), увлечения инерциальных систем отсчета вращающимся телом (§ 40.7), аномалий локально измеренной гравитационной постоянной (§ 40.8) и, наконец, отклонений орбит планет и Луны от геодезических (§ 40.9).

Эффекты трех тел, проявляющиеся на лунной орбите:

Нет лучшего места для изучения взаимодействия трех тел, чем лунно-земная орбита. Притяжения Земли, Луны и Солнца дают вклад в гравитационное поле. Возмущения в движении Земли и Луны вокруг их общего центра гравитации могут быть измерены с высокой точностью при использовании для этой цели метода измерений расстояния с помощью лазера (в начале 70-х годов расстояние от Земли до Луны измерено с точностью ~ 10 см), а также при использовании радиомаяка на поверхности Луны (угловое положение на небе потенциально разрешимо с точностью лучше $0''{,}001$ дуги).

1) теория

Кроме любых ньютоновских взаимодействий трех тел Земля и Солнце, действие которых складывается нелинейным образом, должны создавать релятивистские возмущения лунной орбиты, которые едва попадают в область, доступную современной технике. Эти эффекты зависят от уже знакомых параметров γ (мера кривизны пространства) и β [мера нелинейности при суперпозиции $(U_{\text{Земля}} + U_{\text{Солнце}})^2$ в g_{00}]. Кроме того, они зависят от параметра β_2, который регулирует степень влияния потенциала Солнца, действующего внутри Земли, на силу гравитационного притяжения со стороны самой Земли; это влияние проявляется как вариация силы притяжения к Земле, когда Земля приближается или удаляется от Солнца. По-видимому, эти эффекты зависят также от параметров ζ, Δ_1 и Δ_2, которые регулируют изменения гравитации, обусловленные орбитальным моментом Земли и анизотропиями ее кинетической энергии, вызванными Солнцем.

Брумберг [380], Байерлейн [381], а также Крог и Байерлейн [382] рассчитали эти три преобладающих эффекта трех тел для лунно-земной орбиты, используя общую теорию относительности и теорию Дикке — Бранса — Йордана. Эти эффекты некумулятивны и имеют амплитуды ~ 100, ~ 20 и ~ 10 см соответственно.

Относительно эффекта с амплитудой 100 см (впервые открытого де Ситтером [383]) известно, что он зависит только от γ. Точная зависимость других эффектов от ППН-параметров не известна.

2) перспективы измерений

Прогнозы, касающиеся возможностей измерения этих эффектов в 70-х годах, весьма расплывчаты; эти эффекты замаскированы пекулярностями орбиты Луны, которые не имеют никакого отношения к общей теории относительности.

§ 40.7. УВЛЕЧЕНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Прецессия гироскопов

В обсуждавшихся до сих пор экспериментах изучалось движение электромагнитных волн, космических кораблей, планет и астероидов в Солнечной системе. Совершенно иной характер носят эксперименты по измерению изменений ориентации гироскопов, движущихся в гравитационном поле Земли. Эти эксперименты особенно важны по той причине, что они позволяют непосредственно измерить «увлечение инерциальных систем отсчета» моментом импульса Земли.

Полезно, прежде чем переходить к конкретному случаю вращающейся Земли, вывести общее выражение для прецессии гироскопа в постньютоновском пределе. (Читателям курса 1 и тем читателям, которые не изучали гл. 6 и 39, возможно, будет трудно следить за выводом. Ничего страшного. Важен ответ!)

1) общий анализ

Пусть S^α — спин гироскопа (т. е. вектор его момента импульса) и пусть u^α — его 4-скорость. Спин всегда ортогонален 4-скорости, $S^\alpha u_\alpha = 0$ (см. дополнение 5.6). *Предположим, что любые негравитационные силы, действующие на гироскоп, приложены к его центру масс*, так что в его собственной системе отсчета нет вращательного момента. Тогда спин гироскопа будет испытывать «перенос Ферми — Уолкера» вдоль мировой линии гироскопа (см. § 6.5):

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = \mathbf{u}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}), \qquad \mathbf{a} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 4\text{-ускорение}. \tag{40.27}$$

Цель вычислений состоит в том, чтобы выписать и исследовать уравнение переноса в постньютоновском пределе.

Гироскоп движется относительно ППН-координат со скоростью $v_j \equiv dx^j/dt \equiv dx_j/dt$. Предположим, что $v_j \leqslant \varepsilon$, где ε — постньютоновский параметр разложения ($\varepsilon^2 \approx M_\odot/R_\odot$). При движении гироскопа вместе с ним движется ортонормированная система $\mathbf{e}_{\hat\alpha}$, связанная с ППН-системой координат обычным лоренцевым бустом с перенормировкой длины базисных векторов [преобразование (39.41)]. В этой сопутствующей системе отсчета спин является чисто пространственным вектором ($S^0 = 0$); его длина $(S_{\hat j} S_{\hat j})^{1/2}$ остается фиксированной (закон сохранения момента импульса), а направление определяется законом переноса Ферми — Уолкера.

В противоположность спину базисные векторы $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$ сопутствующей системы не испытывают переноса Ферми — Уолкера. Вместо этого они связаны с помощью обычного буста (без вращения!) с сеткой ППН-координат, которая привязана к инерциальной системе отсчета вдали от Солнечной системы, а последнюю мы считаем фиксированной относительно «удаленных звезд». Таким образом, вычисляя прецессию спина относительно сопутствующей системы координат

$$dS_{\hat{j}}/d\tau \equiv \varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\Omega_{\hat{k}}S_{\hat{l}}, \tag{40.28}$$

мы фактически рассчитываем угловую скорость прецессии спина $\Omega_{\hat{j}}$ относительно системы отсчета, фиксированной на небе удаленными звездами.

Вычислим $dS_{\hat{j}}/d\tau$:

$$\frac{dS_{\hat{j}}}{d\tau} = \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S})\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}} + \mathbf{S}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{j}}) = \mathbf{S}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{j}}. \tag{40.29}$$

Здесь использован тот факт, что $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}$ имеет то же направление, что и $\mathbf{u}$ [уравнение (40.27)], и тем самым ортогонально $\mathbf{e}_{\hat{j}}$. Величину $\mathbf{S}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{j}}$ легко вычислить в ППН-системе координат. При расчете мы пользуемся в качестве метрических коэффициентов [формулы (39.32)] выражениями

$$\begin{gathered} g_{00} = -1 + 2U + O(\varepsilon^4), \qquad g_{jk} = \delta_{jk}(1 + 2\gamma U) + O(\varepsilon^4), \\ g_{0j} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + \left(\begin{array}{l}\text{«члены, обусловленные}\\ \text{наличием предпочти-}\\ \text{тельной системы»}\end{array}\right) + \\ + O(\varepsilon^5); \end{gathered} \tag{40.30}$$

в качестве компонент $\mathbf{e}_{\hat{j}}$ и $\mathbf{S}$ мы принимаем выражения [полученные с помощью преобразования (39.41)]

$$\begin{gathered} e^0_{\hat{j}} = v_j + O(\varepsilon^3), \quad e^k_{\hat{j}} = (1-\gamma U)\,\delta_{jk} + \frac{1}{2}v_k v_j + O(\varepsilon^4), \\ S^0 = v_j S_{\hat{i}} + O(\varepsilon^3 S_j), \\ S^k = (1-\gamma U)\,S_{\hat{k}} + \frac{1}{2}v_k v_j S_{\hat{j}} + O(\varepsilon^4 S_j); \end{gathered} \tag{40.31}$$

кроме того, мы пользуемся соотношением

$$dv_j/d\tau = a_j + U_{,j} + O(\varepsilon^2 U_{,j}), \tag{40.32}$$

где a_j (принимаются $\leqslant U_{,j}$) — компоненты 4-ускорения. Для прецессии спина мы получаем (см. упражнение 40.6) следующий результат:

$$dS_{\hat{j}}/d\tau = \mathbf{S}\cdot\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{e}_{\hat{j}} = S_{\hat{k}}\,[v_{[j}a_{k]} + g_{0[k,\,j]} - (2\gamma+1)\,v_{[j}U_{,\,k]}].$$

В *трехмерной векторной форме* этот результат принимает вид

2) общая ППН-формула для прецессии

$$d\boldsymbol{S}/d\tau = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{S}, \tag{40.33а}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv -\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{g} + \left(\gamma + \tfrac{1}{2}\right) \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\nabla} U, \tag{40.33б}$$

$$\boldsymbol{g} \equiv g_{0j} \boldsymbol{e}_{\hat{j}}. \tag{40.33в}$$

Для этого окончательного ответа не имеет значения, вычисляли ли мы 3-векторы, входящие в $\boldsymbol{\Omega}$, в ППН-системе координат или в сопутствующей ортонормированной системе отсчета, поскольку $\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ и $\partial/\partial x_j$ отличаются лишь на поправки порядка ε^2.

Уравнения (40.33) *дают вполне общее для постньютоновского уровня аппроксимации описание прецессии спина гироскопа* $\boldsymbol{S}$ *относительно сопутствующей ортонормированной системы, которая не испытывает вращения по отношению к удаленным звездам.*

3) прецессия Томаса

Для электрона со спином $\boldsymbol{S}$, вращающегося вокруг протона, присутствует лишь первый член $-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}$ (нет гравитации). Этот член приводит к прецессии Томаса, играющей важную роль в тонкой структуре атомных спектров (см., например, [384]). Другие способы вывода прецессии Томаса см. в упражнении 6.9 и в § 41.4.

Прецессия Томаса вступает в игру для гироскопа на поверхности Земли ($\boldsymbol{a}$ равно ньютоновскому гравитационному ускорению), но не для гироскопа на свободно движущемся спутнике.

4) прецессии, обусловленные ускорением и ньютоновским потенциалом Земли

Если не учитывать вращение Земли и эффекты, связанные с предпочтительной системой отсчета, и если поместить ППН-систему координат в состоянии покоя относительно центра Земли, то g_{0j} обращается в нуль и $\boldsymbol{\Omega}$ дается выражением

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{v} \times \left[-\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a} + \left(\gamma + \tfrac{1}{2}\right) \boldsymbol{\nabla} U \right] = \\ = \gamma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\nabla} U \text{ для гироскопа на поверхности Земли} \\ = \left(\gamma + \tfrac{1}{2}\right) \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\nabla} U \text{ для гироскопа на орбите.}\end{aligned} \tag{40.34}$$

Общерелятивистский член $\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \boldsymbol{v} \times U$ обусловлен движением гироскопа в искривленной статической пространственно-временной геометрии Земли. Отметим, что он зависит только от одного параметра γ, который уже проверялся в экспериментах с электромагнитными волнами. Для гироскопа на полярной орбите вблизи Земли по порядку величины

$$\Omega \approx \tfrac{3}{2} \left(\frac{M_E}{R_E}\right)^{1/2} \left(\frac{M_E}{R_E^2}\right) \approx 8'' \text{ за год.} \tag{40.35}$$

Общерелятивистская прецессия $\frac{3}{2}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\nabla} U$ была выведена де Ситтером [383] для «гироскопа Земля — Луна», вращающегося вокруг

Солнца. Одиннадцать лет спустя Томас [385] вывел прецессию $-\frac{1}{2} v \times a$ в специальной теории относительности применительно к атомной физике.

5) прецессия за счет вращения Земли

Вращение Земли создает недиагональные члены g_{0j} в ППН-метрике (упражнение 40.7):

$$g = g_{0j} e_{\hat{j}} = -\left(\frac{7}{4}\Delta_1 + \frac{1}{4}\Delta_2\right)\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (40.36)$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ — момент импульса Земли. Эти недиагональные члены дают вклад в прецессию гироскопа

$$\Omega = -\frac{1}{2}\nabla\times g = \left(\frac{7}{8}\Delta_1 + \frac{1}{8}\Delta_2\right)\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{J} + \frac{3(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{r^2}\right]. \qquad (40.37)$$

Отметим, что этот вклад в отличие от других не зависит от линейной скорости гироскопа. Мы можем представить себе это следующим образом.

Гироскоп не вращается относительно инерциальных систем, находящихся в его окрестности. Гироскоп и локально инерциальные системы отсчета вращаются относительно далеких галактик с угловой скоростью Ω, поскольку вращение Земли «увлекает» за собой локально инерциальные системы отсчета. Отметим, что вблизи Северного и Южного полюсов локально инерциальные системы отсчета вращаются в том же направлении, что и Земля (Ω параллельно $\boldsymbol{J}$), но вблизи экватора они вращаются в противоположном направлении (Ω антипараллельно $\boldsymbol{J}$; сравните Ω с магнитным полем Земли). Хотя на первый взгляд это может показаться парадоксальным, аналогия, развитая Шиффом, делает это обстоятельство более понятным [1]). Рассмотрим вращающуюся, твердую сферу, погруженную в вязкую жидкость. По мере своего вращения сфера будет увлекать за собой жидкость. В разных точках внутри жидкости поместим маленькие палочки и будем наблюдать, как жидкость, протекая мимо палочек, вращает их. Ясно, что вблизи полюсов жидкость будет вращать палочки в том же направлении, в каком вращается сфера. Но вблизи экватора, поскольку жидкость увлекается на меньшем радиусе быстрее, чем на большем, ближайший к сфере конец палочки увлекается жидкостью быстрее, чем ее дальний конец. Следовательно, палочка вращается в направлении, противоположном вращению сферы.

По порядку величины угловая скорость прецессии, обусловленной вращением Земли, равна

$$\Omega \sim J_E/R_E^3 \sim 0'',1 \text{ за год}. \qquad (40.37')$$

6) перспективы измерения прецессии

Как эту, так и более сильную прецессию, обусловленную движением в статическом поле Земли [формула (40.35)], возможно,

[1]) Эту аналогию можно строго обосновать математически; см. в работе [386] примечание на стр. 255; см. также § 21.12, посвященный принципу Маха.

удастся обнаружить в 70-х годах. Установка, предназначенная для их обнаружения в эксперименте на спутнике, строится в настоящее время (1973 г.) в Стэнфордском университете, см. [387], а также [388] [1]).

Прецессия гироскопа, создаваемая движением Земли относительно предпочтительной системы отсчета (если она есть), слишком мала и не представляет большого интереса.

УПРАЖНЕНИЯ

40.6. Угловая скорость прецессии

Выведите уравнения (40.33) для прецессии гироскопа в постньютоновском пределе. Проведите вывод, положив в основу уравнения (40.29) — (40.32).

40.7. Недиагональные члены в метрике вблизи Земли

Представьте Землю в виде изолированной, вращающейся как твердое тело сферы с моментом импульса $\boldsymbol{J}$. Пользуясь уравнениями (39.34б), (39.34в) и (39.27), покажите (в трехмерных векторных обозначениях), что вне Земли в ППН-системе покоя Земли

$$\boldsymbol{V} \equiv V_j \boldsymbol{e}_{\hat{j}} = \boldsymbol{W} = W_j \boldsymbol{e}_{\hat{j}} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}/r^3. \tag{40.38}$$

Выведите отсюда формулу (40.36).

40.8. Взаимодействие спина с кривизной

Рассмотрите вращающееся вокруг собственной оси тело (например, Землю, гироскоп или электрон), движущееся в искривленном пространстве-времени. Приливные гравитационные силы, создаваемые кривизной пространства-времени, действуют на элементарные составные части вращающегося тела. Эти силы должны зависеть не только от положений таких составных частей относительно центра объекта, но также и от их относительных скоростей. Кроме того, спин тела в сопутствующей ортонормированной системе

$$S \equiv \int (\rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\, d\,(\text{объем})$$

является мерой относительных положений и скоростей этих частей тела. Поэтому мы ожидаем, что спин взаимодействует с прилив-

---

[1]) Увлечение инерциальных систем отсчета вращающимися телами играет важную роль всюду в гравитационной физике, например в определении момента импульса гравитирующего тела (§ 19.2) и в физике черных дыр (гл. 33). Впервые этот эффект был рассмотрен и рассчитан Тирринго и Лензом [389]. Более поздние вычисления Брилла и Коэна [390] для идеализированных ситуаций, где эффект велик, позволили глубже понять его механизм. См. также обсуждение принципа Маха в § 21.12.

ными гравитационными силами, т. е. с кривизной пространства-времени, создавая отклонения от геодезического движения. Тщательное решение ППН-уравнений гл. 39 для общей теории относительности обнаруживает [391, 392], что подобное взаимодействие имеет место и что оно вызывает отклонение мировой линии от того пути, по которому она проходила бы в случае отсутствия этого взаимодействия:

$$m\frac{Du^\alpha}{d\tau} = -S_\mu u_\nu \frac{D^2 u_\beta}{d\tau^2}\varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\lambda\mu\rho\tau}R^{\alpha\nu}{}_{\lambda\mu}\right)u_\nu S_\rho u_\tau. \quad (40.39)$$

Оцените по порядку величины влияние дополнительного члена на орбиты планет в Солнечной системе.

[*Ответ.* Этот эффект слишком слаб, чтобы его можно было обнаружить. Однако в природе существуют два других случая, когда следует ожидать такого эффекта: 1) когда быстро вращающаяся нейтронная звезда или черная дыра, обладающая существенным моментом импульса, входит в сильное приливное поле другой нейтронной звезды или черной дыры и 2) когда отдельный электрон или вся совокупность электронов «дираковского моря состояний с отрицательной энергией» входит в еще более сильное приливное поле (поздняя фаза гравитационного коллапса). Подобное приливное поле, или кривизна, растаскивает в разные стороны два электрона с противоположными направлениями спина [392—395] точно так же, как электрическое поле растаскивает в разные стороны электроны с противоположными знаками заряда («поляризация вакуума», см. особенно [396]). В принципе приливное поле, оказывающее действие на спин электрона, не обязательно должно обусловливаться «фоновой» кривизной пространства-времени; оно может быть создано расположенным поблизости массивным вращающимся объектом, наподобие «живой» черной дыры (гл. 33) («гравитационное спин-спиновое взаимодействие», см. [388]).]

§ 40.8. ПОСТОЯННА ЛИ ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ?

Заголовок и предмет этого параграфа, вероятно, вызовут недоумение. На протяжении всей книги использовались геометрические единицы, в которых $G = c = 1$. Поэтому читатель окончательно утвердился в той точке зрения, что запрещено даже спрашивать, меняется ли гравитационная постоянная от события к событию.

Ошибка! Совершенно справедливо ставить этот вопрос и при условии $G = c = 1$, если ясно понимать, что́ подразумевается при этом.

В § 1.5 и 1.6 c было *определено* как некоторый коэффициент пересчета от сантиметров к секундам, а G/c^2 — как коэффициент

пересчета от граммов к сантиметрам. Эти определения не гарантируют, однако, что эксперимент Кавендиша [1]) по измерению притяжения между двумя телами даст

$$\text{сила} = -Gm_1m_2/r^2 = -m_1m_2/r^2.$$

Если общая теория относительности правильно описывает классическую гравитацию и если значения коэффициентов пересчета G и c выбраны правильно, то любой эксперимент Кавендиша в любом месте Вселенной *даст*: «сила $= -m_1m_2/r^2$». Но если правильное описание гравитации дает теория Дикке — Бранса — Йордана или почти любая другая метрическая теория, то сила в эксперименте Кавендиша будет зависеть от того, где и когда проводится эксперимент, а не только от m_1, m_2 и r. Чтобы рассматривать эксперимент Кавендиша как тест гравитационной теории, мы должны ввести новый коэффициент пропорциональности

Определение «гравитационной постоянной Кавендиша» G_C

$$G_C \equiv G_{\text{Кавендиш}} \equiv (\text{«гравитационная постоянная Кавендиша»}), \tag{40.40}$$

который входит в ньютоновский закон для силы

$$\text{сила} = -G_Cm_1m_2/r^2. \tag{40.41}$$

В общей теории относительности постоянная Кавендиша будет равняться единице, но в большинстве других метрических теорий она будет меняться от события к событию в пространстве-времени.

Изменения G_C со временем

В некоторых теориях, подобных теории Дикке — Бранса — Йордана, постоянная Кавендиша определяется распределением вещества во Вселенной. В результате расширение Вселенной приводит к изменению ее значения:

$$\frac{1}{G_C}\frac{dG_C}{dt} \sim -\left(\frac{\text{от 0,1 до 1}}{\text{возраст Вселенной}}\right) \sim \frac{-1}{10^{10}\text{ или }10^{11}\text{ лет}}$$

(см., например, [288]). Целый ряд наблюдений накладывает ограничения на подобные вариации во времени. Сильные временные изменения G_C на протяжении последних 4,6 миллиарда лет привели бы к заметным эффектам на Земле, Солнце и во всей Солнечной системе. Обзор и сравнение ожидаемых геофизических проявлений с наблюдениями были даны Дикке и Пиблсом [399]. Сделать определенные выводы очень трудно из-за сложности привлекаемых геофизических данных, но с достаточной уверенностью можно

---

[1]) Описание экспериментов Кавендиша приводится в любом обычном учебнике. В первоначальном варианте эксперимента с двумя раздельными сферами, подвешенными на тонких проволочках, Генри Кавендиш [397] определил массу и тем самым плотность Земли. Он сообщил: «С помощью экспериментов, проделанных с использованием первой проволочки, плотность Земли оказалась в 5,48 раза больше, чем плотность воды; в экспериментах с другой проволочкой плотность оказалась той же самой... Самый крайний результат отличается от среднего не больше чем на 0,38, или на $^1/_{14}$ от целого». Самый точный современный метод измерения G [398] дает $G_C = (6{,}674 \pm 0{,}004) \times 10^{-8}$ см^3/(г·с^2) (с точностью до одного стандартного отклонения).

дать такое ограничение

$$(1/G_C)\,(dG_C/dt) \leqslant 1/10^{10} \text{ лет (геофизическое ограничение).} \quad (40.42а)$$

В конце концов очень точные измерения орбитальных движений планет позволят дать лучшие ограничения. В настоящее время наблюдения орбит планет показывают [400], что

$$(1/G_C)\,(dG_C/dt) \leqslant 4/10^{10} \text{ лет (по орбитам планет).} \quad (40.42б)$$

Эти ограничения достаточно жесткие, чтобы привлечь интерес, но еще не достаточно жесткие, чтобы отвергнуть какую-нибудь конкурирующую жизнеспособную теорию гравитации.

Пространственные вариации G_C

Если постоянная G_C определяется распределением вещества во Вселенной, то она должна зависеть от того, где и когда мы находимся во Вселенной. В частности, двигаясь от точки к точке в Солнечной системе, то приближаясь к Солнцу, то удаляясь от него, мы должны были бы видеть, что G_C меняется. Это имеет место в большинстве метрических теорий гравитации, но не в общей теории относительности. Анализируя эксперименты Кавендиша с использованием ППН-формализма, мы обнаруживаем, что пространственные вариации G_C даются выражением [293, 355, 356]

$$\Delta G_C = -2G_C\,(\beta + \gamma - \beta_2 - 1)\,U. \quad (40.43)$$

Амплитуда этих вариаций на эллиптической земной орбите составляет $\Delta G_C/G_C \sim 10^{-10}$, если $\beta + \gamma - \beta_2 - 1 \sim 1$. Она слишком мала и не может быть непосредственно измерена в 70-х годах. Несмотря на большие усилия и изобретательность, наиболее точные эксперименты по измерению величины G_C имели в 1972 г. относительную точность хуже 10^{-4} [401]. Эксперименты по поиску годовых вариаций G_C на Земле без измерения абсолютного ее значения («эксперименты нулевого типа»), несомненно, могут быть проведены с более высокой точностью, чем 10^{-4}, но не с точностью, близкой к 10^{-10}. С другой стороны, *косвенные* следствия пространственных вариаций G_C в Солнечной системе почти наверняка измеримы (см. § 40.9).

Зависимость G_C от скорости

В теории гравитации Ни (дополнение 39.1) и других похожих двухтензорных или векторно-тензорных теориях, где первичная геометрия выделяет предпочтительную «универсальную систему покоя», постоянная Кавендиша G_C может зависеть от скорости относительно предпочтительной системы. Для экспериментов Кавендиша с двумя равными массами, разделенными расстояниями, большими по сравнению с их размерами, G_C изменяется как [293]

$$\Delta G_C = G_C\left[\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\,v^2 - \frac{1}{2}\alpha_2\,(v\cdot n)^2\right]. \quad (40.44)$$

Здесь v — скорость установки, участвующей в эксперименте Кавендиша, относительно предпочтительной системы, а n — единичный вектор между двумя массами. Для экспериментов,

в которых одно тело представляет собой массивную сферу (например, Землю), а другое — малый объект на поверхности сферы, G_C изменяется как [337]

$$\Delta G_C/G_C = \frac{1}{2}[(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_2(1-I/MR^2)]\,v^2 - \\ -\frac{1}{2}\alpha_2(1-3I/MR^2)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2. \qquad (40.44')$$

Здесь M и R — масса и радиус сферы, а

$$I = \int (\rho r^2)\,4\pi r^2\,dr$$

есть след второго момента распределения массы по сфере. Следствия, к которым должны приводить эти эффекты для орбит планет, еще не рассмотрены, но следствия для экспериментов, связанных с Землей, уже ясны.

Аномалии в земных приливах за счет анизотропий в G_C

Представим себе эксперимент Кавендиша, в котором одна масса является Землей, а другая — гравиметром на поверхности Земли. Гравиметр дает значение «локального гравитационного ускорения»

$$g = G_C m_{\text{Земля}}/r^2_{\text{Земля}}. \qquad (40.45)$$

Поскольку Земля вертится, единичный вектор $\boldsymbol{n}$ между ее центром и гравиметром вращается; при этом G_C и тем самым g должны колебаться с периодом 12 ч по звездному времени и с амплитудой

$$(\Delta g/g)_{\text{ампл}} = \frac{1}{4}\alpha_2 v^2\cos^2\theta_m.$$

Здесь θ_m — минимальное при вращении Земли значение угла между $\boldsymbol{v}$ (постоянным вектором) и $\boldsymbol{n}$ (вращающимся вектором). (*Замечание.* Мы использовали для Земли значение $I/MR^2 \simeq 0{,}5$.) Эти флуктуации должны приводить к приливам на Земле того же типа, что и создаваемые Луной и Солнцем. Гравиметрические измерения вблизи земного экватора, проведенные до 1972 г., не обнаружили каких-либо проявлений аномальных 12-часовых (по звездному времени) эффектов вплоть до амплитуды $\sim 10^{-9}$ [293]. Следовательно,

1) экспериментальное значение α_2

$$|\alpha_2|^{1/2} v\cos\theta_m = |\Delta_2+\zeta-1|^{1/2} v\cos\theta_m \leqslant 6\cdot 10^{-5} \sim 20\ \text{км/с}. \qquad (40.46a)$$

Воспользовавшись грубой оценкой $v \sim 200$ км/с для скорости Земли относительно универсальной системы покоя и $\theta_m \leqslant 60^\circ$ для угла между $\boldsymbol{v}$ и экваториальной плоскостью Земли, мы получаем такое грубое ограничение:

$$|\alpha_2| = |\Delta_2+\zeta-1| \leqslant 0{,}03. \qquad (40.46б)$$

(Это ограничение не критично для трех теорий, описанных в дополнении 39.1; среди них лишь теория Ни обладает первичной геометрией и универсальной системой покоя; она предсказывает

изотропные эффекты в $\Delta G_C/G_C$ [формула (40.44)], но не предсказывает анизотропных эффектов. Однако другие теории с универсальной системой покоя, например теория Папапетру [402—404], исключаются с помощью этого ограничения [294, 337].)

2) экспериментальное опровержение теории Уайтхеда

Теория гравитации Уайтхеда (которая является двухтензорной теорией с несколько отличным от теории Ни типом первичной геометрии) предсказывает, что Галактика должна создавать не зависящие от скорости анизотропии в G_C. Они в свою очередь должны создавать приливы на Земле с периодами в 12 ч по звездному времени и с амплитудами [293]

$$\Delta g/g \sim 2\cdot 10^{-7} \sim 100 \times \begin{pmatrix}\text{экспериментальное ограничение}\\ \text{на подобные амплитуды}\end{pmatrix}.$$

Отсутствие подобных приливов доказывает ошибочность теории Уайтхеда. (Такое доказательство невозможно получить из измерений красного смещения, отклонения света, временной задержки или смещения перигелия, так как предсказания теорий Уайтхеда и Эйнштейна для этих «классических экспериментов» тождественны.)

Аномалии вращения Земли за счет зависимости G_C от скорости

Формула (40.44′) предсказывает годовые периодические вариации постоянной Кавендиша на Земле, по мере того как Земля вращается вокруг Солнца:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\text{скорость Земли}\\ \text{относительно Солнца}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{скорость Солнца относительно}\\ \text{выделенной системы отсчета}\end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{w};$$

$$\left(\frac{\Delta G_C}{G_C}\right)_{\substack{\text{усредненное}\\ \text{по поверхности}\\ \text{Земли}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\right)(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_E^2 + 2\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E). \qquad (40.47)$$

изменяется по синусоидальному закону с периодом в 1 год

Если предположить, что все ППН-параметры порядка единицы, то эта годовая вариация в 1000 раз превосходит вариацию, создаваемую движением Земли в гравитационном потенциале Солнца с попеременным приближением и удалением от Солнца [формула (40.43)]. Вследствие такого изменения постоянной Кавендиша должно изменяться собственное гравитационное притяжение Земли, т. е. Земля должна «дышать»: вдох (усиление притяжения) должен сменяться выдохом (ослабление притяжения). Возникающие в результате вариации момента инерции Земли должны приводить к годовым изменениям скорости ее вращения ω («продолжительности дня», измеряемого атомными часами) [337]

$$\delta\omega/\omega \sim 0{,}1\left(\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E.$$

Сравнение с измеренными годовыми вариациями скорости вращения (которые приписываются геофизиками сезонным изменениям в атмосфере Земли) дает следующее ограничение:

$$\left|\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\right| \leqslant 0{,}2. \tag{40.48}$$

Экспериментальное значение величины $\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1$

Это ограничение исключает некоторые теории гравитации с выделенными системами отсчета, в том числе и теорию Ни (дополнения 39.1 и 39.2).

Совокупность экспериментальных результатов (40.21), (40.46) и (40.48) налагает на любую теорию, обладающую универсальной системой покоя, следующие весьма грубые ограничения:

$$\begin{aligned} |\,\alpha_1\,| &= |\,7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4\,| \leqslant 0{,}2, \\ |\,\alpha_2\,| &= |\,\Delta_2 + \zeta - 1\,| \leqslant 0{,}03, \\ |\,\alpha_3\,| &= |\,4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta\,| \leqslant 2\cdot 10^{-5}. \end{aligned} \tag{40.49}$$

Эти ограничения полностью опровергают все теории с выделенными системами отсчета, которые были изучены до настоящего времени, за исключением теории, разработанной Виллом и Нордведтом [294, 337].

Зависимость G_C от химического состава

Согласно некоторым теориям гравитации, результат эксперимента Кавендиша зависит от химического состава и внутренней структуры пробных тел (упражнения 40.9 и 40.10). Крюцер [405] провел наиболее точные поиски подобных эффектов. Он нашел, что G_C одинакова для фтора и брома с точностью до

$$\left|\frac{G_C\,(\text{бром}) - G_C\,(\text{фтор})}{G_C}\right| \leqslant 5\cdot 10^{-5}. \tag{40.50}$$

УПРАЖНЕНИЯ

40.9. Постоянная Кавендиша для идеализированного Солнца

Представьте Солнце в виде статической сферы из идеальной жидкости, находящейся в начале ППН-координат. Тогда его внешнее гравитационное поле имеет вид (40.3) с $M_\odot$, даваемой формулой (40.4). Следовательно, пробное тело массы m, расположенное вдали от Солнца на расстоянии r, ускоряется гравитационной силой

$$\text{сила} = -mM_\odot/r^2. \tag{40.51a}$$

а. Вычислите массу Солнца M в смысле количества энергии, требуемого для построения Солнца, путем добавления одной сферической оболочки вещества поверх другой, начиная такую про-

цедуру от центра и продолжая ее наружу. [*Ответ*:

$$M = \underbrace{\int_0^{R_\odot} \rho_0 (1 + \Pi + 3\gamma U)\, 4\pi r^2\, dr}_{\text{масса покоя + внутренняя энергия}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{R_\odot} \rho_0 U 4\pi r^2\, dr}_{\text{гравитационная потенциальная энергия}} =$$

$$= \int_0^{R_\odot} \rho_0 \left[1 + \Pi + \left(3\gamma - \frac{1}{2}\right) U\right] 4\pi r^2\, dr\,. \quad] \qquad (40.51б)$$

б. Воспользуйтесь теоремой вириала [формула (39.21б)], чтобы переписать формулу (40.4) в виде

$$M_\odot = \int_0^{R_\odot} \rho_0 \left[1 + \beta_3 \Pi + \left(2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_4\right) U\right] 4\pi r^2\, dr. \qquad (40.51в)$$

в. Объедините приведенные выше уравнения с определением постоянной Кавендиша для r далеко за пределами Солнца

$$\text{сила} = -G_C m M / r^2, \qquad (40.51г)$$

чтобы получить

$$G_C = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{масса Солнца, определяемая по искривлению} \\ \text{мировой линии удаленной пробной частицы}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{масса-энергия, определяемая путем применения} \\ \text{закона сохранения энергии к каждому из этапов} \\ \text{построения Солнца}\end{array}\right)} =$$

$$= 1 + \int (\rho_0 / M_\odot) \left[(\beta_3 - 1)\,\Pi + \frac{1}{2}(4\beta_2 + \beta_4 - 6\gamma + 1)\, U\right] 4\pi r^2\, dr. \qquad (40.52)$$

Постоянная G_C будет зависеть от внутренней структуры Солнца! И только в том случае, когда $\beta_3 = 1$ и $4\beta_2 + \beta_4 - 6\gamma + 1 = 0$ (что, конечно, выполняется для ОТО), зависимость отсутствует. Конкретизируя формулу (40.52) применительно к «консервативным» теориям гравитации (дополнение 39.5), объясните, почему результат такой, каким его можно было бы ожидать, исходя из уравнения (40.43).

40.10. Постоянная Кавендиша для произвольного тела

Обобщите исследование, проведенное в упражнении 40.9, на источник с произвольным давлением, имеющий произвольную форму и произвольные внутренние скорости (подчиняющийся ограничениям постньютоновского приближения $v^2 \ll 1$, $|t_{\hat{j}\hat{k}}|/\rho_0 \ll 1$, $U \ll 1$, $\Pi \ll 1$). Предположите, что тело неподвижно относительно универсальной системы покоя. Покажите, что

УПРАЖНЕНИЯ

G_C не зависит от внутренней структуры источника, за исключением случая, когда

$$2\beta_1 - \beta_4 = 1, \quad 4\beta_2 + \beta_4 - 6\gamma = -1, \quad \beta_3 = 1, \quad \zeta = 0, \quad \eta = 0. \tag{40.53}$$

Конечно, все эти ограничения на ППН-параметры удовлетворяются в теории Эйнштейна.

§ 40.9. ДВИЖУТСЯ ЛИ ПЛАНЕТЫ И СОЛНЦЕ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ?

Перед экспериментами в Солнечной системе стоит основной вопрос: движутся ли планеты и Солнце по геодезическим пространства-времени? Этот вопрос осложняется тем обстоятельством, что сами движущиеся тела дают вклад в пространственно-временную кривизну.

В каком смысле ОТО предсказывает геодезическое движение Солнца и планет

Чтобы решить этот вопрос и получить на него ответ в рамках общей теории относительности, рассмотрим доказательство типа «эйнштейновского лифта». Рассматриваемый астрономический объект обладает внешней границей, и каждая точка на этой границе описывает в пространстве-времени мировую линию. Эти мировые линии определяют мировую трубку. На некотором расстоянии снаружи от этой мировой трубки построим «буферную зону», как в § 20.6. Внутренний и внешний размеры этой зоны выберем в соответствии с массой и моментами объекта, а также с кривизной окружающего пространства («напряженность приливной силы внешнего гравитационного поля») таким образом, чтобы отклонение метрики ε (ср. § 20.6) от плоской в буферной зоне принимало значения не больше удвоенного экстремально достижимого значения $\varepsilon_{\text{экстр}}$ (минимального по отношению к изменениям r, максимального по отношению к изменениям направления). Тогда с точностью до ошибок порядка ε можно считать, что объект движется в асимптотически плоском пространстве. В этом случае применим закон сохранения 4-импульса и, следовательно, объект движется (локально) по прямой линии с постоянной скоростью. Рассмотрим затем «фоновую геометрию», согласующуюся сразу же за пределами буферной зоны с фактической геометрией с точностью до $\varepsilon_{\text{экстр}}$ или лучше, но внутри нее представляющую собой решение эйнштейновских уравнений поля в случае отсутствия источников. Тогда с точностью, определяемой значением $\varepsilon_{\text{экстр}}$, локально прямая линия, вдоль которой движется астрономический объект, будет геодезической этой фоновой геометрии.

Отклонение от геодезического движения:

До тех пор пока отклонению фактического движения от движения по геодезическим можно придать какой-то определенный смысл (задача, усложняемая тем фактом, что на самом деле фоно-

вой геометрии не существует), мы можем вычислять это отклонение, используя ППН-формализм или какую-то другую приближенную схему (см., например, [406]). Обычно это отклонение в существенной степени, а иногда и целиком является следствием взаимодействия тензора кривизны Римана внешнего гравитационного поля и мультипольных моментов астрономического объекта (угловой момент, связанный с вращением; квадрупольный и более высокие моменты, связанные с деформацией; см., например, упражнения 40.8 и 16.4). Это взаимодействие играет важную роль в системе Земля — Луна, но чтобы его рассчитать, нет нужды использовать теорию относительности: теория Ньютона решает эту задачу с более чем достаточной точностью, по крайней мере это было бы так, если бы мы достаточно хорошо знали внутреннее строение Земли и Луны! Для Солнца и планет этот эффект пренебрежимо мал. (Упражнение: докажите это, пользуясь ньютоновской теорией!)

1) за счет взаимодействия с кривизной

Таким образом, в общей теории относительности, применяемой к Солнечной системе, орбиту Солнца, орбиту центра масс системы Земля — Луна и любой другой планеты можно аппроксимировать геодезическими в «фоновой геометрии пространства-времени», которая имела бы место, если бы отсутствовали эффекты их собственной кривизны. Такой подход применялся при изучении смещения перигелия планет в § 40.5 в рамках общей теории относительности и в упражнении 39.15 при выводе постньютоновских «уравнений движения многих тел».

В большинстве других метрических теорий гравитации, включая теорию Дикке — Бранса — Йордана, имеют место существенные отклонения от движения по геодезическим. Доказательство типа «эйнштейновского лифта» в этих теориях неприменимо, поскольку пространство-время наделено не только метрикой, но и дальнодействующими полями, которые косвенно взаимодействуют (ср. § 38.7 и 39.2) с массивными гравитирующими телами.

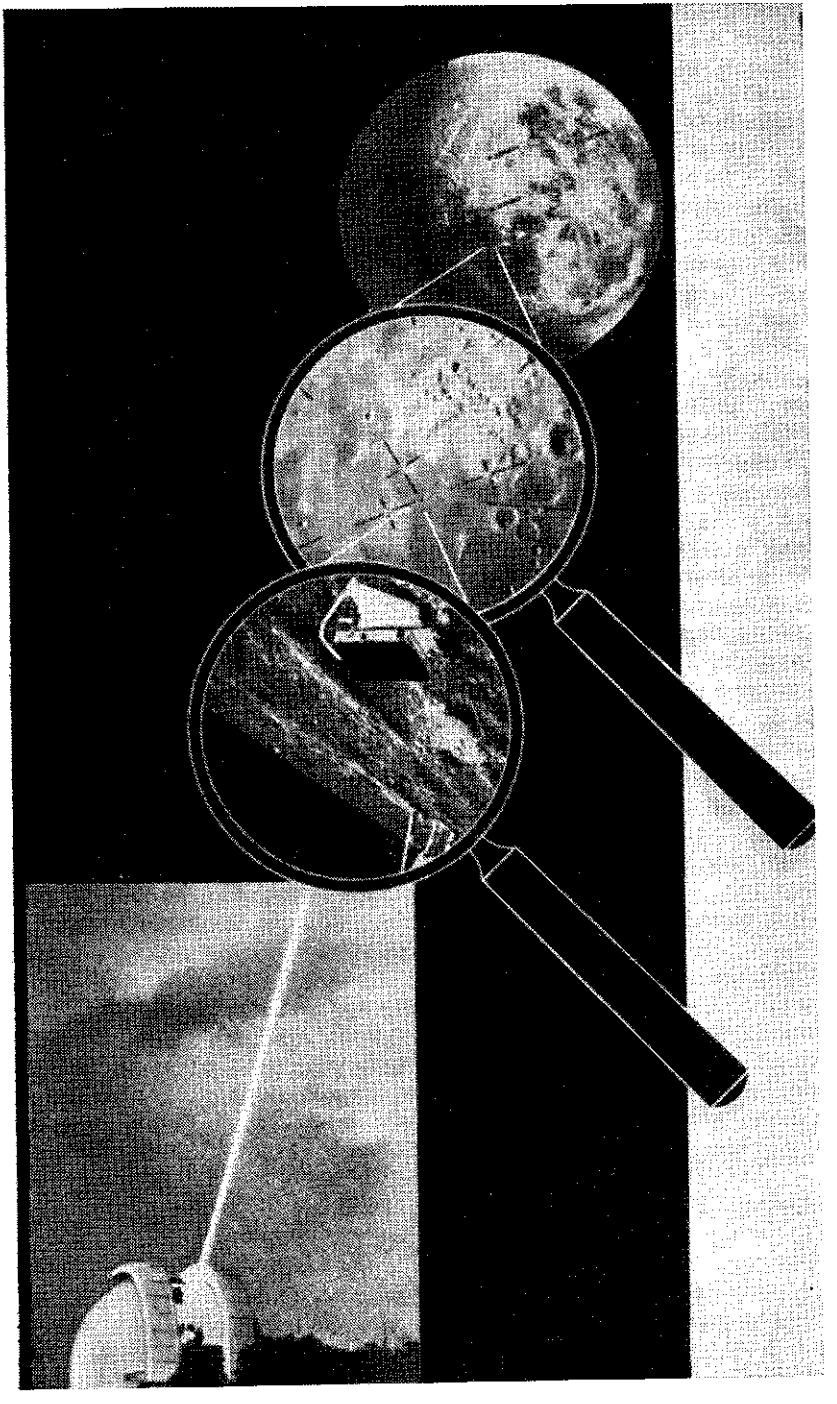
Это явление проще всего понять, исходя из доказательства Дикке влияния пространственных вариаций фундаментальных постоянных на эксперименты типа Этвеша — Дикке (см. § 38.6). В теории, где гравитационная постоянная Кавендиша G_C зависит от положения (чего нет и не может быть в общей теории относительности), тело со значительной энергией самогравитации $E_{\text{грав}}$ должно падать в совершенно однородном внешнем гравитационном поле с аномальным ускорением:

2) за счет пространственной зависимости гравитационной постоянной (эффект Нордведта)

$$(\text{ускорение массивного тела}) - (\text{ускорение пробного тела}) = \\ = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial E_{\text{грав}}}{\partial G_C}\right)\nabla G_C = \frac{E_{\text{грав}}}{MG_C}\nabla G_C \qquad (40.54)$$

[см. формулу (38.15)]. В теории Дикке — Бранса — Йордана G_C по существу представляет собой величину, обратную скалярному полю, и содержит малую часть, пропорциональную ньютоновско-

2



му потенциалу U [формула (40.43) с подходящими значениями параметров из дополнения 39.2]. В результате Солнце падает с ускорением, которое на 10^{-6} меньше, чем ускорение пробного тела; Юпитер падает с ускорением, которое меньше ускорения пробного тела на 10^{-9}, и Земля — с ускорением меньше на 10^{-10}. На релятивистском языке это означает, что скалярное поле, влияя на собственную гравитационную энергию массивного тела, создает отклонения от движения по геодезическим.

Можно воспользоваться полным ППН-формализмом гл. 39 для вычисления движения массивных тел в любой метрической теории гравитации. Нордведт [284] и Вилл [293] проделали это. Они нашли, что массивное тело, покоящееся в однородном внешнем поле, испытывает в ППН-координатах ускорение (ньютоновского типа), даваемое выражением

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = E_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k},$$

ФИГ. 40.4.
Измерение расстояния между Землей и Луной путем определения временной задержки (около 2,5 с) между испусканием света лазером, расположенным на Земле, и возвращением сигнала обратно на Землю. Ключевым элементом в этой программе измерения является уголковый отражатель; первый такой отражатель был установлен на Луне 20 июля 1969 г. экипажем Аполлона 11. В ноябре 1971 г. на Луне уже было три отражателя: два американских и один французского производства, установленный на Луне Советским Союзом. Импульсный рубиновый лазер направляет луч через 107-дюймовый рефлектор Макдональдской обсерватории Техасского университета на горе Локе, 119 миль к востоку от Эль Пасо. Этот луч образует на поверхности Луны световое пятно диаметром около 3,2 км. Лазерный луч отражается по направлению к Земле с помощью «лазерных направляющих отражателей» (LR^3). Каждый из них состоит из алюминиевой панели 46 × 46 см с вставленными в нее 100 уголковыми кубиками из плавленого кварца; размер каждого кубика 3.8 см. Первый из установленных отражателей показан на фотографии вблизи лунной капсулы. Он наклонен относительно лунного ландшафта. Фотография была сделана непосредственно перед отлетом астронавтов Армстронга и Олдрина на Землю. Вторая фотография — поле зрения направляющего окуляра Макдональдского 107-дюймового телескопа; она сделана Д. Карри в промежутке, когда не производился лазерный выстрел в сторону Аполлона 11. Наведение телескопа на центральную часть моря Спокойствия (маленький кружок) производится с помощью предварительной наводки на наиболее заметные черты лунного ландшафта. В ноябре 1971 г. эксперимент с LR^3 и продолжавшиеся во время полета измерения проводились по инициативе НАСА группой исследователей, составленной из представителей нескольких научно-исследовательских центров. Одному из членов этой группы К. Алли мы благодарны за любезно предоставленные фотографии. Благодаря деятельности НАСА расстояние между лазерным источником на Земле и отражателем на Луне теперь известно с точностью лучше чем полметра. Астронавты оставили после себя не только отражатель LR^3, сейсмограф и другое оборудование, но также плиту с надписью: «Мы пришли с миром от имени всего человечества».

где E_{jk} — величина, зависящая от структуры тела:

$$E_{jk} = \delta_{jk}\left\{1 - (7\Delta_1 - 3\gamma - 4\beta)\frac{E_{\text{грав}}}{m}\right\} - \\ - (2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma + \Delta_2 - 2)\frac{\Omega_{jk}}{m}, \qquad (40.55)$$

$$\Omega_{jk} = -\frac{1}{2}\int \frac{\rho\rho'_0\,(x_j - x'_j)\,(x_k - x'_k)}{|x - x'|^3}\,d^3x\,d^3x', \quad E_{\text{грав}} = \sum \Omega_{jj}.$$

Здесь m — полная масса-энергия тела, Ω_{jk} — «тензор потенциальной энергии Чандрасекара» и $E_{\text{грав}}$ — собственная гравитационная энергия тела. [*Замечание.* Метод Дикке вычисления аномального ускорения (40.54) становится неприменимым в тех теориях, которые не являются «консервативными» (дополнение 39.5).]

В общей теории относительности комбинации ППН-коэффициентов, входящие в E_{jk}, обращаются в нуль, так что $E_{jk} = \delta_{jk}$, и тело падает с обычным ускорением, т. е. оно движется по геодезической. Но в большинстве других теорий гравитации $E_{jk} \neq \delta_{jk}$ тело *не* движется по геодезической, и его ускорение может даже не совпадать по направлению с градиентом ньютоновского потенциала!

Такое предсказываемое отклонение от движения по геодезическим называется *эффектом Нордведта*. Возможность этого эффекта впервые была вскользь упомянута Дикке [407], но Нордведт [284, 408] обнаружил его независимо и весьма детально исследовал. Эффект Нордведта в теории, отличной от общей теории относительности, приводит к ряду явлений в Солнечной системе, которые потенциально могут быть наблюдаемы. (Эти явления перечислены в работе [357], где даны ссылки на литературу.) Наиболее удобной для проверки является «поляризация» лунно-земной орбиты, обусловленная тем, что Луна должна «падать» к Солнцу с бóльшим ускорением, чем Земля. Эта «поляризация» приводит к эксцентриситету орбиты, всегда вытянутой по направлению к Солнцу, с амплитудой

Эффект Нордведта на лунно-земной орбите

$$\delta r = 840\left[3\gamma + 4\beta - 7\Delta_1 - \frac{1}{3}(2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma + \Delta_2 - 2)\right]\text{см} = \qquad (40.56)$$

$= 67$ м — в теории Ни (дополнения 39.1 и 39.2),

$= \frac{8{,}4}{2 + \omega}$ м — в теории Дикке — Бранса — Йордана (дополнения 39.1 и 39.2),

$= 0$ — в эйнштейновской теории.

К середине 70-х годов данные по измерению расстояния до Луны с помощью лазера позволят, вероятно, определить амплитуды этой поляризации с точностью до 1 м или лучше (см. [409], а также фиг. 40.4).

§ 40.10. КРАТКОЕ РЕЗЮМЕ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ПРОВЕРКАМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Общая теория относительности больше не является «раем для теоретиков и адом для экспериментаторов». Теперь она рай для всех — как это сразу можно видеть, внимательно изучив перечень экспериментов, приведенный в дополнении 40.4. Более того, после каждой проверки общая теория относительности выходила невредимой — замечательная награда 1973 г. гению Альберта Эйнштейна 1915 г.

Дополнение 40.4. ПЕРЕЧЕНЬ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Тип эксперимента	Описание эксперимента	Где обсуждается
I. Проверки основ общей теории относительности	1. Проверки универсальности свободного падения (эксперименты Этвеша — Дикке — Брагинского)	§ 33.3; фиг. 1.6; дополнение 1.1
	2. Проверки существования метрики (замедление времени распада частиц; значение лоренцевой группы в кинематике частиц и т. д.)	§ 38.4
	3. Поиски новых медленно убывающих с расстоянием полей, взаимодействующих непосредственно с веществом (эксперимент Хьюза — Древера; эксперименты по движению относительно эфира)	§ 38.7; фиг. 38.3
	4. Эксперименты по гравитационному красному смещению	§ 38.5; фиг. 38.1 и 38.2, § 7.2—7.4
	5. Постоянство во времени и пространстве негравитационных физических констант	§ 38.6
II. Постньютоновские эксперименты («в Солнечной системе»)	1. Отклонение Солнцем света и радиоволн	§ 40.3; дополнение 40.1
	2. Релятивистская задержка времени распространения радиолокационного луча туда и обратно при прохождении вблизи Солнца	§ 40.4; дополнение 40.2
	3. Смещения перигелиев и периодические возмущения планетарных орбит	§ 40.5; дополнение 40.3
	4. Эффекты трех тел на лунной орбите	§ 40.6
	5. Прецессия гироскопов, «геодезическая прецессия» и прецессия за счет увлечения инерциальных систем отсчета вращением Земли	§ 40.7
	6. Пространственные вариации гравитационной постоянной Кавендиша в Солнечной системе	§ 40.8 и 40.9
	7. Зависимость гравитационной постоянной Кавендиша от химического состава тела	§ 40.8
	8. Земные приливы с сидерическими периодами	§ 40.8
	9. Годовые вариации скорости вращения Земли	§ 40.8
	10. Периодические изменения расстояния между Землей и Луной за счет нарушения геодезичности движения	§ 40.9

Продолжение

Тип эксперимента	Описание эксперимента	Где обсуждается
III. Космологические наблюдения	1. Изменение гравитационной постоянной Кавендиша со временем в Солнечной системе	§ 40.8
	2. Крупномасштабные свойства Вселенной (расширение, изотропия, однородность; существование и свойства космического микроволнового излучения...)	гл. 27—30 и особенно гл. 29
	3. Согласие различных определений возраста Вселенной (возраст по расширению, возраст самых старых звезд, возраст Солнечной системы)	§ 29.7
IV. Гравитационно-волновые эксперименты	Существование волн, скорость распространения, поляризационные свойства...	гл. 35—37, особенно гл. 37

ЧАСТЬ X

ГРАНИЦЫ

Здесь читатель, который на протяжении сорока глав
(не считая предисловия) вел жизнь, полную разнообразия:
в течение восьми глав он был математиком,
четыре раза его переманивали (один раз — старый друг),
в течение четырех глав был космологом,
на протяжении следующих четырех глав — астрофизиком,
перенесшимся в страну черных дыр, и, наконец,
унаследовал богатую коллекцию экспериментов,
жил честно и стал истинно правоверным,
теперь отваживается на исследование новых границ,
которые ему еще предстоит завоевать.

41. СПИНОРЫ

Эта глава целиком относится к курсу 2. Для подготовки к ней не требуется никакой предшествующий материал курса 2, и сама эта глава не обязательна для подготовки к чтению всех последующих глав

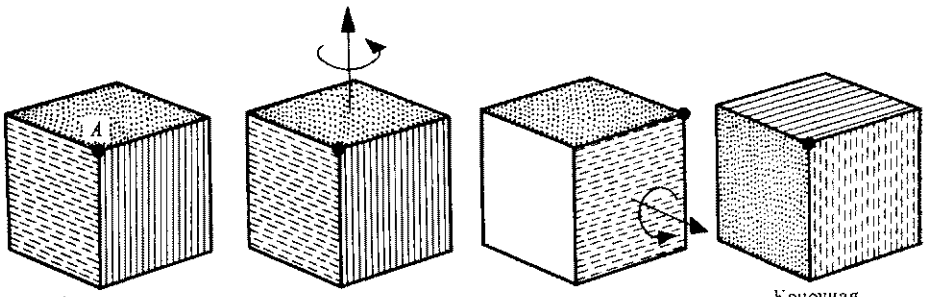
§ 41.1. ОТРАЖЕНИЯ, ВРАЩЕНИЯ И СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ

Понятие спиноров и их применение в теории относительности возникли из исследований «вращений» — сначала в пространстве, а затем в пространстве-времени. Возьмем куб (фиг. 41.1). Повернем его вокруг одной из осей на 90°. Затем выберем другую ось под прямым углом к первой. Вокруг новой оси вновь повернем куб на угол 90°. Таким образом, куб переведен из одной ориентации, которую мы будем называть «начальной», в другую, которую обозначим как «конечную». Как можно осуществить это преобразование в один прием, одним вращением? Другими словами, по какому закону происходит сложение вращений?

Проблема сложения вращений

Если бы вращения описывались векторами, можно было бы применить закон сложения векторов. Результирующая двух векторов одинаковой величины (90°) под прямым углом друг к другу представляет собой один вектор, который 1) лежит в той же плоскости и 2) имеет величину $2^{1/2} \times 90° = 127{,}28°$. Оба эти предсказания не верны. Чтобы перевести куб из начальной ориентации в конечную одним поворотом, нужно 1) взять ось, проходящую от центра через вершину A, и 2) повернуть куб на угол 120°.

Каким же вычислительным алгоритмом может быть представлен, казалось бы столь странный, закон сложения вращений? Вечером 16 октября 1843 г. Уильям Роуен Гамильтон прогуливался со своей женой вдоль Королевского канала в Дублине, когда ему в голову неожиданно пришел ответ на этот вопрос — плод многолетних раздумий. Он сразу же нацарапал ножом на одном



ФИГ. 41.1.
Вращение вокруг вертикальной оси на 90°, за которым следует вращение вокруг горизонтальной оси на 90°, приводит к результирующему изменению ориентации, которое может быть достигнуто одним вращением на 120° вокруг оси, проходящей от центра через угол A.

из камней Бругэмского моста такие формулы [1]):

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1,$$

которые в современных обозначениях

$$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = i\boldsymbol{i}, \quad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix} = i\boldsymbol{j}, \quad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = i\boldsymbol{k} \tag{41.1}$$

принимают вид

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1,$$
$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \quad \text{(с циклической перестановкой индексов).} \tag{41.2}$$

Операторы вращения: 1) определение

Каждому вращению приписывается величина («кватернион» Гамильтона; современные названия «спиновая матрица», «спинорное преобразование» или же «оператор вращения»)

$$R = \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)\,(\sigma_x\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma). \tag{41.3}$$

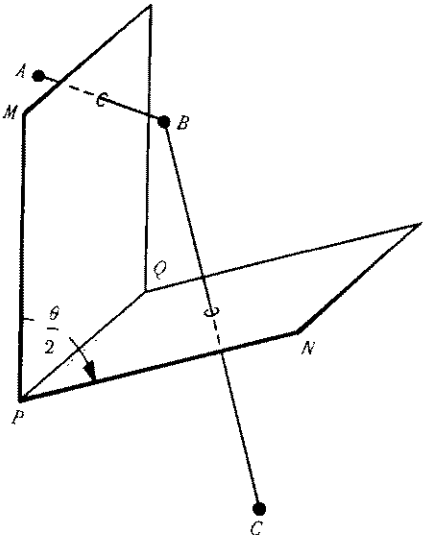
где θ — угол вращения, а α, β и γ — углы между осью вращения и осями координат. Вращение, описываемое величиной R_1, за которым следует вращение, описываемое величиной R_2, дает полное изменение ориентации, описываемое одним вращением

2) как аппарат для сложения вращений

$$R_3 = R_2R_1. \tag{41.4}$$

Это формула Гамильтона для сложения двух вращений (некоторые шаги к ее получению были сделаны Эйлером в 1776 г.; в 1819 г.

[1]) В том же городе 21 июня 1972 г. президент Имон де Валера рассказывал одному из авторов, что, находясь в тюрьме в один из вечеров 1916 г. в ожидании расстрела, назначенного на следующее утро, он записал понравившуюся ему формулу $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$.



ФИГ. 41.2.
Отражение в плоскости MPQ переводит A в B. Отражение в плоскости NPQ переводит B в C. Комбинация двух отражений в плоскостях, угол между которыми $\theta/2$, приводит к тому же конечному результату (преобразование от A к C), что и вращение на угол θ вокруг линии PQ.

формула была получена Гауссом, но он никогда ее не опубликовывал).

В примере на фиг. 41.1

$$R_1 \text{ (вращение на угол } \theta = 90^\circ \text{ вокруг оси } z) = (1 - i\sigma_z)/2^{1/2},$$

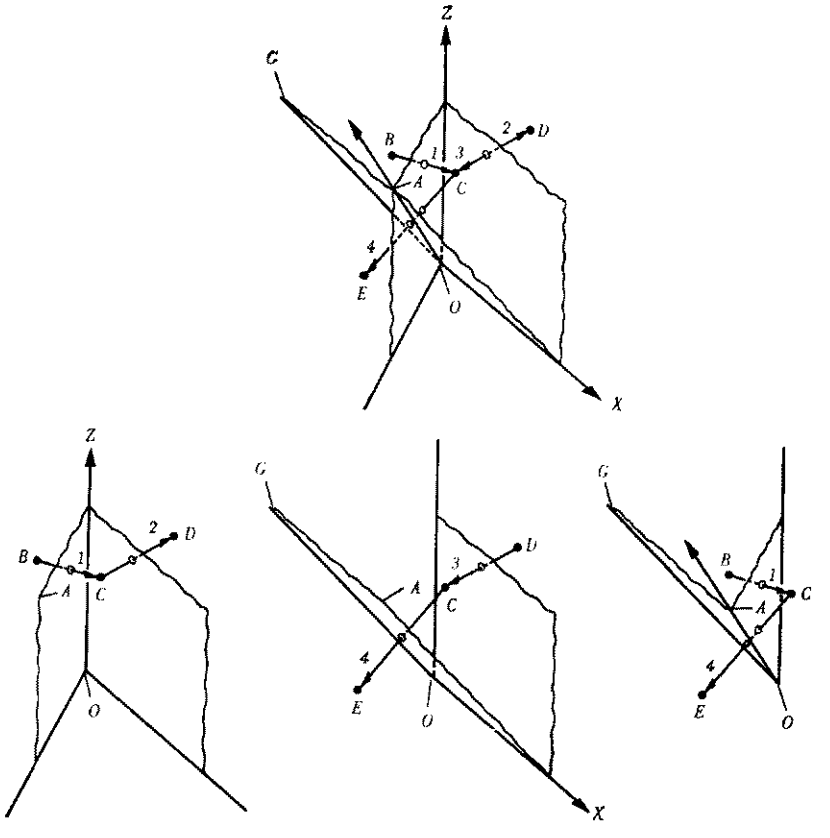
$$R_2 \text{ (вращение на угол } \theta = 90^\circ \text{ вокруг оси } x) = (1 - i\sigma_x)/2^{1/2},$$

а их произведение есть

$$R_2R_1 = (1 - i\sigma_x + i\sigma_y + i\sigma_z)/2 =$$
$$= \cos 60^\circ - i \sin 60^\circ (\sigma_x/3^{1/2} - \sigma_y/3^{1/2} + \sigma_z/3^{1/2}).$$

Согласно правилу Гамильтона (41.3), этот результат означает вращение на 120° вокруг оси, проходящей под равными углами к осям x, y и z, в согласии с тем, что мы уже видели на фиг. 41.1 (ось вращения проходит через центр куба и вершину A).

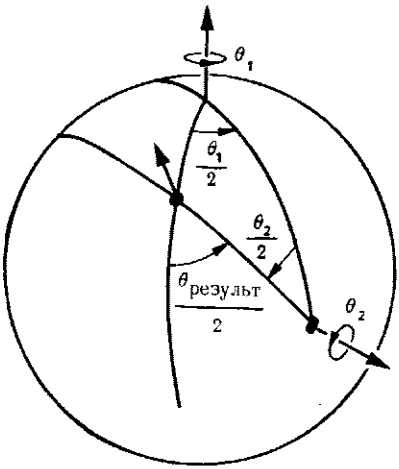
То же самое можно проделать и в общем случае: получить параметры θ_3, α_3, β_3, γ_3 результирующего вращения (четыре неизвестные), приравнивая четыре коэффициента при четырех единичных матрицах Гамильтона 1, $-i\sigma_x$, $-i\sigma_y$, $-i\sigma_z$ в правой и левой частях уравнения $R_3 = R_2R_1$. Таким путем мы приходим к четырем докватернионным формулам Родригеса [928] для сложения двух вращений.



ФИГ. 41.3.
Совокупность двух вращений, выраженная через отражения. Первое вращение (на 90° вокруг OZ в примере на фиг. 41.1) описывается с помощью отражения *1*, за которым следует отражение *2* (в этом примере угол между двумя плоскостями отражения составляет $90°/2 = 45°$). Второе вращение выглядит как результат отражений *3* и *4*. Но отражения *2* и *3* происходят от общей для них плоскости ZOX. Поэтому одно отражение аннулирует другое. Таким образом, последовательность четырех операций *1 2 3 4* сокращается до двух отражений *1* и *4*. Они в свою очередь заменяются одним вращением вокруг оси OA.

Геометрическая причина появления половинного угла в операторах вращения

Почему здесь появляются половинные углы? И что кроется за этим законом сложения вращений? Ответ на оба вопроса один и тот же: вращение на угол θ вокруг данной оси можно рассматривать как результат двух последовательных отражений в двух плоскостях, пересекающихся вдоль этой оси под углом $\theta/2$ друг к другу (фиг. 41.2). Таким образом, два вращения предполагают четыре отражения. Однако можно устроить так, чтобы отражения *2* и *3* совершались от одной и той же плоскости, в которой лежат



ФИГ. 41.4.
Закон сложения вращений, изображенный с помощью сферического треугольника, каждый из интересующих нас углов которого равен половине соответствующего угла вращения.

обе оси вращения. Тогда отражение *3* в точности уничтожает отражение *2*. После этого остаются лишь отражения *1* и *4*, которые вместе взятые образуют одно вращение — искомое результирующее вращение (фиг. 41.3 и 41.4).

Вращение

Алгебраические свойства операторов вращения

$$R = \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)\,(\sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma)$$

уничтожается обратным вращением

$$R^{-1} = \cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)\,(\sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma). \tag{41.3'}$$

Поэтому произведение двух операторов вращения

$$RR^{-1} = R^{-1}R = 1 \tag{41.5}$$

является единичным оператором, оставляющим без изменения все, на что бы он ни действовал. Соответствующий оператор R^{-1} для комбинации двух вращений $R = R_2R_1$ есть

$$R^{-1} = R_1^{-1}R_2^{-1} \tag{41.5'}$$

(обратный порядок индексов!), в чем можно убедиться путем непосредственной подстановки в (41.5).

Сопряженная транспонированная матрица M^* получается из матрицы M, если вместо каждого элемента матрицы взять комплексно сопряженную ему величину, а затем строки и столбцы поменять местами. Непосредственной проверкой матричных соот-

ношений (41.1) можно установить, что $\sigma_x^* = \sigma_x$, $\sigma_y^* = \sigma_y$, $\sigma_z^* = \sigma_z$. Такие матрицы называют эрмитовыми. Результат транспонирования произведения двух матриц $M = PQ$ представляет собой произведение $M^* = Q^*P^*$ отдельных сопряженных транспонированных матриц, взятых в обратном порядке. Заметим, что для приведенных выше матриц вращения $R^* = R^{-1}$. Такие матрицы называют унитарными. Абсолютное значение детерминанта унитарной матрицы равно единице, как это можно видеть из следующего доказательства:

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\text{единичная матрица}) = \det(RR^{-1}) = \\ &= \det(RR^*) = \det R \det R^* = \\ &= |\det R|^2. \end{aligned} \tag{41.6}$$

В действительности детерминант спиновой матрицы вращения с необходимостью равен единице («унимодулярная матрица»), как это будет показано в следующих ниже упражнениях.

УПРАЖНЕНИЯ

41.1. Простейшие свойства матрицы вращения

Запишите формулу (41.3) в виде

$$R(\theta) = \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$$

и установите следующие ее свойства:

а) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = \mathbf{1} \equiv$ единичная матрица;

б) $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$ (Sp — след, т. е. сумма диагональных элементов);

в) $\underbrace{[\boldsymbol{R},\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})]}_{\uparrow\ \text{коммутатор}} \equiv R(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})R = 0;$

г) $\dfrac{dR}{d\theta} = -\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})R.$ (41.7)

[Заметим, что если θ рассматривать как угол, увеличивающийся с угловой скоростью ω, так что $d\theta/dt = \omega = \text{const}$, то это последнее уравнение читается как

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega})R, \tag{41.7'}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}$.]

41.2. Детерминант матрицы вращения равен единице

Вспомните, что, согласно упражнению 5.5, для любой матрицы M мы имеем

$$d[\ln(\det M)] = \mathrm{Sp}\,(M^{-1}\,dM),$$

и воспользуйтесь этим, чтобы показать, что $\det R$ в (41.7) является константой и поэтому равен $(\det R)_{\theta=0} = 1$.

---

§ 41.2. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ВРАЩЕНИЯ

Инфинитезимальные вращения

Заданное вращение можно получить, совершая последовательно два вращения на угол, равный половине заданного, или четыре вращения на угол, равный одной четвертой, или восемь вращений на угол в одну восьмую и т. д. Так в пределе мы приходим к понятию инфинитезимального вращения, описываемого спиновой матрицей

$$R = 1 - (i/2)\,(\sigma_x\, d\theta_{yz} + \sigma_y\, d\theta_{zx} + \sigma_z\, d\theta_{xy}),$$

или

$$R = 1 - (i\, d\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}). \tag{41.8}$$

Здесь величины

$$\begin{aligned} d\theta_{yz} &= -d\theta_{zy} = n^x\, d\theta = \cos\alpha\, d\theta,\\ d\theta_{zx} &= -d\theta_{xz} = n^y\, d\theta = \cos\beta\, d\theta,\\ d\theta_{xy} &= -d\theta_{yx} = n^z\, d\theta = \cos\gamma\, d\theta \end{aligned} \tag{41.9}$$

представляют собой компоненты инфинитезимальных вращений в трех плоскостях, указанных с помощью индексов. Инфинитезимальное вращение в плоскости (x, y) на угол $d\theta_{xy}$ преобразует вектор $x = (x, y, z)$ в новый вектор с изменившимися компонентами x' и y', но с оставшейся неизменной компонентой $z' = z$. В более общем случае инфинитезимальное вращение (41.8), рассматриваемое в том же «активном» смысле [1]), приводит к преобразованию

$$x \to x',$$

причем

$$\begin{aligned} x' &= x - (d\theta_{xy})\, y - (d\theta_{xz})\, z,\\ y' &= -(d\theta_{yx})\, x + y - (d\theta_{yz})\, z,\\ z' &= -(d\theta_{zx})\, x - (d\theta_{zy})\, y + z. \end{aligned} \tag{41.10}$$

Представление 3-векторов в виде спиновой матрицы

Спинорное исчисление дает другой («стенографический») метод вычисления указанного выше действия вращения на вектор. Свяжем с вектором x спиновую матрицу

$$X = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \tag{41.11}$$

а с вектором x' — соответствующую спиновую матрицу или кватернион X'. Тогда действие вращения кратко описывается следующей формулой:

Описание вращения 3-вектора на языке спиновой матрицы

$$X \to X' = RXR^*. \tag{41.12}$$

[1]) «Активное» преобразование переводит один вектор в другой, оставляя неизменной лежащую в основе систему отсчета (если таковая имеется). В противоположность этому «*пассивное*» преобразование оставляет без изменения все векторы, но изменяет систему отсчета. Все преобразования в предшествующих главах этой книги являются пассивными.

Проверим справедливость этой формулы для общего инфинитезимального вращения (41.10). Она дает

$$(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma}) = [1 - (i\,d\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})]\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,[1 + (i\,d\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})],$$

или в первом порядке по $d\theta$

$$(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + (i\,d\theta/2)\,[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})]. \qquad (41.13)$$

Произведение спиновых матриц $A = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ и $B = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})$, построенное из двух различных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеет вид

$$AB = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = a^x b^x \sigma_x^2 + a^x b^y \sigma_x \sigma_y + \ldots,$$

или, согласно (41.2),

$$AB = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + i\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}. \qquad (41.14)$$

Применим эту формулу для вычисления правой части формулы (41.13). Члены с $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})$ в квадратных скобках имеют противоположные знаки и сокращаются. Напротив, члены с $(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})$ обладают одним и тем же знаком. Их комбинация приводит к сокращению множителя 2 в $(d\theta/2)$. В результате

$$(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + d\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

или

$$\boldsymbol{x}' = [1 + (d\theta)\,\boldsymbol{n}\times]\,\boldsymbol{x} \qquad (41.15)$$

в согласии с (41.10), что и следовало показать.

Построение конечного вращения из инфинитезимальных вращений

Конечное вращение вокруг заданной оси можно рассматривать как совокупность инфинитезимальных вращений вокруг этой оси. Чтобы придать этой совокупности наиболее простую форму, перепишем спиновую матрицу (41.8), связанную с общим инфинитезимальным вращением, в виде

$$R\,(d\theta) = e^{-(id\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})} \qquad (41.16)$$

(экспоненциальная функция определяется разложением в степенной ряд). Заметим, что $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$ коммутирует а) с единичной матрицей, б) сама с собой и, кроме того, в) ее квадрат равен единичной матрице. Таким образом, вычисление экспоненциальной функции для спиновых матриц проводится точно так же, как и в обычной алгебре. Процесс объединения спиновых матриц, соответствующих инфинитезимальным вращениям вокруг неизменной оси, производится путем добавления экспонент и дает

$$R\,(\theta) = e^{-i(\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})}, \qquad (41.17)$$

что можно также сразу получить из формулы (41.7). Это выражение можно представить в другой форме, разложив его в степенной

ряд:

$$R(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} (1/p!)(-i\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}/2)^p =$$

$$= \sum_{\text{четное } p} (1/p!)(-i\theta/2)^p + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \sum_{\text{нечетное } p} (1/p!)(-i\theta/2)^p =$$

$$= \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \qquad (41.18)$$

в согласии с выражением (41.3), приведенным для преобразования спиноров. Действие на вектор одного инфинитезимального преобразования вращения за другим дается выражением

$$X' = R(d\theta) \ldots R(d\theta)\, XR^*(d\theta) \ldots R^*(d\theta);$$

поэтому даже для конечного вращения $R = R(\theta)$ мы вправе использовать формулу

$$X' = RXR^*. \qquad (41.19)$$

41.3. Дополнительные свойства матрицы вращения УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что для $X = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ справедливо следующее коммутационное соотношение:

$$[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}),\ X] = 2i\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Воспользуйтесь им, чтобы получить из соотношения (41.19) в форме $X = RX_0R^*$ [где X_0 — постоянная, в то время как $R(\theta)$ дается выражением (41.17)] следующую формулу:

$$\frac{d}{d\theta}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Почему эта формула эквивалентна обычному определению угловой скорости

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}\ ?$$

Обратив доказательство, покажите, что уравнение (41.7′) правильно определяет вращение $R(t)$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$, зависящей от времени, несмотря на то, что простое решение этого уравнения $R = \exp[-{}^1/_2 it\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega})]$ нельзя написать, если $\boldsymbol{\omega}$ не является постоянной.

---

§ 41.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА НА ЯЗЫКЕ АЛГЕБРЫ СПИНОРОВ

4-векторы и преобразования Лоренца на языке спиновых матриц

Если два отражения в пространстве порождают вращение, то почему бы не свести преобразование Лоренца к двум отражениям в пространстве-времени? И если для этого потребуется перейти от действительного половинного угла между двумя плоскостями

отражения к комплексному половинному углу, то в таком обобщении не будет ничего удивительного, не удивит нас и то, что мы по-прежнему сможем представлять действие преобразования Лоренца с помощью матричного умножения в форме

$$X \to X' = LXL^*. \tag{41.20}$$

Здесь «спиновая матрица лоренцева преобразования» L является обобщением матрицы вращения R. Точно так же «генерирующая координаты спиновая матрица» X теперь представляет собой обобщение (41.11), так что

$$X = t + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \tag{41.21}$$

или

$$X = \begin{Vmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{Vmatrix}. \tag{41.22}$$

Требуется, чтобы эта матрица была эрмитовой:

$$X = X^*. \tag{41.23}$$

В этом и только в этом случае координаты $(t,\ x,\ y,\ z)$ принимают действительные значения. Сопряженная транспонированная матрица, соответствующая спиновой матрице, также должна быть эрмитовой:

$$(X')^* = (LXL^*)^* = (L^*)^*\,(X^*)\,(L)^* = LXL^* = X'. \tag{41.24}$$

Таким образом, гарантируется, что новые координаты $(t',\ x',\ y',\ z')$ действительны, как и требовалось. Это требование, чтобы координаты принимали действительные значения, логически обосновано для формы спинового матричного преобразования (41.20), где L стоит с одной стороны от X, а L^* — с другой.

Преобразование Лоренца определяется тем условием, что оно оставляет инвариантным интервал:

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{41.25}$$

Заметим, что детерминант матрицы X, выписанной выше, имеет значение

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{41.26}$$

Следовательно, требование сохранения величины интервала можно привести к следующему виду:

$$\det X' = \det X, \tag{41.27}$$

или

$$(\det L)\,(\det X)\,(\det L^*) = \det X. \tag{41.28}$$

Это последнее требование удовлетворяется, если потребовать

$$\det L = 1. \tag{41.29}$$

[Обобщение, которое сводится к умножению каждого элемента L на общий фазовый множитель $e^{i\delta}$ и тем самым к умножению $\det L$

на $e^{2i\delta}$, не имеет смысла, поскольку такое умножение на фазовый множитель не меняет формулу $X' = LXL^*$.]

Инфинитезимальные преобразования Лоренца

Спиновая матрица, связанная с конечным или инфинитезимальным вращением, уже удовлетворяет условию $\det L = 1$ (что доказывается в упражнении 41.2). Это условие, являясь алгебраическим, будет по-прежнему выполняться, если действительные углы $d\theta_{yz}$, $d\theta_{zx}$, $d\theta_{xy}$ заменить комплексными углами $d\theta_{yz} + i\,d\alpha_x$, $d\theta_{zx} + i\,d\alpha_y$, $d\theta_{xy} + i\,d\alpha_z$. В итоге спиновая матрица преобразования обладает шестью параметрами, что и необходимо для описания общего инфинитезимального лоренцева преобразования. Таким образом, спиновая матрица для общего лоренцева инфинитезимального преобразования может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} L &= 1 - (i/2)\,(\sigma_x\,d\theta_{yz} + \sigma_y\,d\theta_{zx} + \sigma_z\,d\theta_{xy}) + \\ &\quad + (1/2)\,(\sigma_x\,d\alpha_x + \sigma_y\,d\alpha_y + \sigma_z\,d\alpha_z) = \\ &= 1 - (i\,d\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2). \end{aligned} \tag{41.30}$$

Действие этого преобразования на координаты должно описываться формулой

$$X \to X' = LXL^*,$$

или

$$\begin{aligned} t' + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}') &= [1 - (i\,d\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)] \times \\ &\times [t + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})]\,[1 + (i\,d\theta/2)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)]. \end{aligned} \tag{41.31}$$

Воспользуемся формулой (41.14) для $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})$, чтобы правую часть привести к виду

$$t + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha})\,t + d\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{\alpha}).$$

Теперь сравним коэффициенты при 1, σ_x, σ_y и σ_z в обеих частях этого уравнения и получим

$$\begin{aligned} t' &= t + (\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{\alpha}), \\ \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x} + t\,d\boldsymbol{\alpha} + d\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{41.32}$$

Это согласуется с обычным выражением для инфинитезимального преобразования Лоренца, или «буста», со скоростью $d\boldsymbol{\alpha}$ в активной форме, что и следовало показать.

Построение конечных преобразований Лоренца из инфинитезимальных преобразований

Совокупность подобных инфинитезимальных преобразований Лоренца дает конечное преобразование Лоренца. Однако результат легко получить лишь в том случае, если все инфинитезимальные преобразования коммутируют. Поэтому предположим, что $d\theta$ и $d\boldsymbol{\alpha}$ находятся в фиксированном отношении друг к другу, так что

$$\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{n}\frac{d\theta}{d\tau} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a} \equiv \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau}$$

являются константами, а τ — параметр. Тогда интегрирование по τ (сложение инфинитезимальных преобразований) дает конечное преобразование $L = \exp[-{}^1/_2 i\tau\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\omega} + i\boldsymbol{\alpha})]$. При $\tau = 1$, так

как $\theta \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\omega}\tau$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}\tau$, L принимает вид

$$L = \exp\left[(\boldsymbol{\alpha} - i\,\theta\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{\sigma}/2\right]. \tag{41.33}$$

В частном случае чистого буста (без вращения, $\theta = 0$) экспоненциальная функция вычисляется как показано в (41.18), и в результате мы получаем

$$L = \operatorname{ch}(\alpha/2) + (\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})\operatorname{sh}(\alpha/2). \tag{41.34}$$

Здесь $\boldsymbol{n}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}/\alpha$ — единичный вектор в направлении буста. Соответствующее преобразование Лоренца вычисляется по формуле

$$X' = LXL^*,$$

или

$$\begin{aligned} t' + (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma}) = [\operatorname{ch}\alpha/2 + (\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})\operatorname{sh}\alpha/2]\,[t + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})]\times \\ \times\,[\operatorname{ch}\alpha/2 + (\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})\operatorname{sh}\alpha/2]. \end{aligned} \tag{41.35}$$

Произведем упрощения с помощью соотношений

$$\operatorname{ch}^2(\alpha/2) + \operatorname{sh}^2(\alpha/2) = \operatorname{ch}\alpha,$$

$$2\operatorname{sh}(\alpha/2)\operatorname{ch}(\alpha/2) = \operatorname{sh}\alpha,$$

$$(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma}) = 2(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{n}_\alpha)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

и, сравнивая в обеих частях уравнения коэффициенты при 1 и $\boldsymbol{\sigma}$, найдем

$$t' = (\operatorname{ch}\alpha)\,t + (\operatorname{sh}\alpha)(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{x}' = \underbrace{[(\operatorname{sh}\alpha)\,\boldsymbol{n}_\alpha t + (\operatorname{ch}\alpha)(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{n}_\alpha]}_{\text{«продольная часть преобразования»}} + \underbrace{[\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}_\alpha)\,\boldsymbol{n}_\alpha]}_{\text{«перпендикулярная часть } \boldsymbol{x} \text{ не меняется»}}. \tag{41.36}$$

Таким путем мы убеждаемся, что величина α представляет собой обычный «параметр скорости», связанный с самой скоростью соотношениями

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2)^{-1/2} &= \operatorname{ch}\alpha, \\ \beta\,(1 - \beta^2)^{-1/2} &= \operatorname{sh}\alpha, \\ \beta &= \operatorname{th}\alpha. \end{aligned} \tag{41.37}$$

Тот факт, что параметры скорости для последовательных бустов в одном направлении складываются, нигде не проявляется так отчетливо, как в представлении (41.33) спиновой матрицы преобразования:

$$\begin{aligned} L(\alpha_2)\,L(\alpha_1) &= \exp\left[\alpha_2(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\right]\exp\left[\alpha_1(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\right] = \\ &= \exp\left[(\alpha_2 + \alpha_1)(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\right] = L(\alpha_2 + \alpha_1). \end{aligned} \tag{41.38}$$

Оставим этот частный случай и зададимся вопросом, как получить результирующее преобразование для двух произвольных преобразований Лоренца, каждое из которых является комбинацией

вращения и буста. Самый простой способ ответить на этот вопрос состоит в том, чтобы воспользоваться формулой (41.33) вместе с соотношением

$$L(\text{результирующее}) = L_2 L_1. \tag{41.39}$$

§ 41.4. ПРЕЦЕССИЯ ТОМАСА НА ЯЗЫКЕ АЛГЕБРЫ СПИНОРОВ

Если вращающийся объект, на который не действуют никакие вращающие моменты, испытывает ускорение, то относительно инерциальной системы отсчета направление его вращения изменяется. Это и есть прецессия Томаса [см. упражнение 6.9 и первый член в формуле (40.33б)]. Этой прецессией объясняется множитель 2 в эффективной энергии взаимодействия спина и орбитального момента электронов в атоме. В ядре вклад этой прецессии в спин-орбитальное взаимодействие нуклонов мал. Расчет прецессии Томаса дает иллюстрацию применения спин-матричных методов.

Эту прецессию можно рассматривать, совершенно не обращаясь к таким понятиям как момент импульса или движущаяся масса. Достаточно рассмотреть последовательность инерциальных систем отсчета $S\,(t)$, обладающих следующими двумя особенностями: 1. В любой момент времени t положение движущейся массы совпадает с началом координат системы отсчета $S\,(t)$. 2. Инерциальная система $S\,(t + dt)$ в следующий момент времени не испытала вращения по отношению к инерциальной системе $S\,(t)$ с точки зрения наблюдателя в этой инерциальной системе. Однако по определению она испытала вращение («прецессию Томаса») с точки зрения лабораторной системы.

Происхождение прецессии Томаса: совокупность двух бустов не есть чистый буст

Как может «отсутствие вращения» проявляться как «вращение»? Ответ состоит в следующем. Один чистый буст, за которым следует другой чистый буст в другом направлении, не дает в результате третий чистый буст; вместо этого окончательный результат представляет собой буст плюс вращение. Сама по себе эта идея не нова. Фиг. 41.1 показывает, как в результате вращения вокруг оси z, за которым следует вращение вокруг оси x, получается вращение вокруг оси, обладающей не только x- и z-компонентами, но и также y-компонентой. Что справедливо для вращений, то справедливо и для бустов: они не подчиняются закону сложения векторов.

Вывод прецессии Томаса с использованием спиновых матриц

Пусть система S_0 совпадает с лабораторной системой и пусть начало лабораторной системы в момент времени t находится там же, где и начало движущейся системы. Пусть $S\,(t)$ — лоренцева система, движущаяся в момент времени t. Пусть один чистый буст увеличивает ее скорость относительно лабораторной системы от $\boldsymbol{\beta}$ до $\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta}$. Результирующую конечную конфигурацию невоз-

можно получить из S_0 с помощью чистого буста. Вместо этого сначала повернем S_0 относительно лабораторной системы («вращение R, связанное с прецессией Томаса»), а затем переведем ее с помощью чистого буста в конечную конфигурацию. Правильный результат получается лишь при одном выборе этого вращения. Таким образом, обозначая спиновые матрицы для чистых бустов и чистых вращений буквами B и R, мы имеем следующее соотношение:

$$B(\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta})\, R(\boldsymbol{\omega}\, dt) = «B(d\boldsymbol{\beta})»\, B(\boldsymbol{\beta}), \tag{41.40}$$

из которого можно найти угловую скорость прецессии Томаса $\boldsymbol{\omega}$. Кавычки, в которые заключено выражение «$B(d\boldsymbol{\beta})$», несут двойное предостережение: 1) скорость преобразования (буста), которое переводит $S(t)$ в $S(t + dt)$, не есть $(\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\beta}$ [закон сложения (или вычитания) векторов не применим к скорости] и 2) «$B(d\boldsymbol{\beta})$» является чистым бустом лишь в сопутствующей системе и не является им в лабораторной системе.

Позаботимся сначала о преодолении второго затруднения. Это затруднение обусловлено тем, что формализм, развитый в § 41.1 для сложения преобразований $R_3 = R_2 R_1$, предполагает, что все операции R_1, R_2, ... определены и действуют в лабораторной системе. Напротив, под величиной «$B(d\boldsymbol{\beta})$» подразумевается чистый буст, определяемый и действующий в сопутствующей системе. Его можно включить в формализм следующим образом. Занулим любую скорость, которую объект уже имеет. Другими словами, применим оператор $B^{-1}(\boldsymbol{\beta})$. Тогда объект будет покоиться в лабораторной системе. Затем подействуем необходимым малым чистым бустом $B(\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}\, d\tau)$, где $\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}$ — ускорение, каким его чувствует сам объект, а $d\tau$ — промежуток собственного времени по измерениям самого объекта. В начале этого кратковременного ускорения объект покоится относительно лабораторной системы. Поэтому то, что является чистым бустом в сопутствующей системе объекта, является чистым бустом и в лабораторной системе. Это также чистый буст и в спин-матричном формализме. Затем вновь перейдем от лабораторной к сопутствующей системе. Тогда получим соотношение

$$«B(d\boldsymbol{\beta})» = B(\boldsymbol{\beta})\, B(\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}\, d\tau)\, B^{-1}(\boldsymbol{\beta}). \tag{41.41}$$

Уравнение для определения прецессии Томаса теперь принимает вид

$$B(\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta})\, R(\boldsymbol{\omega}\, dt) = B(\boldsymbol{\beta})\, B(\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}\, d\tau), \tag{41.42}$$

или, перенося все неизвестные в левую часть,

$$R(\boldsymbol{\omega}\, dt)\, B^{-1}(\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}\, d\tau) = B^{-1}(\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta})\, B(\boldsymbol{\beta}). \tag{41.43}$$

Первая задача — заменить имеющую не вполне ясный смысл величину изменения скорости $(d\boldsymbol{\beta})$ правильной величиной $(\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}\, d\tau)$ — важный этап в решении проблемы вычисления самой прецессии Томаса.

Когда принципы установлены, расчет производится путем подстановки соответствующих выражений для всех четырех множителей в (41.43) и вычисления обеих сторон уравнения до первого порядка малости следующим образом:

$$1 - (i\,dt\boldsymbol{\omega} + d\tau\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\sigma}/2 = [\mathrm{ch}\,(\alpha'/2) - (\boldsymbol{n}_{\alpha'}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{sh}\,(\alpha'/2)] \times \\ \times [\mathrm{ch}\,(\alpha/2) + (\boldsymbol{n}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{sh}\,(\alpha/2)]. \qquad (41.44)$$

Здесь α и $\boldsymbol{n}_\alpha$ — параметр скорости и единичный вектор, входящие в скорость $\boldsymbol{\beta}$; $\alpha' = \alpha + d\alpha$ и $\boldsymbol{n}_{\alpha'} = \boldsymbol{n}_\alpha + d\boldsymbol{n}_\alpha$ входят в $\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta}$. С помощью методов матричного исчисления раскрываем правую часть (41.44), записывая $\alpha' = \alpha + d\alpha$ и $\boldsymbol{n}_{\alpha'} = \boldsymbol{n}_\alpha + d\boldsymbol{n}_\alpha$ и применяя правило дифференцирования произведения. Приравниваем коэффициенты при $-\boldsymbol{\sigma}/2$ и $-i\boldsymbol{\sigma}/2$ в обеих частях уравнения. Таким образом, находим

$$\boldsymbol{a}_{\text{сопутств}}\,d\tau = (d\alpha)\,\boldsymbol{n}_\alpha + (\mathrm{sh}\,\alpha)\,d\boldsymbol{n}_\alpha \qquad (41.45)$$

и

$$\boldsymbol{\omega}\,dt = [2\mathrm{sh}^2\,(\alpha/2)]\,d\boldsymbol{n}_\alpha \times \boldsymbol{n}_\alpha. \qquad (41.46)$$

Угловая скорость прецессии Томаса

Первое из этих выражений дает изменение скорости с точки зрения сопутствующей инерциальной системы. Второе выражение дает прецессию, наблюдаемую в лабораторной системе. В случае малых скоростей выражение для прецессии Томаса принимает вид

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\beta}/2. \qquad (41.47)$$

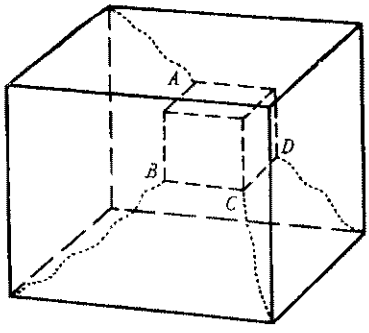
Здесь $\boldsymbol{a}$ — ускорение. Для прецессии важна только компонента ускорения, перпендикулярная скорости.

Элементарное описание роли прецессии Томаса в атомной физике см., например, в работе [384].

§ 41.5. СПИНОРЫ

Отношение ориентация — запутанность

Выкрасим каждую из граней куба в разный цвет. Затем соединим каждый угол куба с соответствующим углом комнаты эластичной нитью (фиг. 41.5). После этого повернем куб на угол $2\pi = 360°$. Нити окажутся закрученными, и раскрутить их невозможно. Ни одна из нитей не может лежать вдоль прямой линии. Теперь повернем куб вокруг той же оси еще на 2π. Нити закрутятся еще сильнее. Однако, затратив некоторое усилие, теперь можно выпрямить закрученные нити (фиг. 41.6). После этого каждая нить, так же как и вначале, проходит по прямой линии от угла куба к соответствующему углу комнаты. Вообще вращения на $0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \ldots$ оставляют куб в том же «отношении ориентация — запутанность» с его окружением, тогда как вращения на $\pm 2\pi, \pm 6\pi, \pm 10\pi, \ldots$ оставляют неизменной лишь ориентацию куба, но не «отношение ориентация — запутанность» с его окружением. Очевидно, в геометрии ориентации есть нечто такое, чего обычное



ФИГ. 41.5.
«Отношение ориентация — запутанность» между кубом и стенками комнаты. Вращение на 360° запутывает нити. Может показаться, что вращение на 720° еще сильнее их запутывает, но вместо этого после такого вращения становится возможным полностью распутать нити.

понятие ориентации не охватывает; отсюда и возникает понятие «отношение ориентация — запутанность», или (более краткий термин) «закрученность». Имеется ли, кроме того, физически обнаружимое различие двух неэквивалентных состояний кручения объекта (например, различие в контактном потенциале между металлическим объектом и его металлическим окружением), не известно [410].

Спиновая матрица, связанная с вращением,

$$R = \cos(\theta/2) - i\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\theta/2), \tag{41.48}$$

меняет знак при повороте на нечетное число 2π, отражая тем самым различие между двумя неэквивалентными состояниями кручения. Это изменение знака никогда не проявляется в законе преобразования векторов, как это видно из формулы

$$X \to X' = RXR^{\dagger} \tag{41.49}$$

Определение спинора

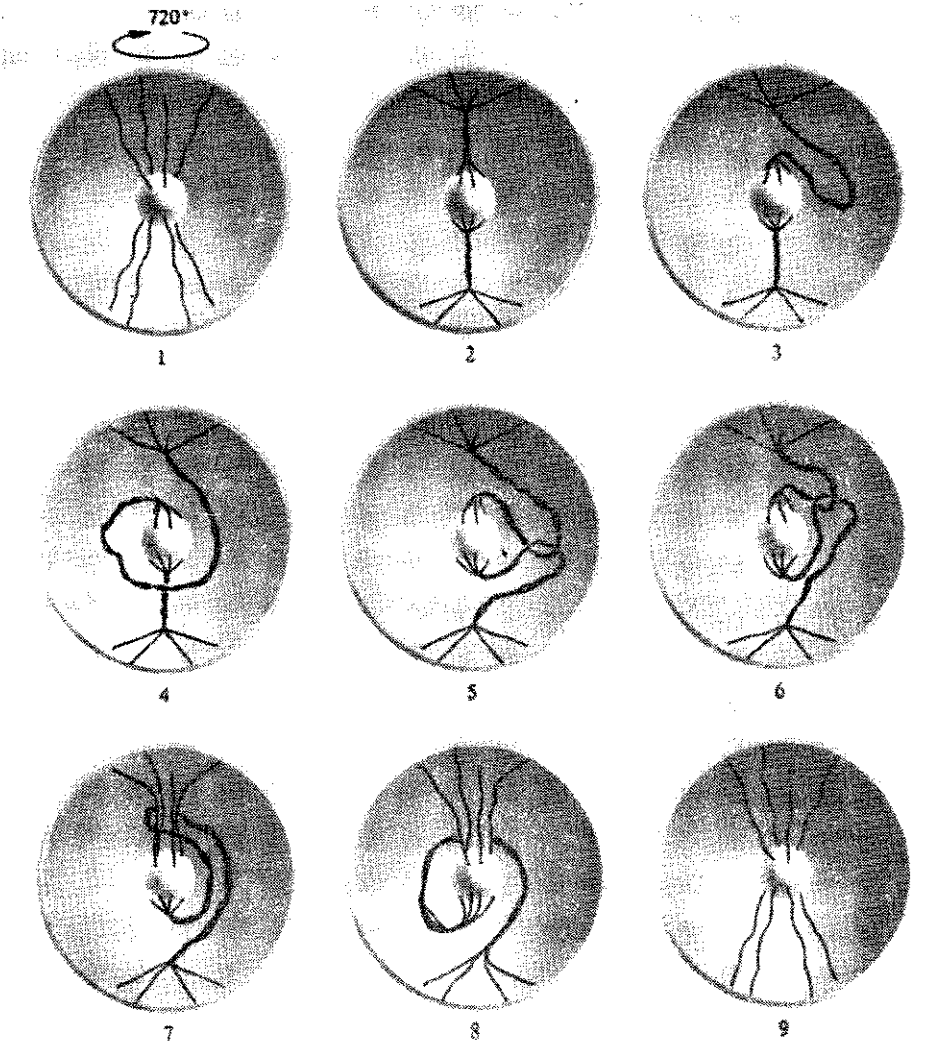
(два множителя R; знак меняется в каждом из них!). Изменение знака действительно проявляется при переходе от вектора к двухкомпонентной величине, преобразующейся по закону

$$\xi \to \xi' = R\xi. \tag{41.50}$$

Такая величина известна под названием спинора. Спинор меняет знак на противоположный при вращении на 360°. Поэтому он позволяет разумным образом описать различие двух неэквивалентных закрученностей куба. Вообще с каждым отношением ориентация — запутанность куба и его окружения можно связать свое значение спинора ξ. Более того, эффективность использования понятия спинора в теории вращения этим не ограничивается. Для самой общей комбинации буста и вращения можно записать

Лоренцево преобразование спиноров

$$\xi \to \xi' = L\xi. \tag{41.51}$$



ФИГ. 41.6.
Объект связан со своим окружением эластичными нитями, как на фиг. 41.5. (Здесь показано восемь нитей, но можно пользоваться любым их числом.) Вращая объект на 720° и затем следуя процедуре Эдварда Мак-Дональда, показанной на рисунках 2 –8 (при этом объект остается фиксированным), мы находим, что связывающие нити оказываются распутанными, как на рисунке 9.

Когда буст и вращение инфинитезимальны, явный вид этого преобразования весьма прост:

$$\xi' = [1 - (i\,d\theta/2)\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + (d\boldsymbol{\beta}/2)\cdot\boldsymbol{\sigma}]\,\xi,$$

или, согласно (41.1),

$$\begin{pmatrix}\xi'^1\\ \xi'^2\end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+\frac{1}{2}(-i\theta_{xy}+\beta_z) & \frac{1}{2}(-i\theta_{yz}-\theta_{zx}+\beta_x-i\beta_y)\\ \frac{1}{2}(-i\theta_{yz}+\theta_{zx}+\beta_x+i\beta_y) & 1+\frac{1}{2}(i\theta_{xy}-\beta_z)\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}. \tag{41.52}$$

Для любой комбинации буста произвольной величины в z-направлении и конечного вращения вокруг оси z мы имеем

$$\begin{pmatrix}\xi'^1\\ \xi'^2\end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} e^{-1/2i\theta_{xy}+1/2\beta_z} & 0\\ 0 & e^{1/2i\theta_{xy}-1/2\beta_z}\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}. \tag{41.53}$$

Чтобы отличить две компоненты спинора, обычно принято вводить индекс (прописную латинскую букву из начала алфавита), который принимает значения 1 и 2; таким образом, (41.51) принимает вид

$$\xi'^A = L^A{}_B\xi^B. \tag{41.54}$$

Смысл спиноров и состоит в отбрасывании половины формулы преобразования

$$X' = LXL^*. \tag{41.55}$$

Второй тип спиноров

Чтобы мы могли восстановить эту формулу, нам требуется также и другая ее половина. В нее входит комплексно сопряженное преобразование Лоренца. Поэтому введем еще один спинор η, который преобразуется по закону

$$\eta'^{\dot U} = \overline{L}^{\dot U}{}_{\dot V}\eta^{\dot V} \tag{41.56}$$

[$\dot U = \dot 1, \dot 2$; $\dot V = \dot 1, \dot 2$; точки и прописные буквы, взятые из конца алфавита, используются, чтобы отличать те компоненты, которые преобразуются с помощью комплексно сопряженной (без транспонирования!) спиновой матрицы преобразования Лоренца].

§ 41.6. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ И СПИНОРАМИ

Вектор, рассматриваемый как эрмитовый спинор второго ранга

Чтобы совершить обратный переход от спиноров к векторам, заметим, что спиновая матрица X в (41.55) имеет следующую форму:

$$X = t + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \begin{Vmatrix}(t+z)&(x-iy)\\ (x+iy)&(t-z)\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}X^{1\dot 1}&X^{1\dot 2}\\ X^{2\dot 1}&X^{2\dot 2}\end{Vmatrix}, \tag{41.57}$$

где индексы взяты с точками или без точек в зависимости от того, связаны они в (41.55) с L^* или с L. Формула преобразования принимает следующий вид:

$$X'^{A\dot{U}} = L^A{}_B \bar{L}^{\dot{U}}{}_{\dot{V}} X^{B\dot{V}} \tag{41.58}$$

(транспонирование достигается автоматически путем упорядочивания индексов, поэтому здесь фигурирует $\bar{L}^{\dot{U}}{}_{\dot{V}}$, а не $L^{*\dot{U}}{}_{\dot{V}}$). Коэффициенты этого преобразования тождественны с коэффициентами в законе преобразования «спинора второго ранга, один индекс которого без точки, а другой — с точкой»:

$$\xi'^A \eta'^{\dot{U}} = L^A{}_B \bar{L}^{\dot{U}}{}_{\dot{V}} \xi^B \eta^{\dot{V}}. \tag{41.59}$$

В этом смысле можно говорить, что «4-вектор преобразуется как спинор второго ранга». Чтобы получить связь 4-вектора и спинора в явном виде, выпишем из (41.57) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X^{1\dot{1}} &= x^0 + x^3, \\ X^{1\dot{2}} &= x^1 - ix^2, \\ X^{2\dot{1}} &= x^1 + ix^2, \\ X^{2\dot{2}} &= x^0 - x^3. \end{aligned} \tag{41.60}$$

В более компактной форме имеем

$$X^{A\dot{U}} = [t\sigma_0 + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})]^{A\dot{U}} = x^\mu \sigma_\mu{}^{A\dot{U}}, \tag{41.61}$$

где σ_0 — единичная матрица. Это уравнение сразу же указывает способ перехода от компонент 4-вектора или «тензора с одним индексом» к компонентам соответствующего «1,1-спинора» (один индекс без точки и один с точкой).

С каждым действительным 4-вектором x^μ связан 1,1-спинор, который обладает свойством *эрмитовости* в том смысле, что

$$X^{A\dot{U}} = \overline{X^{U\dot{A}}}. \tag{41.62}$$

N, N-спиноры и эрмитовость

Пример эрмитового 1,1-спинора дается выражением (41.61). Понятие эрмитовости можно сформулировать иначе и в более общем виде. С произвольным N,N-спинором Φ, компоненты которого $\Phi^{A_1 \dots A_N \dot{U}_1 \dots \dot{U}_N}$, связан *комплексно сопряженный спинор* $\bar{\Phi}$, так что

$$(\bar{\Phi})^{A_1 \dots A_N \dot{U}_1 \dots \dot{U}_N} = \overline{(\Phi^{U_1 \dots U_N \dot{A}_1 \dots \dot{A}_N})}. \tag{41.63}$$

N,N-спинор называется эрмитовым, если он равен комплексно сопряженному спинору.

§ 41.7. АЛГЕБРА СПИНОРОВ

Алгебра спиноров:

Из формулы (41.53) видно, что компонента спинора ξ'^1 экспоненциально растет с бустом, так что она пропорциональна множителю $e^{1/2\beta_z}$, а другая компонента ζ'^2 экспоненциально падает с бустом. Если из двух спиноров ξ и ζ нужно построить величину, не зависящую от буста, то эту величину следует строить из таких произведений, как $\xi^1\zeta^2$ и $\xi^2\zeta^1$. Этот рецепт с использованием произведений можно сформулировать иначе. Введем альтернирующие символы ε^{AB} и ε_{AB}, такие, что $\varepsilon^{12} = \varepsilon_{12} = 1$ и

1) определение ε^{AB} и ε_{AB}

$$\varepsilon^{AB} = -\varepsilon^{BA}, \quad \varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}; \tag{41.64}$$

другими ненулевыми компонентами являются только $\varepsilon^{21} = \varepsilon_{21} = -1$. Определим спинор с нижним индексом через спинор с верхним индексом с помощью соотношения

2) поднимание и опускание спинорных индексов

$$\xi_A = \xi^B \varepsilon_{BA} \tag{41.65}$$

и, обратно,

$$\xi^B = \varepsilon^{BC}\xi_C. \tag{41.66}$$

Тогда скалярное произведение двух спиноров определяется как

3) скалярное произведение спиноров

$$\xi_A\zeta^A. \tag{41.67}$$

На величину этого скалярного произведения не влияют ни буст, ни вращение, ни какие-либо их комбинации

$$\begin{aligned}\xi'_A\zeta'^A = \xi'^B\varepsilon_{BA}\zeta'^A = (L^B{}_D\xi^D)\,\varepsilon_{BA}\,(L^A{}_C\zeta^C) = \\ = (\det L)\,\xi^D\varepsilon_{DC}\zeta^C = \xi_C\zeta^C.\end{aligned} \tag{41.68}$$

При доказательстве используется тот факт, что выражение $L^B{}_D\varepsilon_{BA}L^A{}_C$ 1) обращается в нуль, если $D = C$, и 2) сводится к детерминанту L (единице!), если $D = 1$, $C = 2$, или к детерминанту $-L$, если $D = 2$, $C = 1$. Заметим, что скалярное произведение $\xi^A\zeta_A$ равно взятому со знаком минус скалярному произведению $\xi_A\zeta^A$. Скалярное произведение спинора самого на себя автоматически обращается в нуль («присущий спинору нулевой характер»).

4) отображение между векторами и 1,1-спинорами

Компоненты вектора с верхним индексом были выражены через компоненты 1,1-спинора с верхними индексами:

$$X^{A\dot{U}} = x^\mu\sigma_\mu{}^{A\dot{U}}; \tag{41.69}$$

аналогичное соотношение имеет место между вектором и 1,1-спинором с нижними индексами, так что

$$X_{A\dot{U}} = x_\mu\sigma^\mu{}_{A\dot{U}}. \tag{41.70}$$

5) определение σ^μ и ее связь с σ_μ

Здесь «присоединенные базисные спиновые матрицы» имеют компоненты

$$\sigma^\mu{}_{A\dot{U}} = \eta^{\mu\nu}\sigma_\nu{}^{B\dot{V}}\,\varepsilon_{BA}\varepsilon_{\dot{V}\dot{U}}, \tag{41.71}$$

или в явном виде

$$\left\|\begin{matrix}\sigma^{\mu}{}_{1\dot{1}} & \sigma^{\mu}{}_{1\dot{2}}\\ \sigma^{\mu}{}_{2\dot{1}} & \sigma^{\mu}{}_{2\dot{2}}\end{matrix}\right\| = \begin{cases} -\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| & \text{при} \quad \mu = 0,\\ -\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}\right\| & \text{при} \quad \mu = 1,\\ +\left\|\begin{matrix}0 & -i\\ i & 0\end{matrix}\right\| & \text{при} \quad \mu = 2,\\ -\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}\right\| & \text{при} \quad \mu = 3. \end{cases} \tag{41.72}$$

Для этих матриц справедливы законы умножения того же типа $(\sigma^x)^2 = (\sigma^y)^2 = (\sigma^z)^2 = 1$, $\sigma^x\sigma^y = -\sigma^y\sigma^x = i\sigma^z$ и т. д., что и для матриц σ_x, σ_y, σ_z из (41.2). Между «базисными спиновыми матрицами» σ_μ и «присоединенными базисными спиновыми матрицами» σ^μ получаем следующие соотношения ортогональности и нормировки:

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{U}}\sigma^\mu{}_{B\dot{V}} = -2\delta^A_B\delta^{\dot{U}}_{\dot{V}} \tag{41.73}$$

и

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{U}}\sigma^\nu{}_{A\dot{U}} = -2\delta^\nu_\mu. \tag{41.74}$$

Этими соотношениями можно воспользоваться для «перехода от величины, представленной в виде 1,1-спинора («спинорный эквивалент вектора»), к той же величине, выраженной непосредственно в виде вектора (тензора первого ранга)». Так, умножив обе части равенства (41.61) на $-{}^1/_2\sigma^\nu{}_{A\dot{U}}$ и произведя суммирование по спинорным индексам, воспользуемся (41.74) для нахождения контравариантных компонент вектора

$$x^\nu = -\frac{1}{2}\sigma^\nu{}_{A\dot{U}}X^{A\dot{U}}. \tag{41.75}$$

Аналогично из (41.70) и (41.73) находим ковариантные компоненты

$$x_\nu = -\frac{1}{2}\sigma_\nu{}^{A\dot{U}}X_{A\dot{U}}. \tag{41.76}$$

Тензор T с N индексами можно выразить на языке спиноров («спинорный эквивалент тензора») путем обобщения соотношений (41.61) или (41.70); так, для смешанного тензора третьего порядка имеем

б) отображение между тензорами ранга N и N, N-спинорами

$$T_{A\dot{U}}{}^{B\dot{V}C\dot{W}} = \sigma^\alpha{}_{A\dot{U}}\sigma_\beta{}^{B\dot{V}}\sigma_\gamma{}^{C\dot{W}}T_\alpha{}^{\beta\gamma} \tag{41.77}$$

и обратное соотношение

$$T_\alpha{}^{\beta\gamma} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3\sigma_\alpha{}^{A\dot{U}}\sigma^\beta{}_{B\dot{V}}\sigma^\gamma{}_{C\dot{W}}T_{A\dot{U}}{}^{B\dot{V}C\dot{W}}. \tag{41.78}$$

В дополнении 41.1 дается спинорное представление некоторых простых тензоров.

Иногда при изложении спинорного анализа множитель $(-1/2)^N$ в уравнениях, подобных (41.78), исключается следующей двойной процедурой: 1) в матрицы σ_μ и σ^μ включается множитель $1/\sqrt{2}$, который мы не включали, и 2) вместо обычной метрики $\mathrm{diag}\,\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ используется метрика $(1, -1, -1, -1)$. В этой книге мы такой процедуры не придерживаемся, поскольку 1) включение множителя $1/\sqrt{2}$ в матрицы σ_x, σ_y, σ_z приводит к тому, что эти матрицы перестают совпадать с матрицами Паули, которые уже в течение многих лет используются всюду в атомной и ядерной физике, и 2) положительно определенная метрика на пространственноподобной гиперповерхности обладает преимуществом естественности при исследовании проблемы начальных значений в геометродинамике и при определении понятия 3-геометрии. Эти преимущества оплачены здесь ценой множителя $(-1/2)^N$. При сложных вычислениях с применением спиноров предпочтительнее исключить множитель $(-1/2)^N$, см., например, [411] или [180].

Дополнение 41.1. СПИНОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ТЕНЗОРОВ В КОНТЕКСТЕ ЛОКАЛЬНО ЛОРЕНЦЕВОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Величина	Тензорный язык	Спинорный язык
4-вектор общего вида	x^α (4 комплексных числа)	$X^{A\dot{U}}$ (4 комплексных числа)
Действительный 4-вектор (например, 4-импульс)	$x^\alpha = \bar{x}^\alpha$ (4 действительных числа)	$X^{A\dot{U}} = (\overline{X^{U\dot{A}}})$ (2 действительные компоненты, 1 особая комплексная компонента)
Нулевой 4-вектор	$\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$	$\det X^{A\dot{U}} = 0$ [см. (41.57)]: следовательно, существуют два спинора ξ^A и $\eta^{\dot{U}}$, такие, что $X^{A\dot{U}} = \xi^A\eta^{\dot{U}}$
Действительный нулевой 4-вектор, направленный в будущее (такой, как 4-импульс фотона)	$x^\alpha = \bar{x}^\alpha$ $\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ $x^0 > 0$	Существует спинор ξ^A (2 комплексных числа, единственных с точностью до умножения на общий фазовый множитель $e^{i\delta}$), такой, что $X^{A\dot{U}} = \xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}$
Действительный нулевой 4-вектор, направленный в прошлое	$x^0 < 0$	$X^{A\dot{U}} = -\xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}$

Продолжение

Величина	Тензорный язык	Спинорный язык
Действительный бивектор или 2-форма (например, максвелловское поле)	$F_{[\alpha\beta]}$ (подразумевается, что $F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$; шесть различных действительных компонент)	Существует симметричный спинор ϕ_{AB} (3 различные комплексные компоненты ϕ_{11}, ϕ_{12}, ϕ_{22}), такой, что $F_{A\dot{U}B\dot{V}}=$ $=\phi_{AB}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}+\varepsilon_{AB}(\overline{\phi})_{\dot{U}\dot{V}}$
Действительная 2-форма, дуальная предыдущей 2-форме	$*F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}$	$*F_{A\dot{U}B\dot{V}}=-i\phi_{AB}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}+$ $+i\varepsilon_{AB}(\overline{\phi})_{\dot{U}\dot{V}}$ (дуальность 2-формы соответствует умножению спинора ϕ_{AB} на $-i$)
Действительный тензор четвертого порядка, обладающий симметриями тензора конформной кривизны Вейля, т. е. симметриями тензора кривизны Римана при дополнительном требовании обращения в нуль тензора Риччи («пустое пространство», «тензор Римана для вакуума»)	$C_{\alpha\beta\gamma\delta}=C_{([\alpha\beta][\gamma\delta])}$ (антисимметричный по первым двум индексам, антисимметричный по последним двум индексам, симметричный относительно перемены местами первой пары индексов со второй парой), $C^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]}=0$ (20 алгебраически различных компонент, так же как и для тензора Римана, сводятся к 10, если наложить дополнительное условие вакуума $C^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta}=0$	Существует полностью симметричный спинор ψ_{ABCD} с пятью различными комплексными компонентами ψ_{1111}, ψ_{1112}, ψ_{1122}, ψ_{1222}, ψ_{2222}, такой, что $C_{A\dot{U}B\dot{V}C\dot{W}D\dot{X}}=$ $=\psi_{ABC\dot{D}}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{C\dot{D}}\overline{\psi}_{\dot{U}\dot{V}\dot{W}\dot{X}}$
Совершенно невырожденный тензор кривизны Римана (пространство, в котором присутствует вещество)	$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}=R_{\alpha\beta[\gamma\delta]}=$ $=R_{([\alpha\beta][\gamma\delta])}$; $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$; (20 алгебраически различных компонент)	Существуют полностью симметричный спинор ψ_{ABCD} («вейлевская» или «конформная» часть кривизны, или часть нелокального происхождения), скаляр Λ (которым определяется след той части кривизны, которая имеет локальное происхождение) и спинор $\Phi_{AB\dot{U}\dot{V}}=\Phi_{(AB)(\dot{U}\dot{V})}=\overline{(\Phi)}_{AB\dot{U}\dot{V}}$ (которым определяется бесследовая часть кривизны локального происхождения, последняя из трех неприводимых частей тензора кривизны), такие, что $R_{A\dot{U}B\dot{V}C\dot{W}D\dot{X}}=\psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}+$ $+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{(\psi)}_{\dot{U}\dot{V}\dot{W}\dot{X}}+$ $+2\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}+$ $+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{V}\dot{W}})+$ $+\varepsilon_{AB}\Phi_{CD\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}+$ $+\varepsilon_{CD}\Phi_{AB\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}$

Продолжение

Величина	Тензорный язык	Спинорный язык
Каждая физическая величина описывается геометрическим объектом. Каждая локальная физическая величина описывается с помощью математической величины, которая преобразуется при собственном локальном преобразовании Лоренца как «неприводимое представление группы $L_{\uparrow+}$ собственных преобразований Лоренца»	Каждая локальная физическая величина описывается тензором с некоторым присущим ему рангом и определенными свойствами симметрии	Чтобы обеспечить требуемое неприводимое представление группы $L_{\uparrow+}$ для описания физической величины, соответствующий ей спинор должен быть полностью симметричным по всем индексам без точек и также полностью симметричным по всем индексам с точками

§ 41.8. СПИНОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО БАЗИСНЫЕ СПИНОРЫ

Линейная независимость спиноров

«Пространство» элементарных спиноров двумерно. Поэтому оно покрывается любыми двумя линейно независимыми спинорами λ_A и μ_A. Кроме того, легко выявить возможную линейную зависимость пары спиноров, т. е. существование соотношения вида $\mu_A = \text{const}\,\lambda_A$. В этом случае скалярное произведение μ_A и λ^A, так же как скалярное произведение λ_A и λ^A (41.67), автоматически обращается в нуль. Поэтому не равное нулю скалярное произведение

$$\lambda_A \mu^A \neq 0 \tag{41.79}$$

является необходимым и достаточным условием линейной независимости двух спиноров.

В самом общем случае 4-вектор допускает представление в виде линейной комбинации четырех базисных векторов. Аналогично спинор в самом общем случае допускает представление в виде линейной комбинации двух базисных спиноров:

$$\omega^A = \lambda \xi^A + \mu \eta^A. \tag{41.80}$$

Базисные спиноры и спинорные пары

Под термином «базисный спинор» здесь подразумевается то, что ξ^A и η^A удовлетворяют нормировочному условию

$$\xi_A \eta^A = 1 \; (= -\eta_A \xi^A). \tag{41.81}$$

Из этого условия мы получаем простые выражения для коэффициентов разложения в (41.80)

$$\begin{aligned} \lambda &= -\eta_A \omega^A \; (= \omega_B \eta^B), \\ \mu &= \xi_A \omega^A \; (= -\omega_B \xi^B). \end{aligned} \tag{41.82}$$

Подстановка этих коэффициентов разложения обратно в (41.80) может воспроизвести любой произвольно выбранный спинор ω^A. Другими словами, следующее уравнение должно быть тождеством для компонент ω_B:

$$\omega^A = \varepsilon^{AB}\omega_B \equiv (\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B)\,\omega_B. \tag{41.83}$$

Из этого обстоятельства следует, что два базисных спинора связаны соотношениями

$$\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B = \varepsilon^{AB}. \tag{41.84}$$

Если даны два базисных спинора ξ^A и η^A, то можно получить два столь же хороших базисных спинора, написав

$$\begin{aligned} \xi^A_{\text{нов}} &= \xi^A, \\ \eta^A_{\text{нов}} &= \eta^A + \alpha\xi^A, \end{aligned} \tag{41.85}$$

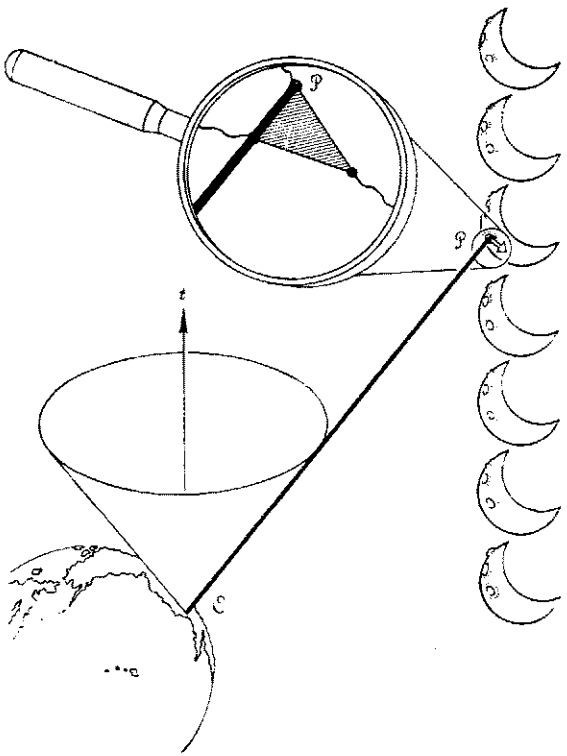
где α — любая действительная или комплексная постоянная. В этом мы сразу же убеждаемся подстановкой в (41.81) или (41.84). Самая общая «спинорная пара» для заданного спинора ξ^A, удовлетворяющая нормировочному условию (41.81), имеет вид (41.85).

§ 41.9. СПИНОР, РАССМАТРИВАЕМЫЙ КАК ФЛАГШТОК ПЛЮС ФЛАГ ПЛЮС ОТНОШЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЯ — ЗАПУТАННОСТЬ

Геометрическое описание спинора:

Как можно наглядно представить себе спинор? Нацелим лазер, нажмем спусковой крючок и пошлем импульс в 1 мегаджоуль из того события в пространстве-времени, где мы находимся (событие $\mathcal{O}$), в другое событие в пространстве-времени (событие $\mathcal{P}$: центр кратера Аристарха, 400 000 км от $\mathcal{O}$ в пространстве и 400 000 км от $\mathcal{O}$ по времени движения света). Лазер сконструирован для этой цели так, чтобы образовывать не просто пятно света, а светящуюся стрелку. Следуя Роджеру Пенроузу, будем говорить о нулевом векторе $\mathcal{O}\mathcal{P}$ как о «флагштоке» и об освещенной стрелке как о «флаге». Спинор (фиг. 41.7) состоит из комбинации 1) нулевого флагштока, 2) флага и 3) отношения ориентация — запутанность флага и его окружения. Будем «вращать флаг», производя повторяющиеся выстрелы из лазера и слегка поворачивая лазер вокруг его оси в промежутках между следующими друг за другом выстрелами. Когда флаг повернулся на 360° и принял свое первоначальное направление, спинор изменил знак. Вращение флага вокруг флагштока на четное число 2π восстанавливает первоначальное значение спинора.

Мы приходим от спинора ξ, математического объекта с двумя комплексными компонентами ξ^1 и ξ^2, к геометрическому объекту, состоящему из «флагштока, флага и отношения ориентация —



ФИГ. 41.7.
Спинор, представленный с помощью 1) «флагштока» (терминология Пенроуза; траектория импульса света, нулевой вектор $(\mathcal{O}\mathcal{P})$, 2) «флага» (стрелка $(\mathcal{P}\rightarrow)$, перенесенного на поверхность Луны лазерным импульсом, испущенным с Земли [наверху в увеличенном виде показан сам флаг (заменяющий стрелку)], и 3) отношения ориентация — запутанность между флагом и его окружением (символически изображенного в виде веревочек, протянутых от углов флага к его окружению). Когда сам спинор умножается на множитель $\rho e^{i\sigma}$, компоненты нулевого вектора (флагштока) умножаются на множитель ρ^2 и флаг поворачивается на угол 2σ вокруг флагштока.

1) нулевой вектор (флагшток)

запутанность», в два этапа: сначала флагшток, затем флаг. Таким образом, переходим от спинора ξ^A к действительному нулевому 4-вектору «флагштока» с помощью формулы

$$x^{\alpha} \rightarrow X^{A\dot{U}} = \xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}, \tag{41.86}$$

или

$$\left\| \begin{matrix} (t+z)\,(x-iy) \\ (x+iy)\,(t-z) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi^1\bar{\xi}^{\dot{1}} & \xi^1\bar{\xi}^{\dot{2}} \\ \xi^2\bar{\xi}^{\dot{1}} & \xi^2\bar{\xi}^{\dot{2}} \end{matrix} \right\|. \tag{41.87}$$

У правой матрицы первый ряд с точностью до множителя ξ^1/ξ^2 совпадает со вторым рядом. Поэтому детерминант этой матрицы обращается в нуль. То же справедливо и для левой матрицы. Поэтому 4-вектор $\mathcal{OP} = (t, x, y, z)$ является нулевым вектором. Умножая спинор ξ^A на не равное нулю комплексное число $\lambda = \rho e^{i\sigma}$ (ρ, σ действительны), мы «растягиваем» этот вектор на фактор ρ^2; однако направление вектора не меняется. На 4-вектор не действует также выбор угла σ. Другими словами, этот нулевой 4-вектор однозначно фиксируется спинором, но спинор не фиксируется вполне однозначно 4-вектором. Данному 4-вектору соответствует целое семейство спиноров. Они отличаются друг от друга фазовым множителем вида $e^{i\sigma}$ («фактор флага»).

2) бивектор (флаг) и его отношение ориентация — запутанность

Продолжая поиски проявления влияния фактора флага, обратимся от действительного вектора (с четырьмя компонентами), образованного спинором ξ^A, к действительному бивектору (с шестью компонентами), образованному тем же спинором:

$$F^{\mu\nu} \to F^{A\dot{B}\dot{U}\dot{V}} = \xi^A\xi^B\varepsilon^{\dot{U}\dot{V}} + \varepsilon^{AB}(\bar{\xi})^{\dot{U}}(\bar{\xi})^{\dot{V}}, \qquad \mu \to A\dot{U}, \quad \nu \to B\dot{V}. \tag{41.88}$$

Тот факт, что эта величина обладает не более чем шестью различными компонентами ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$), следует из изменения знака правой части (41.88) в результате перемены местами A с B и $\dot{U}$ с $\dot{V}$. Чтобы раскрыть смысл этого бивектора, будем обращать внимание на каждое появление в (41.88) фактора ε^{AB}. Всюду вместо этого фактора подставим выражение (41.84), связывающее этот фактор с исходным спинором ξ^A, и введем дополнительный спинор η^A, необходимый наряду с ξ^A, чтобы обеспечить базис для всех спиноров. Следуя по такому пути, находим

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \to F^{A\dot{B}\dot{U}\dot{V}} &= \xi^A\xi^B(\bar{\xi}^{\dot{U}}\bar{\eta}^{\dot{V}} - \bar{\eta}^{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{V}}) + (\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B)\bar{\xi}^{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{V}} = \\ &= \xi^A\bar{\xi}^{\dot{U}}(\xi^B\bar{\eta}^{\dot{V}} + \eta^B\bar{\xi}^{\dot{V}}) - (\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})\xi^B\bar{\xi}^{\dot{V}} = \\ &= X^{A\dot{U}}Y^{B\dot{V}} - Y^{A\dot{U}}X^{B\dot{V}} \to x^\mu y^\nu - y^\mu x^\nu. \end{aligned} \tag{41.89}$$

Таким образом, 2,2-спинор, построенный из ξ^A, представляет собой бивектор, образованный из двух 4-векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Первый из них является «действительным нулевым вектором флагштока», который, как мы уже видели, однозначно определяется спинором ξ^A. Второй вектор

$$y^\alpha \to Y^{A\dot{U}} = \xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}} \tag{41.90}$$

также определяется спинором ξ^A, но не однозначно, поскольку для ξ^A неоднозначен выбор «спинорной пары» η^A. Перейдем от одного выбора парного спинора η^A к новому выбору [формула (41.85)]:

$$\eta^A{}_{\text{нов}} = \eta^A + \alpha\xi^A. \tag{41.91}$$

Тогда действительный 4-вектор y^μ переходит в новый действительный 4-вектор

$$y^\mu_{\text{нов}} = y^\mu + (\alpha + \bar{\alpha})\, x^\mu. \tag{41.92}$$

Если бы 4-вектор **y** был однозначно определен, то перпендикулярно флагштоку была бы направлена стрелка, а не флаг. Допустимая область изменения действительной постоянной $\alpha + \bar{\alpha}$ превращает одну стрелку в множество компланарных стрелок; это и есть флаг Пенроуза. Другими словами, выбор спинора ξ^A не фиксирует какой-то отдельной стрелки, но фиксирует целую совокупность стрелок и, таким образом, однозначно определяет флаг.

4-вектор **y** (и вместе с ним $\mathbf{y}_{\text{нов}}$) ортогонален нулевому 4-вектору **x**:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_\beta y^\beta = -\frac{1}{2} X_{A\dot{U}} Y^{A\dot{U}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \xi_A \bar{\xi}_{\dot{U}} (\xi^A \bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A \bar{\xi}^{\dot{U}}) = 0 \tag{41.93}$$

x является пространственноподобным:

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = -\frac{1}{2} (\xi_A \bar{\eta}_{\dot{U}} + \eta_A \bar{\xi}_{\dot{U}}) (\xi^A \bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A \bar{\xi}^{\dot{U}}) =$$

$$= -\frac{1}{2} (\xi_A \eta^A) (\bar{\eta}_{\dot{U}} \bar{\xi}^{\dot{U}}) - \frac{1}{2} (\eta_A \xi^A) (\bar{\xi}_{\dot{U}} \bar{\eta}^{\dot{U}}) = 1 \tag{41.94}$$

(«единичная длина флага»).

Вращение флага вокруг флагштока

Умножение спинора ξ^A на «фактор флага» $e^{i\sigma}$ вращает флаг вокруг флагштока на угол 2σ, поскольку парный по отношению к ξ^A спинор η^A умножается на фактор $e^{-i\sigma}$ [см. условие нормировки (41.81)]. Эти изменения переводят вектор **y** в повернутый вектор $\mathbf{y}_{\text{пов}}$, такой, что

$$y^\alpha_{\text{пов}} \to Y^{A\dot{U}}_{\text{пов}} = e^{2i\sigma} \xi^A \bar{\eta}^{\dot{U}} + e^{-2i\sigma} \eta^A \bar{\xi}^{\dot{U}} =$$

$$= \cos 2\sigma\, (\xi^A \bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A \bar{\xi}^{\dot{U}}) + \sin 2\sigma\, (i\xi^A \bar{\eta}^{\dot{U}} - i\eta^A \bar{\xi}^{\dot{U}}) \to$$

$$\to y^\alpha \cos 2\sigma + z^\alpha \sin 2\sigma. \tag{41.95}$$

Здесь 4-вектор **z** обладает теми же свойствами, что и вектор **y**: он является 1) действительным, 2) пространственноподобным, 3) единичным по величине, 4) ортогональным нулевому 4-вектору **x** флагштока и 5) однозначно определяется первоначальным спинором ξ^A с точностью до аддитивного действительного произведения $(\alpha + \bar{\alpha})$ и **x**. Кроме того, **z** и **y** ортогональны. Таким образом, **y** и **z** образуют векторный базис в двумерном пространстве, в котором, говоря, быть может, слишком образно, происходит вращение «верхушки флага».

Соотношения, связывающие спинор, флагшток и флаг

Повторим кратко все сказанное, вернувшись к лазерным импульсам. Два числа, такие, как хорошо знакомые полярные углы θ (угол с осью z) и ϕ (азимут вокруг оси z, отсчитываемый от оси x),

указывают направление распространения лазерных импульсов. Третье число r дает расстояния до Луны, а также время распространения света до Луны. Четвертое число — угол ψ — дает азимут светящейся стрелки на поверхности Луны; этот азимут отсчитывается от направления e_θ (где $\psi = 0$) вокруг флагштока по часовой стрелке. Тогда спинор, связанный с флагштоком и флагом (вращаемая стрелка), есть

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = (2r)^{1/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\, e^{-i\phi/2+i\psi/2} \\ \sin(\theta/2)\, e^{i\phi/2+i\psi/2} \end{pmatrix}, \tag{41.96}$$

согласно принятым здесь соглашениям [см. (41.87)]. Спинор, парный этому спинору, η_A однозначен с точностью до аддитивного произведения, включающего ξ^A, и равен

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = (2r)^{-1/2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)\, e^{-i\phi/2-i\psi/2} \\ \cos(\theta/2)\, e^{i\phi/2-i\psi/2} \end{pmatrix}. \tag{41.97}$$

4-вектор флагштока, определяемый спинором ξ^A, находится из (41.87):

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{41.98}$$

Чтобы определить сам флаг, требуется кроме x^α еще единичный пространственноподобный 4-вектор y^α, нормальный вектору x^α и единственный с точностью до аддитивного действительного произведения, в которое входит x^α. Этот вектор вычисляется с помощью (41.90) и имеет вид

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi \\ -\sin\theta\cos\psi \end{pmatrix}. \tag{41.99}$$

Исходя из этих выражений для x^μ и y^μ, мы вычисляем компоненты бивектора («флага») $F^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu - y^\mu x^\nu$ с помощью простой арифметики.

§ 41.10. ВИД НОЧНОГО НЕБА: ПРИМЕНЕНИЕ СПИНОРОВ

Мы обратили внимание на извлечение информации всех четырех видов, которая содержится в спиноре: расстояние во времени (равное расстоянию в пространстве), направление в пространстве и вра-

Использование спиноров при изучении «преобразования Лоренца» вида ночного неба

щение вокруг этого направления. Теперь обратимся к такому применению спиноров, когда нужна не вся эта информация. Посмотрим на ночное небо и спросим: 1) как описать его вид и 2) как этот вид изменить. В качестве одного из описаний вида ночного неба дадим направление на каждую звезду. Будем избегать всего, что касается расстояния до звезды, и всего, что связано с вращением ψ вокруг флагштока. Другими словами, не будем обращать внимание на комплексный множитель

$$(2r)^{1/2}e^{i\psi/2},$$

общий для ξ^1 и ξ^2. Существенным остается лишь отношение ζ этих компонент спинора:

$$\zeta = \xi^2/\xi^1 = \operatorname{tg}(\theta/2)\, e^{i\phi}. \tag{41.100}$$

Дать одно комплексное число ζ («стереографическую координату», фиг. 41.8) для каждой звезды на небе означает составить каталог видимой картины звезд.

Пусть наблюдатель меняет свое положение. При этом будет казаться, что небесная сфера поворачивается. Или же допустим, что он движется в ракете в направлении на Полярную звезду со скоростью, сравнимой со скоростью света. Вся эта часть небесной сферы развертывается перед ним, как если бы он смотрел на нее через увеличительное стекло. Зато остальные звезды заполняют меньшую угловую область. Любое такое вращение или буст, или комбинация вращения и буста, будучи описаны на языке спиноров с помощью преобразования вида

$$\xi^A \to \xi^A_{\text{нов}} = L^A{}_B \xi^B, \tag{41.101}$$

означает преобразование комплексной стереографической координаты произвольно заданной звезды следующего вида:

$$\zeta \to \zeta_{\text{нов}} = \frac{\xi^2_{\text{нов}}}{\xi^1_{\text{нов}}} = \frac{L^2{}_2\zeta + L^2{}_1}{L^1{}_2\zeta + L^1{}_1}. \tag{41.102}$$

В частном случае буста в направлении z с параметром скорости α (скорость $\beta = \operatorname{th}\alpha$) недиагональные компоненты $L^1{}_2$ и $L^2{}_1$ обращаются в нуль. При этом увеличение области неба, лежащей над наблюдателем, выражается простой формулой

$$\zeta_{\text{нов}} = e^{\alpha}\zeta,$$

или

$$\begin{aligned} \phi_{\text{нов}} &= \phi, \\ \operatorname{tg}(\theta_{\text{нов}}/2) &= e^{\alpha}\operatorname{tg}(\theta/2). \end{aligned} \tag{41.103}$$

Вопреки этому предсказанию и ошибочным ожиданиям никакого увеличения областей вокруг Полярной звезды при движении в этом направлении с большой скоростью не достигается. Наоборот, любой фотон, приходящий от звезды, направление на которую

слегка отличается от направления движения, в новой системе отсчета сохраняет неизменным свой поперечный импульс; зато продольный импульс, направленный против движения наблюдателя, складывается с этим движением. Таким образом, отношение поперечного импульса к продольному уменьшается, и наблюдаемый угол относительно Полярной звезды также уменьшается. Следствием этого является не увеличение, а уменьшение («посмотрели в телескоп не с того конца»). Правильной формулой является не (41.103), а

$$\operatorname{tg}(\theta_{\text{нов}}/2) = e^{-\alpha} \operatorname{tg}(\theta/2) \tag{41.104}$$

(изменение знака перед α). Причину этой поправки далеко искать не нужно. До сих пор в спинорном анализе рассматривался выходящий импульс света и 4-вектор с положительной временной компонентой. Эта характерная черта присуща и формуле, принятой для связи спинора с 4-вектором:

$$r\mathbf{1} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \equiv X = \| \xi^A \bar{\xi}^{\dot{U}} \| . \tag{41.105}$$

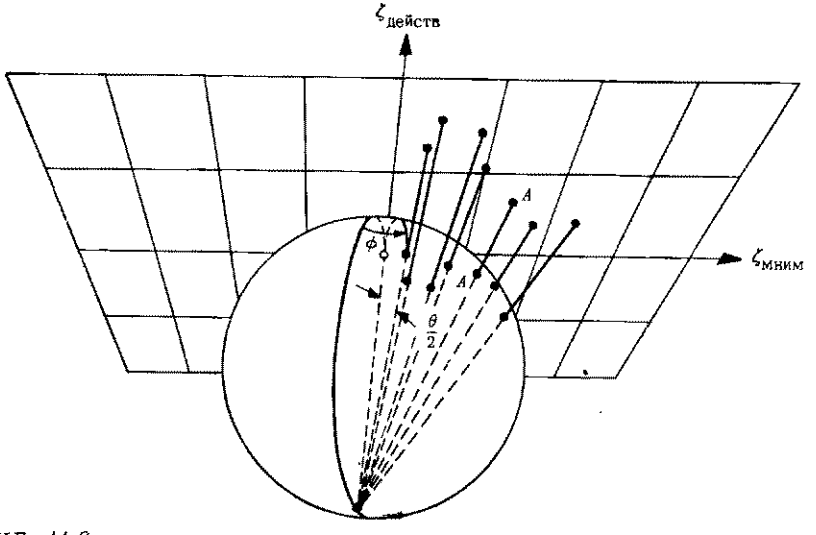
В противоположность этому 4-вектор фотона, движущегося внутрь, направленный к началу координат, имеет отрицательную временную компоненту (в другом варианте следует поменять знаки перед пространственными компонентами). Для произвольного нулевого 4-вектора с отрицательной временной компонентой вместо (41.105) мы применяем формулу

$$X = -\| \xi^A \bar{\xi}^{\dot{U}} \| . \tag{41.106}$$

Здесь достаточно упомянуть лишь принцип, не входя в детали, перемены знака перед α в (41.104). В дальнейшем, чтобы сохранить предыдущую арифметику, несколько изменим постановку проблемы. Будем иметь дело не с приходящими, а с выходящими фотонами. Заменим телескоп, принимающий свет, прожектором в планетарии. Он проектирует в пространство отдельный луч света для каждой звезды в Большой Медведице, а также один луч для самой Полярной звезды. Пусть наблюдатель движется в положительном направлении z с параметром скорости α. В его системе отсчета лучи действительно будут расширяться в полном согласии с (41.103).

Преобразования Лоренца не меняют углы на небе («конформная инвариантность»)

«Этот процесс увеличения изменяет размер Большой Медведицы, но не ее форму». Это утверждение одновременно и правильно, и неправильно. Оно справедливо для Большой Медведицы и для любого другого созвездия, угловые размеры которого можно считать малыми по сравнению с полной угловой протяженностью неба. Но оно ошибочно в том смысле, что любое хорошо очерченное при проекции созвездие, каким бы малым ни казалось оно покоящемуся относительно Земли наблюдателю, всегда может так «раскрыться» перед наблюдателем, достигнувшим достаточно боль-



ФИГ. 41.8.
Представление направления в пространстве (одна из звезд Большой Медведицы рассматривается как точка на небесной сфере) точкой на комплексной плоскости ζ (ζ — отношение компонент спинора ξ^2/ξ^1), осуществляемое с помощью стереографической проекции из Северного полюса.

шой скорости что, хотя наблюдатель еще находится недалеко от Земли, это созвездие будет охватывать бо́льшую часть неба.

То обстоятельство, что «увеличение, обусловленное преобразованием Лоренца», в случае малого объекта не меняет его формы, можно пояснить тремя способами. 1) Известно, что как стереографическая проекция (фиг. 41.8), так и «дробно-линейное преобразование» (41.102) оставляют все углы неизменными («конформная инвариантность», см., например, [931]) и даже окружность переводят снова в окружность. 2) Рассмотрим данную звезду M в созвездии и ее ближайших соседей L и N из числа членов созвездия, которые лежат непосредственно над и под звездой. Рассмотрим флагшток, направленный на M, и флаг, направленный сначала от M к L, а затем от M к N. Флаг повернут относительно флагштока на угол ψ. Следовательно, два соответствующих спинора отличаются друг от друга на фазовый множитель $e^{i\psi/2}$. Ничем другим они не различаются. После произвольного преобразования Лоренца они по-прежнему отличаются лишь на фазовый множитель $e^{i\psi/2}$. Поэтому после преобразования Лоренца угол между дугами ML и MN на небесной сфере имеет свое первоначальное значение ψ (опять конформная инвариантность картин на небесной сфере!). 3) Еще более элементарное вычисление показывает, что длины бесконечно малых дуг на небесной сфере единичного радиуса в направлении роста θ и в направлении роста ϕ увеличиваются в одной и той же пропорции, так что угол между ними остается

неизменным (конформная инвариантность). Рассмотрим фотон, испущенный проектором в планетарии по направлению к некоторой точке на небесной сфере (аналог звезды из Большой Медведицы) с наклонением θ к оси z, с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно Земли. Из обычных законов изменения углов при преобразовании Лоренца («аберрация», дополнение 2.4) для синуса преобразованного угла имеем

$$\sin\,\theta_{\text{нов}} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}\sin\theta \tag{41.107}$$

и (дифференцируя выражение для синуса преобразованного угла)

$$d\theta_{\text{нов}} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}\,d\theta. \tag{41.108}$$

Из этих выражений сразу же следует, что наклонение относительно линии меридиана на небесной сфере после преобразования совпадает с направлением относительно той же меридиональной линии на первоначальной небесной сфере:

$$\operatorname{tg}\begin{pmatrix}\text{новое}\\ \text{наклонение}\end{pmatrix} = \frac{\sin\theta_{\text{нов}}\,d\phi_{\text{нов}}}{d\theta_{\text{нов}}} = \frac{\sin\theta\,d\phi}{d\theta} = \\ = \operatorname{tg}\begin{pmatrix}\text{первоначальное}\\ \text{наклонение}\end{pmatrix} \tag{41.109}$$

(снова конформная инвариантность!).

На этом мы закончим рассмотрение элементарного спинора и его связи с нулевым вектором, с «флагштоком», направленным на небесную сферу, и с вращением «флага» вокруг такого «флагштока».

§ 41.11. СПИНОРЫ КАК МОЩНЫЙ АППАРАТ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Спинорный формализм в искривленном пространстве-времени

Спиноры, точно так же как векторы, тензоры и дифференциальные формы, легко обобщаются от случая плоского пространства-времени на случай искривленного.

Каждое событие $\mathcal{P}$ в искривленном пространстве-времени наделено касательным пространством. В этом касательном пространстве существуют и действуют все векторы, тензоры и формы, локализованные в $\mathcal{P}$. Геометрия касательного пространства является лоренцевой («локально лоренцева геометрия в событии $\mathcal{P}$»), поскольку скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в $\mathcal{P}$, выраженное в ортогональной системе в $\mathcal{P}$, есть

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u},\,\mathbf{v}) = \eta_{\hat\alpha\hat\beta}u^{\hat\alpha}v^{\hat\beta}.$$

Таким образом, математически касательное пространство в $\mathcal{P}$, с одной стороны, и плоское пространство-время — с другой ни-

чем не различаются. Что можно сделать в математическом плане в одном из них, то можно сделать и в другом. В частности, *весь формализм спиноров, разработанный первоначально в плоском пространстве-времени, может быть без изменения перенесен в касательное пространство, связанное с произвольным событием $\mathcal{P}$ в искривленном пространстве-времени.*

Допустим, это уже сделано. Теперь спиноры существуют в каждом событии в искривленном пространстве-времени, и в каждом событии можно переходить с языка спиноров на язык тензоров и обратно, пользуясь уравнениями (справедливыми в ортонормированных системах), которые приведены в § 41.6 и 41.7.

Спиноры необходимы для исследования фермионов в гравитационных полях

Спиноры в искривленном пространстве-времени являются незаменимым математическим аппаратом, если мы желаем изучать влияние гравитации на квантованные частицы с полуцелым спином (нейтрино, электроны, протоны...). Возьмем в качестве примера доказательство Хартля [85] того факта, что черная дыра не может действовать на внешнее вещество какими-либо дальнодействующими силами слабого взаимодействия (т. е. что у черной дыры нет «волос слабого взаимодействия»). Это доказательство было бы невозможно без спинорного описания нейтринных полей в искривленном пространстве-времени. Аналогично обстоит дело с проведенным Уилером [413] исследованием квазисвязанных состояний электронов в гравитационном поле малой черной дыры (гравитационный радиус $\sim 10^{-13}$ см); для этого исследования требуется решить уравнение Дирака для частиц со спином 1/2 в искривленной шварцшильдовской геометрии пространства-времени. Детальное обсуждение уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени см., например, в работе [414].

Эквивалентность спинорного и тензорного формализмов

Чтобы воспользоваться математикой спиноров, не обязательно иметь дело с квантовой теорией или с частицами с полуцелым спином. Спинорный формализм прекрасно применим и в тех ситуациях, когда рассматриваются лишь объекты с целочисленным спином (скаляры, векторы, тензоры) и когда фактически спинорный формализм полностью эквивалентен тензорному формализму, использовавшемуся в предшествующих главах этой книги. Как только в каждом событии пространства-времени выбрана ортонормированная система, уравнения (41.77) и (41.78) обеспечивают перевод с языка одного формализма на язык другого.

Проблемы некоторых типов в теории гравитации поддаются более глубокой трактовке на языке спиноров, нежели на тензорном языке. Ниже приводятся примеры.

1. Геометрическая оптика (теория «нулевых конгруэнций геодезических»)

Применение спинорного формализма в классической теории гравитации

Здесь благодаря спинорам громоздкая тензорная алгебра, необходимая при выводе «теоремы о фокусировке» (22.37), становится почти тривиальной; спиноры дают изящный и простой формализм

для рассмотрения и расчета того, как с увеличением аффинного параметра меняется размер пучка лучей («расширение»), его форма («сдвиг») и ориентация («вращение»). Обзор и ссылки на оригинальные работы см., например, в [25, 180, 411].

2. Теория излучения в искривленном пространстве-времени (как гравитационного, так и электромагнитного)

Спиноры обеспечивают самый мощный формализм для разложения полей излучения по сферическим гармоникам и для манипуляций с их компонентами в разложении. См., например, исследование Прайса [71, 78] о том, как возмущенная шварцшильдовская черная дыра излучает наружу все те возмущения, которые она может излучить, будь то электромагнитные возмущения, гравитационные или возмущения воображаемого поля со спином 17; см. также исследование Факерелла и Ипсера [415], а также Ипсера [141] электромагнитных возмущений керровской черной дыры и исследование Теукольского [171] гравитационных возмущений керровской дыры. Спиноры дают также изящный и мощный метод $1/r$-разложения поля излучения, испущенного источником в асимптотически плоском пространстве. К этим результатам относится и «теорема расщепления», которая описывает алгебраические свойства коэффициентов в разложении тензора Римана по степеням $1/r$. Обзор и ссылки на оригинальные работы см., например, в работе [25] или [411].

3. Алгебраические свойства тензоров кривизны

Спинорный формализм является наиболее мощным методом, предназначенным для вывода «алгебраической классификации Петрова — Пирани конформных тензоров кривизны» и для доказательства теорем об алгебраических свойствах тензоров кривизны. Обзоры и ссылки см., например, в работах [25, 180, 411].

Конечно, как и любой другой формализм, спинорный формализм имеет свои ограничения. Например, многие элементарные проблемы гравитационной теории и значительная часть наиболее трудных проблем выглядели бы более трудными на языке спиноров, чем на тензорном языке. Но для определенных классов проблем, особенно тех, где центральную роль играют нулевые векторы, спиноры являются самым плодотворным аппаратом.

В мировой физике и математике спиноры были введены Картаном; его книга [416] является важным источником сведений по теории спиноров[1]).

---

[1]) О спинорах см. [511]. Спинорный формализм используется при расчетах взаимных превращений гравитонов и других частиц, см. [512—515].— *Прим. ред.*

2

42. ИСЧИСЛЕНИЕ РЕДЖЕ

Эта глава целиком относится к курсу 2. В качестве подготовительного материала для этой главы необходима гл. 21 (вариационный принцип и формализм начальных значений). Эта глава не обязательна в качестве подготовительного материала для последующих глав, хотя она будет полезна при чтении гл. 43 (динамика геометрии).

§ 42.1. ЗАЧЕМ НУЖНО ИСЧИСЛЕНИЕ РЕДЖЕ?

Теория гравитации вступает в эпоху, когда необходимо исследовать все более и более сложные ситуации. Приблизительно вплоть до 1965 г. проблемы, представлявшие центральный интерес, можно было почти всегда решить с помощью идеализаций, рассматривая частные случаи особой симметрии или особой простоты. Геометрия Шварцшильда и ее обобщения, космология Фридмана и ее обобщения, соединение шварцшильдовской и фридмановской геометрий для описания коллапса связанного скопления вещества, колебания релятивистских звезд, слабые гравитационные волны, распространяющиеся в плоском пространстве,— все эти и другие проблемы были разрешены элементарными методами.

Необходимость исчисления Редже в качестве вычислительного аппарата

Но сегодня мы вынуждены осмысливать такие ситуации, в которых симметрия отсутствует и которые не поддаются теории возмущений. Как меняется форма двух черных дыр и сколько гравитационного излучения они излучают при соударении и слиянии друг с другом? Каковы структура и свойства сингулярностей в конечной стадии гравитационного коллапса, предсказываемых теоремами Пенроуза, Хоукинга и Героча? Может ли Вселенная, начинающая свое расширение из полного хаоса, быстро стать однородной за счет процессов, подобных неоднородным колебаниям в модели перемешанного мира?

Чтобы разрешить такие проблемы, необходимо овладеть новыми типами математических аппаратов, и в ответ на эту настоятельную необходимость разрабатываются новые аппараты. Одним из примеров таких аппаратов являются «глобальные методы» (гл. 34). Другой пример — исчисление Редже [417] (см. также [206], стр. 467—500).

§ 42.2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ РЕДЖЕ

Аппроксимация непрерывных геометрий скелетными структурами

Рассмотрим геодезический купол, покрывающий большую аудиторию, составленный из множества плоских треугольников, соединенных ребро к ребру, вершина к вершине. По аналогии с этим представим себе пространство-время в исчислении Редже как составленное из плоских пространственных «симплексов» (четырехмерных объектов, принадлежащих следующей последовательности: два измерения — треугольник, три измерения — тетраэдр, четыре измерения — симплекс), соединенных друг с другом грань к грани, ребро к ребру, вершина к вершине. Указать длины ребер — это все, что нужно инженеру, чтобы узнать форму свода, и все, что нужно ученому, чтобы узнать геометрию пространства-времени, о котором идет речь. Плавный свод над аудиторией можно с произвольной точностью аппроксимировать геодезическим куполом, построенным из достаточно малых треугольников. Гладкое пространство-время можно аппроксимировать сколь угодно точно совокупностью примыкающих друг к другу достаточно малых симплексов. Таким образом, исчисление Редже, выходящее за рамки привычных алгебраических выражений для метрики, дает способ исследования тех физических ситуаций, которые, как чаще всего и бывает, не обладают сферической симметрией, и даже систем, в которых симметрия вообще отсутствует.

Роль эйнштейновского уравнения поля в задании скелетной структуры

*Конструктор по желанию может придать своду любую форму; поэтому он обладает большей свободой, чем исследователь, который наносит на карту геометрию пространства-времени. Задав эту геометрию на некотором пространственноподобном сечении, которое для удобства можно назвать «теперь», исследователь начиная с этого момента уже не может влиять на эту геометрию. Эйнштейновский геометродинамический закон является полностью детерминистическим. В переводе на язык исчисления Редже этот закон позволяет вычислить длины граней новых симплексов, исходя из размеров предшествующих симплексов. Хотя сама геометрия определяется детерминированным образом, этого нельзя сказать о способе ее аппроксимации. Начальная пространственноподобная гиперповерхность («теперь») аппроксимируется совокупностью тетраэдров, соединенных грань к грани, но сколько будет этих тетраэдров и где будут располагаться их вершины, зависит от желания исследователя. Он может сделать так, чтобы в этой скелетной схеме «кости» располагались тем гуще, чем больше кривизна, добиваясь тем самым максимального выигрыша в точности при заданном числе точек. Некоторая свобода в выборе длин костей остается и в том случае, когда мы применяем геометродинамический закон в том виде, в каком его дал Редже [417], для расчета будущего, исходя из прошлого. При любой попытке составить программу для компьютера эта свобода окажется гибельной, если программист не избавится от всех неопределенностей, добавив дополнительные условия по собственному выбору, подо-

бранные так, чтобы дать хороший «выигрыш в точности», или исходя из других критериев.

Определив длины всех костей в интересующей нас части пространства-времени, представленного в виде скелетной схемы, можно отдельно изучать произвольно выбранную локальную совокупность костей. Таким способом можно выяснить все, что нужно, о геометрии этой области. Конечно, точность полученных данных зависит от того, насколько мелкой мы взяли скелетную структуру. Но в принципе, пока мы работаем в рамках классической физики, мы можем неограниченно уменьшать элементы этой структуры и тем самым неограниченно увеличивать точность. Таким образом, в конце расчета мы получим каталог длин всех костей. Затем можно исследовать геометрию какой угодно пространственноподобной поверхности и, кроме того, ответить на множество других вопросов. Для этого мы должны лишь выбрать подходящие кости и выяснить, каким образом они соединяются друг с другом.

§ 42.3. СИМПЛЕКСЫ И НЕДОСТАЮЩИЕ УГЛЫ

Недостающий угол как мера кривизны в скелетной схеме:

Фиг. 42.1 напоминает, каким образом гладкую искривленную поверхность можно аппроксимировать плоскими треугольниками. Вся кривизна сосредоточивается в вершинах. Несмотря на первое впечатление, на ребре между двумя соседними треугольниками кривизны не существует. Вектор, параллельно перенесенный от A через B и C к D и затем перенесенный обратно по другому пути через C и B к A, возвращается к точке начала движения, не изменив своего направления, как легко можно видеть, если распластать этот комплекс треугольников на плоской поверхности.

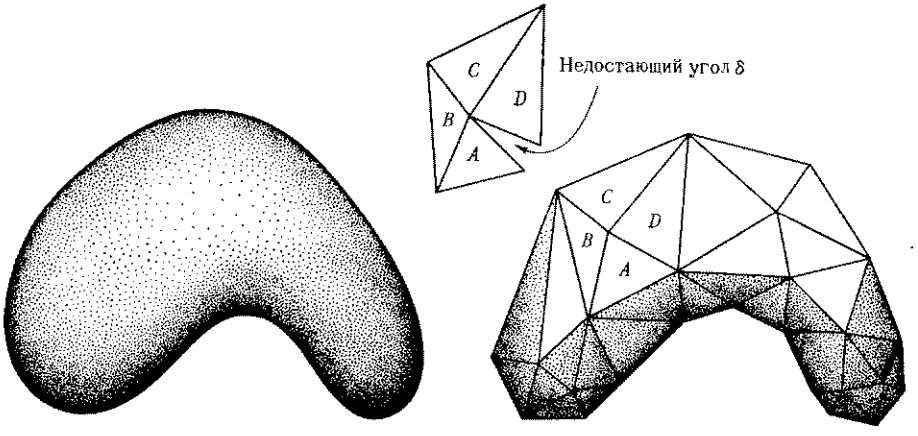
1) в случае двух измерений

Только в том случае, когда этот путь образует петлю вокруг вершины, общей для A, B, C и D, вектор испытывает поворот. Величина этого поворота равна указанному на фиг. 42.1 недостающему углу δ при этой вершине. Сумма недостающих углов по всем вершинам всегда имеет одно и то же значение 4π, так же как половина интеграла от непрерывно распределенной скалярной кривизны [$^{(2)}R = 2/a^2$ для сферы радиуса a], взятого по всей первоначальной гладкой фигуре

$$\sum_{\text{по скелетной геометрии}} \delta_i = \frac{1}{2} \int_{\text{по истинной гладкой геометрии}} {}^{(2)}R \, d(\text{поверхность}) = 4\pi. \qquad (42.1)$$

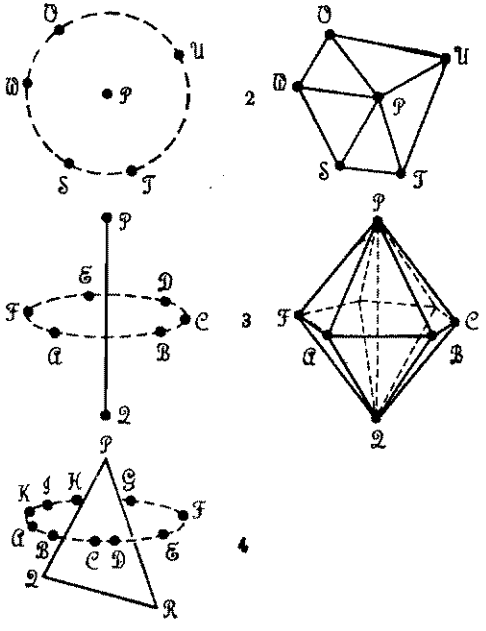
2) в случае n (или четырех) измерений

Обобщая пример двумерной геометрии, исчисление Редже аппроксимирует гладкое искривленное n-мерное риманово многообразие в виде совокупности n-мерных блоков, каждый из которых не имеет кривизны, соединенных $(n-2)$-мерными областями, в которых



ФИГ. 42.1.
2-геометрия с непрерывно изменяющейся кривизной может быть аппроксимирована с произвольной точностью в виде многогранника, построенного из треугольников; для этого достаточно сделать число треугольников достаточно большим, а их размеры достаточно малыми. Геометрия каждого треугольника эвклидова. Кривизна поверхности проявляется в величине недостающего угла при каждой вершине (наверху часть $ABCD$ многогранника развернута на плоской поверхности).

сосредоточена вся кривизна (дополнение 42.1). Для четырехмерного пространства-времени общей теории относительности «узел», в котором сосредоточена кривизна, имеет форму треугольника, как схематически показано в нижнем ряду на фиг. 42.2. В примере, который там иллюстрируется, этот треугольник является общим для десяти тетраэдров. Между двумя следующими друг за другом тетраэдрами помещается четырехмерный симплекс. Все свойства этого симплекса определяются длинами его десяти ребер. Одной из характеристик является угол α между двумя указанными тетраэдрами, или «гранями» симплекса. Таким образом, α представляет собой угол, образованный этим симплексом в определенном узле. Суммируя углы α для всех симплексов, которые встречаются в данном узле $\mathscr{P}\mathscr{Q}\mathscr{R}$, и вычитая эту сумму из 2π, получаем недостающий угол, соответствующий этому узлу. Суммируя затем с соответствующим весом (дополнение 42.1) недостающие углы в заданном малом n-объеме, мы получаем число, равное объемному интегралу от скалярной кривизны исходной гладкой n-геометрии (дополнение 42.2).



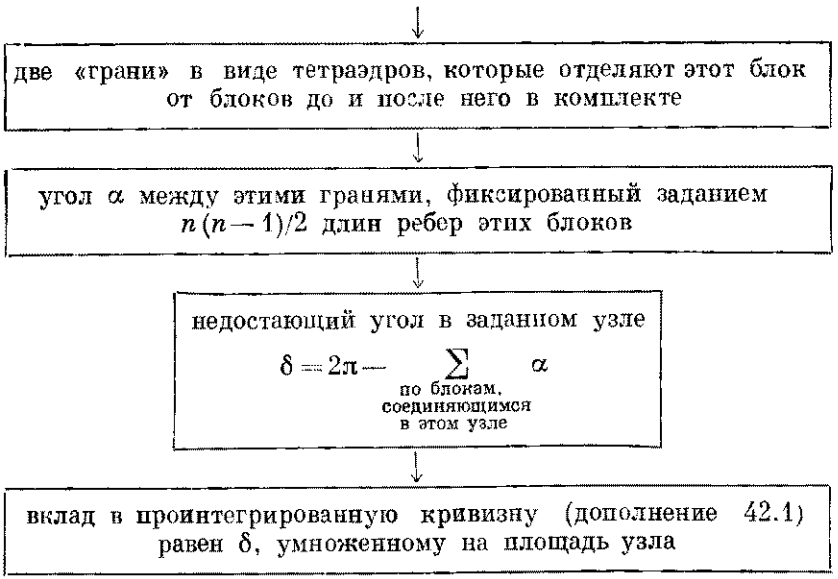
ФИГ. 42.2.
Замкнутый набор строительных блоков, примыкающих к одному узлу. Верхний ряд — два измерения: слева схематическое расположение вершин $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ относительно «узла» в вершине $\mathscr{P}$, справа то же, но элементарные треугольники изображены полностью. Средний ряд — три измерения: слева схематическое изображение, справа изображение в перспективе шести тетраэдров, которые соприкасаются в «узле» $\mathscr{PQ}$. Нижний ряд — четыре измерения, показано лишь схематически. Пять вершин $\mathscr{PQRCD}$ принадлежат одному симплексу, т. е. четырехмерной области, внутри которой пространство является плоским. Пять вершин $\mathscr{PQRDE}$ принадлежат следующему симплексу и т. д. по всему замкнутому набору симплексов. Два только что указанных симплекса имеют в качестве границы тетраэдр $\mathscr{PQRD}$, внутри которого геометрия также плоская. Между этим тетраэдром и следующим $\mathscr{PQRE}$ имеется некоторый гипердвугранный угол α, прилегающий к «узлу» $\mathscr{PQR}$. Величина этого угла полностью фиксируется заданием десяти длин ребер промежуточного симплекса $\mathscr{PQRZE}$. Этот двугранный угол вместе с соответствующими двугранными углами, прилегающими к узлу $\mathscr{PQR}$ и образованными другими симплексами замкнутого набора, в общем случае в сумме не дают 2π. Разница —«подвижный угол», или недостающий угол δ,— дает величину кривизны, сконцентрированной в узле $\mathscr{PQR}$. Пока мы не пытаемся погрузить этот набор симплексов в повсюду плоское четырехмерное пространство, в действительности нет никакой подвижности или незаполненных промежутков (аналог развернутой совокупности треугольников, указывающий величину недостающего угла, на фиг. 42.1).

Дополнение 42.1. УЗЛЫ, ГДЕ КРИВИЗНА СКОНЦЕНТРИРОВАНА В «ПОДВИЖНЫХ УГЛАХ» МЕЖДУ СТРОИТЕЛЬНЫМИ БЛОКАМИ В СКЕЛЕТНОМ МНОГООБРАЗИИ

Размерность многообразия	2	3	4
Элементарный плоский пространственный строительный блок	треугольник	тетраэдр	симплекс
Число длин ребер, необходимое для задания блока	3	4	5
Узел, где комплект подобных блоков образует недостающий, или «подвижный», угол δ	вершина	ребро	треугольник
Размерность узла	0	1	2
«Емкость» узла	1	длина l	площадь A
Вклад в кривизну многообразия всех углов внутри заданной малой области	$\sum \delta_i$ по этой области	$\sum l_i \delta_i$ по этой области	$\sum A_i \delta_i$ по этой области
Предельное значение этого вклада при переходе к непрерывности, выраженное в виде интеграла по той же малой области	$\frac{1}{2}\int {}^{(2)}R\,({}^{(2)}g)^{1/2} d^2x$	$\frac{1}{2}\int {}^{(3)}R\,({}^{(3)}g)^{1/2} d^3x$	$\frac{1}{2}\int {}^{(4)}R(-{}^{(4)}g)^{1/2} d^4x$

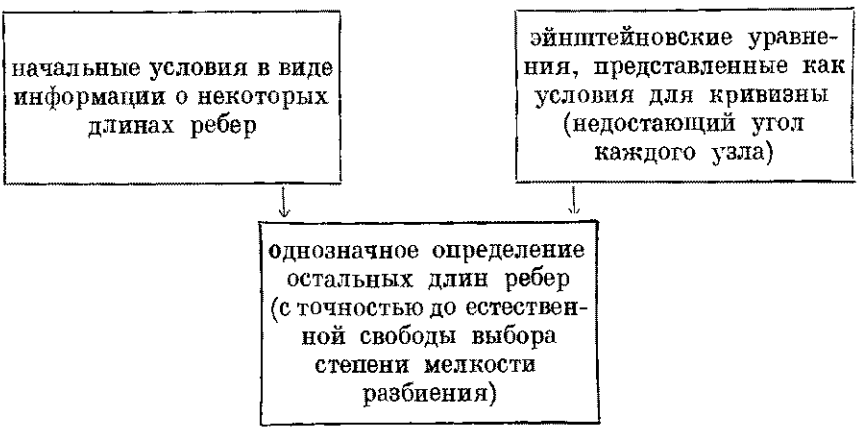
Дополнение 42.2. СХЕМЫ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ РЕДЖЕ

Скелетная 4-геометрия полностью определяется заданием всех длин ребер. Исходя из этих длин ребер, мы получаем проинтегрированную кривизну, придерживаясь для каждого узла в 4-геометрии следующей схемы:



Такой анализ естественно проводить одним из следующих двух различных способов. Во-первых, можно получить сведения о данной 4-геометрии (о данном наборе длин ребер!) в том смысле, что

Во-вторых, — и в этом логическое оправдание исчисления Редже — можно использовать скелетное исчисление для вывода ранее неизвестной 4-геометрии из эйнштейновского закона геометродинамики, следуя такому направлению:



§ 42.4. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В СКЕЛЕТНОЙ ФОРМЕ

Вариационный принцип Эйнштейна — Гильберта, приведенный к скелетной форме

Вместо того чтобы непосредственно переводить эйнштейновские уравнения поля на язык скелетного исчисления, Редже обратился к классическому вариационному принципу, из которого можно вывести эйнштейновский закон. Согласно этому принципу (см. § 21.2 и 43.3), в некоторой протяженной области пространства-времени при выполнении определенных выбранных граничных условий геометрию следует подбирать так, чтобы безразмерный интеграл (действие в единицах $\hbar$)

$$I = (c^3/16\pi\hbar G) \int R\,(-g)^{1/2} d^4x \qquad (42.2)$$

имел экстремальное значение. Это утверждение справедливо, когда в пространстве нет вещества и электромагнитных полей; цель этого упрощения — избежать чрезмерной громоздкости при последующем изложении. Если, кроме того, все длины выражены в планковских единицах длины

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см} \qquad (42.3)$$

и интеграл от кривизны приближенно выражается через недостающие углы, то, как показал Редже, утверждение $\delta I = 0$ (условие экстремальности!) принимает вид

$$\frac{1}{8\pi} \delta \sum_{\substack{\text{по узлам} \\ h=1}}^{H} A_h \delta_h = 0. \qquad (42.4)$$

При тех изменениях, которые включаются в этот вариационный принцип, длины некоторых ребер считаются фиксированными. Они должны согласовываться с условиями, выбранными на границах изучаемой области пространства-времени. К счастью, здесь нет необходимости говорить о точной формулировке этих граничных условий, поскольку некоторые принципиальные вопросы, касающиеся формулировки граничных условий в общей теории относительности, остаются пока невыясненными (см. § 21.12). В действительности важен скорее эффект изменения длин ребер блоков внутри исследуемой области, когда они то увеличивают, то уменьшают недостающие углы в различных узлах. В своей основной работе, посвященной этому предмету, Редже [417] отмечает, что типичный недостающий угол δ_h находится в сложной тригонометрической зависимости от значений длин большого числа ребер l_p. Однако он доказал (в приложении к своей работе), «что мы можем производить вариацию так, как если бы δ_h были постоянными», сведя, таким образом, вариационный принцип к виду

$$\frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{\text{по узлам} \\ h=1}}^{H} \delta_h \delta A_h = 0. \qquad (42.5)$$

Здесь изменение площади h-го узла в форме треугольника, согласно элементарной тригонометрии, есть

$$\delta A_h = \frac{1}{2} \sum_p l_p \delta l_p \operatorname{ctg} \theta_{ph}. \tag{42.6}$$

В этом выражении θ_{ph} — угол, противолежащий p-му ребру треугольника. Следовательно, эйнштейновские уравнения для пустого пространства в скелетной геометрии сводятся к виду

Эйнштейновское уравнение поля, приведенное к скелетной форме

$$\sum_{\substack{\text{по узлам,} \\ \text{для которых ребро } p \\ \text{является общим}}} \delta_h \operatorname{ctg} \theta_{ph} = 0 \qquad (p = 1,2, \ldots) \tag{42.7}$$

(по одному уравнению для длины каждого ребра внутри исследуемой области пространства-времени).

§ 42.5. ВЫБОР СТРУКТУРЫ РЕШЕТКИ

При практическом использовании исчисления Редже возникают два вопроса, и не ясно, получили ли они до сих пор разрешение, которое наиболее удобно для практических применений этого скелетного метода. Какого типа решетку использовать? Как лучше извлечь пользу из свободы, существующей в выборе длин ребер? Первый вопрос рассматривается в этом параграфе, а второй — в следующем.

Выбор структуры решетки:

1) избежание подвижности

Может показаться наиболее естественным использовать решетку, построенную из малых почти прямоугольных блоков, причем отклонение каждого из них от прямоугольности обусловливается величиной и направлением локальной кривизны. Однако построенные таким образом блоки являются «подвижными». Можно было бы придать им жесткость, специально выбирая некоторые углы и длины ребер. Но тогда мы потеряли бы четкость рецепта Редже: задавать длины ребер и только длины ребер, длину каждого ребра задавать свободно и независимо, чтобы определить геометрию. Кроме того, пришлось бы заново выводить уравнение Редже, вводя новые уравнения для определения новых углов. Поэтому мы отбрасываем квазипрямоугольник и заменяем его симплексом с $5 \cdot 4/2 = 10$ длинами ребер. Поступив так, мы придем к выводу, что даже в случае плоского пространства симплексы не могут иметь тождественные длины ребер. Двумерное плоское пространство может быть заполнено одинаковыми равносторонними треугольниками, но уже при трех измерениях заполнить сплошь все многообразие одинаковыми равносторонними тетраэдрами оказывается невозможно. Известно, что каждый атом углерода в алмазе соединяется со своими ближайшими соседями с помощью тетрагональных связей, но, немного подумав, мы увидим, что ячейка кристаллической решетки, отведенная под этот атом, по своей форме далека от равностороннего тетраэдра.

2) необходимость выделенных длин ребер

По-видимому, естественным способом соединения строительных блоков является синтез: сначала строим одномерные структуры, объединяем их в двумерные, те в свою очередь в трехмерные структуры и, наконец, трехмерные объединяем в окончательную четырехмерную структуру. Одномерная структура состоит из точек 1, 2, 3, . . ., разделенных линейными сегментами 12, 23, 34, ... Чтобы начать построение двумерной структуры, возьмем вторую одномерную структуру. Кажется естественным присвоить ее точкам обозначения 1′, 2′, 3′ и т. д. Однако такой выбор обозначений означал бы поперечное соединение точек 1 и 1′, 2 и 2′ и т. д., подобно своеобразной лестнице. Тогда элементарными ячейками являлись бы квазипрямоугольники. Они обладали бы «подвижностью», что следует исключить. Поэтому мы обозначим точки второй одномерной структуры $1^1/_2{}'$, $2^1/_2{}'$, $3^1/_2{}'$ и т. д. Это означает, что точку $2^1/_2{}'$ мы соединяем с точками 2 и 3 исходной одномерной структуры и т. д. В конце концов мы получаем структуру, похожую на форму моста, абсолютно жесткую в рамках двух измерений, чего мы и добивались. Та же конструкция, если ее продолжить, сплошь заполняет плоскость треугольниками. Теперь мы имеем простую стандартную двумерную структуру. Ошибочно было бы думать, что мы можем двигаться дальше и строить трехмерную структуру; ошибка заключается в неявном предположении, что правильной топологией обязательно является топология плоского пространства.

3) построение двумерных структур

Допустим, например, что задача состоит в том, чтобы определить эволюцию во времени 3-геометрии, имеющей топологию 3-сферы. Возможно, эта 3-сфера сильно деформирована по сравнению с идеальной длинноволновыми гравитационными волнами. Прежде всего возникает необходимость правильно расположить точки. Поэтому отложим пока какое-либо рассмотрение деформации геометрии (отличие длин ребер от идеального случая). Зададимся вопросом, как разделить идеально правильную 3-сферу на двумерные поверхности. При этом принимается, что каждая поверхность отделена от следующей некоторым расстоянием. Здесь сами собой напрашиваются два подхода, которые для краткости можно назвать «блоки» и «сферы».

4) трехмерные структуры, построенные из двумерных «методом блоков»

1. *Блоки.* Обратим внимание на то, что 3-сфера допускает разложение на 5 тождественных тетраэдроподобных блоков (5 углов, 5 путей, по которым можно выйти из каждого из них). Зафиксируем один из этих «тетраэдров». Выберем один из углов в качестве вершины, а грань, проходящую через остальные три угла, — в качестве основания. Наделим это основание двумерной решеточной структурой, описанной выше. Введем множество дополнительных поверхностей, расположенных над основанием с одинаковыми промежутками вплоть до вершины. В каждом слое имеется меньше точек, чем в предыдущем. Тем самым разложение 3-геометрии внутри одного «тетраэдра» завершено. Однако остается нерешенным вопрос не только о том, как регулярным образом соединить

эту слоистую структуру с соответствующей структурой в примыкающем «тетраэдре», но и о том, возможно ли вообще подобное соединение. Тот же вопрос можно задать и по поводу двух других способов разбиения 3-сферы на тождественные «тетраэдры» ([418], особенно стр. 292—293: 16 тетраэдров, заданные 8 углами, или 600 тетраэдров, заданные 120 углами). Можно очень просто избежать этого вопроса о соединении структур, но ценой наложения верхнего предела на достижимую точность: для этого установленное число углов (5, 8 или 120) достаточно считать полным числом точек, которые будут использованы в построении скелета 3-геометрии (дальнейшего деления не требуется и не допускается). Если принять во внимание ограниченную емкость памяти любого компьютера, то намерение ограничиться 120 трассирующими точками в пробных вычислениях вряд ли покажется смешным!

5) построение трехмерных структур из двумерных «методом сфер»

2. *Сферы.* Альтернативный подход к «дроблению» 3-сферы начинается с введения на 3-сфере Северного и Южного полюсов, а также гиперсферического угла χ (на первом полюсе $\chi = 0$, на втором $\chi = \pi$, на экваторе $\chi = \pi/2$; см. дополнение 27.2). Пусть каждый двумерный слой лежит на поверхности постоянного χ (некоторый интервал $\Delta\chi$ укладывается в χ целое число раз). Структуру этой 2-сферы следует рассматривать уже в виде скелета из элементарных треугольников («совершенно законченный геодезический купол Фуллера»). Поэтому число «граней», или треугольников F, число длин ребер E и число вершин V должны быть связаны соотношением Эйлера

$$F-E+V=\begin{pmatrix}\text{число, зависящее от топологии,}\\ \text{или «эйлерова характеристика»}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases}2 \text{ для 2-сферы,}\\ 0 \text{ для 2-тора.}\end{cases} \qquad (42.8)$$

Из этого соотношения следует, что не каждая из вершин может помещаться в центре шестиугольника (т. е. быть точкой схождения 6 треугольников). Если это так, то мы не удивимся, когда тщательное обследование геодезического купола обнаружит вершины, где встречается лишь 5 треугольников. Достаточно иметь 12 таких вершин с 5 треугольниками среди всех вершин с 6 треугольниками, чтобы удовлетворить требованиям, налагаемым соотношением Эйлера:

$$\begin{aligned} &n \text{ вершин с 5 треугольниками,}\\ V-n &\text{ вершин с 6 треугольниками}\\ &F=(V-n)\,(6/3)+n\,(5/3) \text{ треугольников,}\\ &E=(V-n\,(6/2)+n\,(5/2) \text{ ребер,} \qquad (42.9)\\ &V=(V-n)\,(6/6)+n \text{ вершин,}\\ 2=F-E+V&=n/6 \text{ эйлерова характеристика,}\\ &n=12. \end{aligned}$$

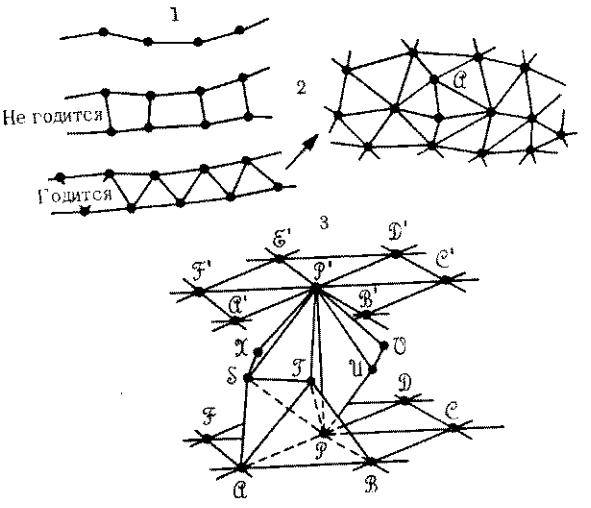
Среди всех фигур с треугольными гранями двадцатигранник является фигурой с минимальным числом граней, удовлетворяющим этому условию (исключительно вершины с 5 треугольниками!).

Если каждая 2-поверхность представляет собой совокупность вершин геодезического купола, то как соединить один купол со следующим, чтобы образовать жесткую скелетную 3-геометрию? Если бы купола были погружены в плоскую 3-геометрию, то вопрос о жесткости не возникал. Каждый купол был бы жестким уже сам по себе. Однако 3-геометрия не задана плоской. Лишь совершенно определенная скелетная структура пространства между 2-сферами придает им жесткость в рамках окружающей искривленной геометрии пространства. 1. Жесткость не может быть достигнута путем использования единственного звена, соединяющего каждую вершину на одной поверхности с соответствующей вершиной на следующей («подвижная структура»!). 2. Она не может быть получена смещением одной поверхности так, чтобы каждая из ее вершин помещалась примерно над центром треугольника на поверхности, расположенной «ниже». Во-первых, число вершин и число треугольников, как правило, не будут соответствовать друг другу. Во-вторых, даже когда такое соответствие есть, соединение вершины на поверхности, лежащей выше, с тремя вершинами лежащего ниже треугольника не придает структуре необходимую жесткость. Пространство в промежутке между поверхностями будет содержать некоторые тетраэдры, но оно не будет сплошь состоять из тетраэдров. 3. Естественный и вполне осуществимый подход к построению скелета 3-геометрии состоит в том, чтобы, соединяя каждую вершину на одной поверхности с соответствующей вершиной на следующей поверхности, наделять это соединение дополнительной структурой, которая придает жесткость 3-геометрии,— промежуточными вершинами и соединительными звеньями, как это иллюстрируется в дополнении 42.3.

6) четырехмерные структуры, построенные из трехмерных структур

Переходя от построения скелета 3-геометрии к построению скелета 4-геометрии, естественно поступить аналогичным образом. 1. Используем тождественные наборы точек в двух 3-геометриях. 2. Связываем соответствующие точки друг с другом с помощью одиночных соединительных звеньев. 3. На полпути или приблизительно на полпути между двумя 3-геометриями размещаем дополнительный набор вершин. Каждая из этих вспомогательных вершин является «дуальной» по отношению к центру тетраэдра в 3-геометрии, расположенной непосредственно над этой вершиной. 4. Соединяем каждую вспомогательную вершину с вершинами тетраэдра, лежащего непосредственно над ней, и с теми другими вспомогательными вершинами, которые являются непосредственными ее соседями. 5. Идя по такому пути, получаем длины ребер, необходимые для разделения 4-геометрии на симплексы, каждый из которых имеет жестко определенные размеры.

Дополнение 42.3. СИНТЕЗ СКЕЛЕТНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ИЗ СКЕЛЕТНЫХ ГЕОМЕТРИЙ БОЛЕЕ НИЗКОЙ РАЗМЕРНОСТИ



1. Одномерная структура как чередование точек и отрезков линий. 2. Двумерная структура а) «подвижная» (не допустима) и б) жесткая (углы треугольников полностью определяются заданием длин ребер). Когда эта структура продолжается так, как это показано на рисунке справа, в «нормальную» вершину входит 6 треугольников. Однако следует ввести по крайней мере две вершины с 5 треугольниками типа вершины $\mathcal{A}$ на рисунке, чтобы 2-геометрия могла замкнуться в 2-сферу. 3. Скелетная 3-геометрия получена путем заполнения промежутка между 2-геометрией $\ldots\mathcal{AB}\ldots\mathcal{FPC}\ldots\mathcal{ED}\ldots$ и аналогичной структурой $\ldots\mathcal{A'B'}\ldots\mathcal{F'P'C'}\ldots\mathcal{E'D'}\ldots$ следующим образом: а) между соответствующими точками 2-геометрий помещаем непосредственно связующие звенья, такие, как $\mathcal{PP'}$; б) помещаем промежуточный слой «вспомогательных вершин», таких, как $\mathcal{STUVWX}\ldots$. Каждая из этих вспомогательных вершин лежит приблизительно посередине между центром треугольника, расположенного «над» ней, и центром соответствующего треугольника «под» ней; в) соединяем каждую такую «вспомогательную» вершину с близлежащими вершинами, расположенными «над» ней, «под» ней и в одной с ней плоскости; г) задаем все длины ребер; д) после этого скелетная 3-геометрия между двумя 2-геометриями определена однозначно. Она составлена из следующих пяти типов тетраэдров: 1. «Сквозные блоки», такие, как $\mathcal{PP'S'T}$ (6 таких блоков соединяются друг с другом вдоль $\mathcal{PP'}$, если $\mathcal{P}$ является нормальной вершиной, 5 — если $\mathcal{P}$ есть 5-кратная вершина, подобная вершине $\mathcal{A}$, показанной на верхнем правом рисунке). 2. «Блоки, обращенные вниз», такие, как $\mathcal{ABPT}$. 3. «Нижние упаковочные блоки», такие, как $\mathcal{APST}$. 4 и 5. Соответствующие «блоки, обращенные вверх» и «верхние упаковочные блоки» (не показаны на рисунке). Число блоков каждого типа указано здесь приблизительно для двух предельных случаев 2-геометрии, состоящей а) из нормальной гексагональной решетки, неограниченно продолженной в плоскости, и б) из решетки, в которую

входит минимальное число 5-кратных вершин (вершин типа $\mathcal{A}$), совместимое с условием замыкания в 2-сферу.

2-геометрия верхней (или нижней) поверхности	Гексагональная система треугольников	Двадцатигранник, составленный из треугольников
Топология	бесконечная 2-плоскость	2-сфера
Вершины на верхней поверхности	V	12
Характер этих вершин	6-кратные	5-кратные
Длины ребер на верхней поверхности	$3V$	$\frac{5}{2}V = 30$
Треугольники на верхней поверхности	$2V$	20
Число «вспомогательных вершин»	$2V$	20
Блоки, обращенные наружу	$2V$	20
Наружные упаковочные блоки	$3V$	30
Сквозные блоки	$6V$	60
Внутренние упаковочные блоки	$3V$	30
Блоки, обращенные внутрь	$2V$	20

§ 42.6. ВЫБОР ДЛИН РЕБЕР

Выбор длин ребер:

Мы рассмотрели структуру решетки 4-геометрии; теперь перейдем к другому вопросу — к вопросу о свободе, существующей в выборе длин ребер. Почему не сделать самый простой выбор, допустив, что все ребра являются световыми лучами? Ответ: потому, что 4-геометрия не была бы в этом случае вполне определена. Геометрия $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ отличается от геометрии $\lambda(x^\mu)\, g_{\alpha\beta}(x^\mu)$, хотя те же точки, которые соединены друг с другом световыми лучами в одной геометрии, соединены также световыми лучами в другой геометрии.

1) выбор некоторых ребер времениподобными, а других — пространственноподобными

Если ни одно из ребер не является нулевым, то тем не менее естественно принять некоторые длины ребер пространственноподобными, а некоторые — времениподобными. Вследствие этого площадь треугольника A в одних случаях будет действительной, а в других — мнимой. В 3-пространстве параллелограмм (сдвоенный треугольник), натянутый на два вектора $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$, описывается вектором

$$2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C},$$

перпендикулярным двум векторам $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Величина вектора $\boldsymbol{A}$ определяется формулой

$$4A^2 = B^2C^2 - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2.$$

Пусть **B** и **C** — две стороны треугольника в 4-пространстве. Тогда, как и в случае трех измерений, 2**A** является *дуальным* к бивектору,

построенному из **B** и **C**. Другими словами, если **B** идет в t-направлении и **C** — в z-направлении, то **A** является бивектором, лежащим в плоскости (x, y). Следовательно, его величину A следует рассматривать как *действительное* число. Поэтому правильная формула для площади A имеет вид (Тулио Редже)

$$4A^2 = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^2 - \mathbf{B}^2\mathbf{C}^2. \tag{42.10}$$

Величина A действительна, если действителен недостающий угол δ. Таким образом, произведение $A\delta$, имеющее важный геометрический смысл, также является действительным.

С другой стороны, если узел лежит на плоскости (x, y), то величина A является чисто мнимой. В этом случае пробный вектор, обнесенный по замкнутому пути, проходящему через те симплексы, которые примыкают к этому узлу, испытывает изменение лишь компонент z и t, т. е. он испытывает лоренцевский буст; при этом недостающий угол δ чисто мнимый. Поэтому опять произведение $A\delta$ является чисто действительной величиной.

2) выбор сравнимых времениподобных и пространственноподобных длин ребер

Перейдем теперь от характера длин ребер к величинам этих длин. Желательно, чтобы элементарные строительные блоки давали представление о кривизне пространства в различных направлениях приблизительно в равной степени. Другими словами, желательно, чтобы не было ни длинных иглообразных строительных блоков, ни блинообразных тетраэдров и симплексов. Это естественное требование означает, что шаг «вперед» во времени должен быть сравним с шагами «в стороны» в пространстве. Сам факт, что возникла необходимость сформулировать подобное требование, выявляет одно обстоятельство, которое должно было быть очевидным и ранее: «уравнения узлов» (42.7)

$$\sum_{\substack{\text{узлы } h, \text{ имеющие} \\ \text{общее ребро } p}} \delta_h \operatorname{ctg} \theta_{ph} = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

3) почему некоторые длины ребер следует выбирать произвольно

хотя они столь же многочисленны, как ребра, нельзя считать достаточными для определения всех длин ребер. Обязательно имеются соотношения, благодаря которым эти уравнения не являются независимыми. Эти уравнения не могут определить все детали в значительной мере произвольного процесса построения скелетной структуры. Они не могут определить эти детали, подобно тому как уравнения поля в общей теории относительности не могут определить систему координат. С заданным набором вершин (четырехмерное обобщение рисунков в дополнении 42.3) мы имеем еще а) право выбора расстояний между соседними слоями структуры и б) свободу выбора распределения заданного числа точек в пространстве на данном слое для достижения максимального возможного выигрыша в точности (большая плотность точек в областях с большей кривизной). Чтобы на основе исчисления Редже составить практическую программу для компьютера, мы должны обеспечить машину не только уравнениями узлов и начальными

условиями, но также и определенными алгоритмами устранения всех неопределенностей, которые связаны с указанной свободой выбора.

Выражение недостающего угла через длины ребер

Формулы трехмерной и четырехмерной геометрий, из которых гипердвумерные углы α и недостающие углы δ определяются через длины ребер и только через них, кратко изложены Уилером ([206], стр. 469, 470 и 490) и Вонгом [419]. Редже [417] приводит формулу для тензора кривизны Римана, выраженного через недостающие углы и число ребер, проходящих в заданном направлении (см. также [206], стр. 471).

§ 42.7. ПРИМЕНЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ РЕДЖЕ В ПРОШЛОМ

Применения исчисления Редже в прошлом

Вонг [419] применил исчисление Редже к проблеме, в которой не проявляется никакой временной эволюции, и поэтому геометрию можно считать статической, и, кроме того, геометрия сферически симметрична. Он рассчитал геометрию Шварцшильда и геометрию Рейснера — Нордстрема с помощью метода построения скелетной схемы. Рассмотрим последовательность сфер, окружающих центр притяжения. Вонг аппроксимирует каждую из них двадцатигранником. Условие (§ 21.5)

$$^{(3)}R = 16\pi\left(\begin{array}{l}\text{плотность энергии в}\\ \text{3-пространстве}\end{array}\right)$$

дает рекуррентное соотношение для определения размера каждого двадцатигранника через размеры двух предшествующих. Ошибки, обусловленные таким скелетным представлением точной геометрии, лежат в интервале от $\sim 10\%$ до $<1\%$ в зависимости от метода исследования анализируемой величины и мелкости разбиения геометрии.

Частичная скелетонизация

Процесс построения скелетной схемы геометрии следует отличать от простой записи уравнений в частных производных в виде разностных уравнений. В настоящее время имеются три примера построения скелетной структуры без разбиения пространства-времени до уровня отдельных симплексов. Первый пример — это первая часть работы Вонга, где временно́е измерение ни разу не фигурирует в явном виде, так что строительные блоки являются лишь трехмерными. Вторым примером служит альтернативное рассмотрение, также данное Вонгом, которое выходит за рамки симметрии по t, чтобы воспользоваться симметрией по θ и ϕ. В этой трактовке пространство делится на сферические оболочки, в каждой из них геометрия является «псевдоплоской» в том же смысле, в каком является плоской геометрия бумажного колпака. Третий пример касается численного решения для гравитационного коллапса сферической звезды, полученного Мэйем и Уайтом [61]

в предположении симметрии по θ и ϕ, но не по r или t. Это разбиение на зоны имеет место исключительно в плоскости r, t. Каждая зона представляет собой сферическую оболочку. Отличие по сравнению с исчислением Редже (плоская геометрия внутри каждого строительного блока) состоит в «конусности», приписываемой каждой оболочке. Эти примеры показывают, что при построении скелетной схемы геометрии для вычислений вопрос обычно состоит не в том «применять эту схему или нет», а в том, «в какой степени» ее применять.

§ 42.8. БУДУЩЕЕ ИСЧИСЛЕНИЯ РЕДЖЕ

Надежды на будущее

В заключение отметим, что скелетное исчисление Редже делает доступными для расчета такие проблемы, которые практически выходят за пределы возможностей обычных аналитических методов. Оно обеспечивает любую желаемую точность при достаточно мелком разбиении рассматриваемой области пространства-времени. С помощью пронумерованных строительных блоков оно предлагает также практический способ демонстрации результатов подобных вычислений. Наконец, можно надеяться, что истинно геометрический способ формулировки общей теории относительности, предложенный Редже, когда-нибудь сделает содержание эйнштейновских уравнений поля (картановский «момент вращения», см. гл. 15) четким и ясным и раскроет геометрический смысл так называемого «геометродинамического полевого импульса» (исследование проблемы начальных значений, связанной с вариационной проблемой общей теории относительности в исчислении Редже, см. § 21.12).

43. СУПЕРПРОСТРАНСТВО: АРЕНА ДЛЯ ДИНАМИКИ ГЕОМЕТРИИ

Путешественник, нет путей,
Пути создаются ходьбою.

АНТОНИО МАКАДО [420]

Эта глава целиком относится к курсу 2. В качестве подготовительного материала для ее изучения необходима гл. 21 (формализм начальных значений) и полезна также гл. 42 (исчисление Редже). Эта глава не обязательна в качестве подготовительного материала для последующих глав, но она будет полезна при чтении гл. 44 (заглядывая в будущее).

§ 43.1. РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВОМ, СУПЕРПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ-ВРЕМЕНЕМ

Суперпространство является ареной действия геометродинамики

Суперпространство ([206], стр. 459) является ареной действия геометродинамики. Динамика эйнштейновской геометрии искривленного пространства протекает в суперпространстве, подобно тому как динамика частицы развертывается в пространстве-времени. В этой главе дается одна простая трактовка суперпространства; кроме того, дается некоторое представление об альтернативных трактовках, которые также находят свое применение. Здесь описывается классическая динамика геометрии в суперпространстве, выраженная через принцип Гамильтона — Якоби, приведенный в дополнениях 25.3 и 25.4. Ни одна из других трактовок механики неспособна на столь резкий скачок от классической динамики к квантовой. Таким образом, эта трактовка дает принцип [уравнение Эйнштейна — Гамильтона—Якоби (ЭГЯ)] распространения гребней волн в суперпространстве и позволяет найти то место, где гребни волн дают классический эквивалент конструктивной интерференции («образование огибающей»). Так находится путь эволюции 3-геометрии во времени, представленный в виде четкого тонкого «листа истории», который пересекает все суперпространство. Квантовый принцип заменяет детерминистическое рассмотрение размытым листом истории, обладающим

конечной толщиной. Вследствие этого в геометрии имеют место квантовые флуктуации, которые играют главную роль при размерах порядка планковской длины $L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ см и меньше. Настоящий обзор упрощается тем, что в нем рассматривается лишь динамика искривленного пустого пространства. Когда присутствуют источники и их необходимо учитывать, следует добавлять дополнительные члены; здесь мы ограничиваемся лишь перечислением некоторых работ по этому вопросу.

3-геометрия представляет собой динамический объект

Во всех труднейших исследованиях, проводившихся на протяжении полувека, чтобы добиться некоторого понимания динамики геометрии, как классической, так и квантовой, самый трудный пункт был одновременно и самым простым: объектом динамики является не пространство-время; этим объектом является пространство. Геометрическая конфигурация пространства меняется со временем. Но все же изменяется пространство, трехмерное пространство (см. дополнение 43.1).

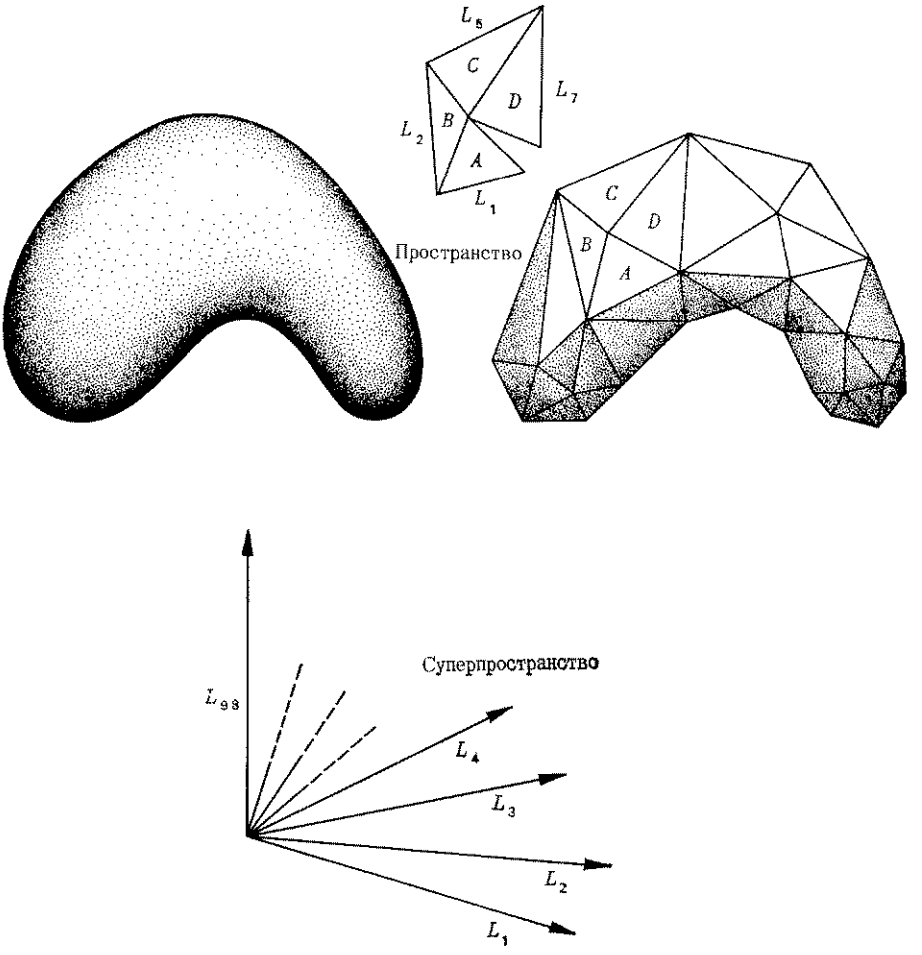
Пространство будет здесь рассматриваться как «замкнутое», или, на математическом языке, «компактное»; это обусловлено либо тем, что физика добавляет к эйнштейновским дифференциальным уравнениям второго порядка требование замкнутости как необходимое и подходящее граничное условие ([10, 421—424]; см. также § 21.12), либо тем, что это требование упрощает математический анализ вопроса, либо и той и другой причиной вместе.

Конечномерное «урезанное суперпространство»

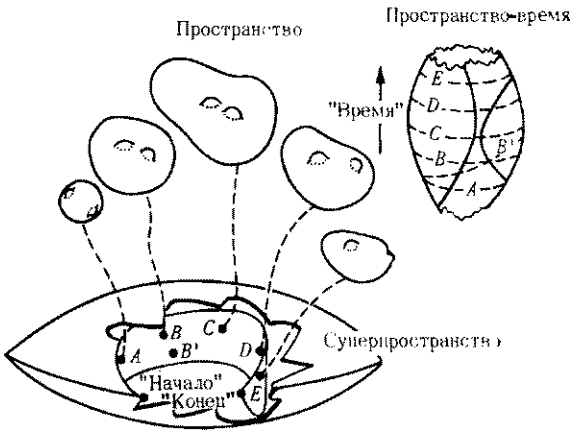
Гладкую, замкнутую 3-геометрию можно аппроксимировать скелетной 3-геометрией, построенной из тетраэдров, как схематически показано на фиг. 43.1 (см. гл. 42 об исчислении Редже). Выберем 98 длин ребер в этом примере, чтобы определить все характерные черты геометрии, и фиксируем эти 98 длин ребер, задав положение одной точки в пространстве 98 измерений. Это 98-мерное многообразие, это «урезанное суперпространство», переходит в суперпространство ([206], стр. 453, 459, 463, 495) в идеализированной ситуации, когда плотность покрытия трассирующими точками неограниченно увеличивается. Более детальные математические описания суперпространства даются в работах [425—428].

Пусть точка, представляющая геометрию, перемещается от одного положения к соседнему в урезанном или полном суперпространстве. Тогда все длины ребер меняются, и 3-геометрия, представленная на фиг. 43.1, движется будто живая. Нельзя дать лучшей иллюстрации того, что имеют в виду, когда говорят о «динамике пространства».

Наряду с классической теорией термин «3-геометрия» имеет смысл и в квантовой геометродинамике. То же самое относится и к суперпространству. Но с пространством-временем дело обстоит иначе. Зададим 3-геометрию и скорость ее изменения во времени. Обычно этого достаточно (см. гл. 21), чтобы установить всю временну́ю эволюцию геометрии, другими словами, этого достаточно, чтобы определить полную четырехмерную геометрию простран-



ФИГ. 43.1.
Суперпространство в приближении симплексов. Слева вверху — пространство (изображенное двумерным, но фактически являющееся трехмерным). Справа вверху — пространство, аппроксимированное симплексами. Можно получить сколь угодно хорошее приближение путем увеличения числа симплексов. Кривизна в типичной точке определяется недостающим углом. Этот угол полностью определяется заданием длин ребер (L_1, L_2, . . ., L_{98}) симплексов, которые сходятся в этой точке. Если всего имеется 98 длин ребер в представлении геометрии с помощью симплексов, то эта геометрия полностью задается одной точкой в 98-мерном пространстве (нижний рисунок —«суперпространство»).



ФИГ. 43.2.
Пространство, пространство-время и суперпространство. Слева вверху — пять примерных конфигураций A, B, C, D, E, достигаемых пространством в ходе расширения и сжатия, внизу — суперпространство и эти пять конфигураций, каждая из которых представлена точкой в суперпространстве. Справа вверху — пространство-время. Пространственноподобное сечение пространства-времени, такое, как A, дает мгновенную конфигурацию пространства. Нет необходимости ограничиваться однопараметрическим семейством сечений A, B, C, D, E пространства-времени. Выражение «многолистое время» является призывом не ограничиваться одним набором сечений; сечение B' является примером такой свободы выбора в действии. 3-геометрии B' и A, B, C, D, E, как и все другие 3-геометрии, полученные с использованием произвольных пространственноподобных сечений заданного классического пространства-времени, лежат на одном изогнутом листе истории, указанном на рисунке, который рассекает суперпространство. Иначе говоря, другое пространство-время, другое решение эйнштейновского уравнения поля, означает другой лист истории (не показанный на рисунке), рассекающий суперпространство.

ства-времени при условии, что рассмотрение проблемы проводится в рамках классической физики. Однако в реальном мире, подчиняющемся квантовой физике, нельзя задать одновременно и динамические переменные и их скорости изменения во времени. Это запрещено принципом дополнительности. Точно задав 3-геометрию в какой-то один момент, мы ничего не можем знать о скорости ее изменения со временем в этот момент. Другими словами, задав полевую геометродинамическую координату, мы не можем ничего знать о полевом геометродинамическом импульсе. Если мы определили внутреннюю 3-геометрию, то определить также внешнюю кривизну мы не можем.

Понятие пространства-времени несовместимо с квантовым принципом

Таким образом, принцип неопределенности не позволяет нам как-то предсказать или хотя бы придать разумный смысл «детерминированной классической истории пространства, эволюционирующего во времени». *Пространство-время невозможно предсказывать, следовательно, пространство-время не имеет смысла.*

вот что диктует квантовый принцип. Объект, являющийся центральным во всей классической общей теории относительности,— четырехмерная геометрия пространства-времени — просто не существует, если выйти за рамки классического приближения.

Эти рассуждения показывают, что концепции пространства-времени и времени не являются первичными понятиями в структуре физической теории. Эти концепции справедливы лишь в классическом приближении Однако они теряют смысл и применимость при условиях, когда эффекты квантовой геометродинамики становятся существенными. В этом случае мы должны отказаться от такого взгляда на природу, согласно которому каждое событие, прошлое, настоящее или будущее, занимает свое заранее предопределенное место в огромном каталоге, называемом «пространство-время», в котором эйнштейновский интервал от одного события к соседнему считается предвечно установленным. Нет пространства-времени, нет времени, нет ничего до, нет ничего после. Вопрос что случится «в следующий момент», лишен смысла.

Тот факт, что пространственно-временной подход неверен, не означает, что не существует верного способа описания динамики геометрии, совместимого с квантовым принципом. Суперпространство является ключом к *одному* из правильных способов описания динамики (фиг. 43.2).

Дополнение 43.1. СРАВНЕНИЕ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ И ДИНАМИКИ ЧАСТИЦЫ

Понятие	Динамика частицы	Геометродинамика
Динамический объект	Частица	Пространство
Что описывает мгновенную конфигурацию	x, t («событие»)	${}^{(3)}\mathcal{G}$ (3-геометрия)
Классическая история	$x = x\ (t)$	${}^{(4)}\mathcal{G}$ (4-геометрия)
Является ли история совокупностью конфигураций	Да. Любая точка на мировой линии дает мгновенную конфигурацию частицы	Да. Любое пространственно-подобное сечение в ${}^{(4)}\mathcal{G}$ дает мгновенную конфигурацию пространства
Арена, на которой развертывается динамика	Пространство-время (совокупность всех точек x, t)	Суперпространство (совокупность всех ${}^{(3)}\mathcal{G}$)

§ 43.2. ДИНАМИКА ГЕОМЕТРИИ, ОПИСАННАЯ НА ЯЗЫКЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВА ГЕОМЕТРИЙ

Задав пространство-время, можно построить соответствующий лист истории, пересекающий суперпространство. Обратно, задав лист истории, можно восстановить пространство-время. Обратимся к детской игрушке, широко известной под названием

Пространство-время является классическим листом истории, рассекающим суперпространство

«китайские коробочки». Открыв внешнюю коробку, мы обнаруживаем другую коробку, открыв эту вторую коробку, мы обнаруживаем внутри нее еще одну и так до тех пор, пока, наконец, на полу не будут разбросаны десятки таких коробок. Можно, наоборот, снова собрать коробки, вложив их друг в друга, чтобы восстановить первоначальную упаковку. Вложить геометрии $^{(3)}\mathcal{G}$ в $^{(4)}\mathcal{G}$ значительно труднее. Природа не позаботилась о монотонном расположении геометрий $^{(3)}\mathcal{G}$. Две динамически допустимые геометрии $^{(3)}\mathcal{G}$, взятые наугад, часто пересекаются друг с другом один раз или больше. Если «разобрать» геометрию $^{(4)}\mathcal{G}$, то мы получим гораздо больше», чем можно было ожидать, геометрий $^{(3)}\mathcal{G}$, «разбросанных на полу». Наоборот, если вновь сложить вместе все $^{(3)}\mathcal{G}$, лежащие на листе истории, мы получим структуру, обладающую жесткостью, чего нельзя было предвидеть заранее. Эта жесткость обусловливается бесконечным разнообразием наслоений и взаимных пересечений хорошо определенных геометрий $^{(3)}\mathcal{G}$.

Резюмируя, можно сказать: 1) классическая геометродинамика в принципе представляет собой метод, алгоритм, правило для вычисления и построения листа истории, который пересекает все суперпространство; 2) геометрии $^{(3)}\mathcal{G}$, которые лежат на этом листе истории, назовем ДА 3-геометриями, а несоизмеримо более многочисленные геометрии $^{(3)}\mathcal{G}$, которые на этом листе не лежат, назовем НЕТ 3-геометриями; 3) ДА $^{(3)}\mathcal{G}$ служат строительными блоками геометрии $^{(4)}\mathcal{G}$, являющейся классическим пространством-временем; 4) переплетению и взаимной связи этих строительных блоков и обязана своим существованием, своей размерностью и своей структурой геометрия $^{(4)}\mathcal{G}$; 5) каждая $^{(3)}\mathcal{G}$ обладает в этой структуре своим жестко фиксированным положением; 6) в этом смысле можно сказать, что «многопалое время» каждой 3-геометрии характеризуется самой взаимосвязанностью построенной структуры. Немного подробнее об этой концепции «3-геометрии как носителя информации о времени» говорят Байерлейн, Шарп и Уилер [429].

Как отличается эта концепция от обычного понимания пространства-времени! Согласно обычным представлениям, геометрия пространства-времени строится из элементарных объектов, или точек, называемых «событиями». Здесь же, напротив, первичной концепцией служит 3-геометрия *in abstracto*, и из нее уже выводится понятие события. Таким образом, 1) событие лежит на пересечении одной $^{(3)}\mathcal{G}$ с другой $^{(3)}\mathcal{G}$ и 2) оно обладает временной связью (раньше, позднее или одновременно) с некоторой другой геометрией $^{(3)}\mathcal{G}$, которая в свою очередь 3) возникает в результате взаимных пересечений всех остальных $^{(3)}\mathcal{G}$.

При переходе от классической теории к квантовой мы отказываемся от понятия пространства-времени, сохраняя его лишь в полуклассическом приближении. Следовательно, мы отказываемся и от любой непосредственной возможности определить

такое понятие, обычно считаемое элементарным, как «событие». Однако теория сама по себе здесь, как и везде [430], определяет естественным для нее образом принципиальные процедуры измерения тех величин, которые в принципе измеримы.

Квантовая теория нарушает четкое разграничение между ДА 3-геометриями и НЕТ 3-геометриями. Вместо ДА или НЕТ она приписывает каждой 3-геометрии амплитуду вероятности

Амплитуда вероятности для 3-геометрии

$$\psi = \psi\,({}^{(3)}\mathcal{G}). \tag{43.1}$$

Эта амплитуда вероятности имеет наибольшее значение вблизи классически предсказанного листа истории и резко спадает вне зоны конечной толщины, простирающейся на небольшое расстояние по обе стороны этого листа.

Если вместо физически оправданной функции амплитуды вероятности взять *типичное* соответствующее решение волнового уравнения, то следует ожидать, что мы не увидим ничего похожего на классическую геометродинамику. Типичная функция амплитуды вероятности распределена по всему суперпространству. Здесь нет ничего удивительного. Уже в классической теории мы должны рассматривать функцию Гамильтона — Якоби

$$S = S\,({}^{(3)}\mathcal{G}), \tag{43.2}$$

распределенную по всему суперпространству. Более того, эта «динамическая фазовая функция» классической геометродинамики сразу же дает фазу функции ψ, согласно формуле

$$\psi\,({}^{(3)}\mathcal{G}) = \left(\begin{array}{c}\text{медленно меняющаяся}\\ \text{амплитудная функция}\end{array}\right) e^{(i/\hbar)S({}^{(3)}\mathcal{G})}, \tag{43.3}$$

что указывает на нелокализованность обеих функций ψ и S.

Волновой пакет включает и классическую геометродинамику

Динамика впервые проявляется со всей отчетливостью, когда достаточно большое число подобных распределенных функций амплитуды вероятности накладываются друг на друга и образуют локализованный волновой пакет, как в элементарных примерах, приведенных в дополнениях 25.3 и 25.4; таким образом,

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots\,. \tag{43.4}$$

Там, где фазы отдельных волн совпадают, происходит конструктивная интерференция:

$$S_1\,({}^{(3)}\mathcal{G}) = S_2\,({}^{(3)}\mathcal{G}) = \ldots\,. \tag{43.5}$$

Это условие отличает ДА 3-геометрию от НЕТ 3-геометрии. Оно служит для построения листа истории в суперпространстве. Это ключ к динамике геометрии. Более того, в этом уравнении ни слова не говорится о квантовом принципе. Не удивительно поэтому, что уравнение конструктивной интерференции (43.5) кратчайшим путем от классической теории приводит к квантовой.

§ 43.3. УРАВНЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА — ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

Должны ли мы выписывать дифференциальное уравнение для функции Гамильтона—Якоби $S\,({}^{(3)}\mathcal{G})$, решать его и затем исследовать свойства полученного решения? Проще поступить наоборот: исследовать свойства решения и на основе результатов этого исследования выяснить, какому уравнению должна удовлетворять динамическая фаза, или действие S.

Принцип наименьшего действия Гильберта записывается в виде

$$I_{\text{Гильберт}} = (1/16\pi) \int {}^{(4)}R\,(-g)^{1/2}\,d^4x = \text{экстремум}. \qquad (43.6)$$

После выделения полных производных под знаком интеграла оставшаяся часть [см. (21.13) и (21.95)] принимает вид

$$(1/16\pi)\,I_{\text{ADM}} = I_{\text{истин}} = (1/16\pi) \int \Big\{ \pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t + \\ + Ng^{1/2}R + Ng^{-1/2}\Big[\frac{1}{2}\,(\text{Sp}\,\pi)^2 - \text{Sp}\,(\pi)^2\Big] + 2N_i\pi^{ij}{}_{|j}\Big\}\,d^4x. \qquad (43.7)$$

В (43.7), но не в (43.6) g обозначает детерминант трехмерного метрического тензора g_{ij}, а R — скалярный инвариант кривизны 3-геометрии; индекс ${}^{(3)}$ опущен для простоты. Интеграл берется 1) от пространственноподобной гиперповерхности, на которой 3-геометрия задается метрикой $g'_{ij}\,(x, y, z)$, 2) до пространственноподобной гиперповерхности, на которой 3-геометрия задается метрикой $g''_{ij}\,(x, y, z)$. Какая бы метрика ни выбиралась в области пространства-времени между этими гиперповерхностями, ее следует теперь рассматривать подобранной так, чтобы экстремизировать интеграл. Поэтому значение интеграла I_{ADM} превращается в функционал, зависящий только от метрик на этих двух гиперповерхностях.

Далее, фиксируя метрику $g'_{ij}\,(x, y, z)$ на более ранней гиперповерхности, слегка или даже не слегка, изменим метрику на последующей гиперповерхности. Разрешим новую вариационную задачу и получим новое значение I_{ADM}. Следуя по этому пути дальше, для каждой новой g''_{ij} получим новое значение I_{ADM}. Назовем определенный таким образом функционал от метрики I_{ADM} «главной функцией Гамильтона», или «действием», или «длиной динамического пути» [1]) $S\,(g_{ij}\,(x, y, z))$, «истории геометрии», связывающей две заданные 3-геометрии. Здесь и далее два штриха в g''_{ij} опускаются, чтобы упростить обозначения. Из других разделов механики известно, что величина $S\,(g_{ij})$, определенная таким образом, если она существует, хотя и является частным

---

[1]) На самом деле $S \equiv S_{\text{ADM}} \equiv 16\pi S_{\text{истин}} = 16\pi$ (истинная длина динамического пути).

решением, тем не менее *всегда* является решением уравнения Гамильтона—Якоби. Якоби мог искать более общие решения, но Гамильтон уже нашел одно!

Чтобы (43.7) было экстремально по отношению к вариациям отклонения N и к компонентам сдвига N_i, необходимо (см. гл. 21), чтобы коэффициенты при этих четырех величинах обращались в нуль, так что

$$g^{-1/2}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\pi})^2-\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\pi}^2\right]+g^{1/2}R=0 \tag{43.8}$$

и

$$\pi^{ij}{}_{|j}=0. \tag{43.9}$$

В выражении для экстремального значения действия остается лишь первый член:

$$S(g(x,y,z))=I_{\text{ADM, экстр}}=$$
$$=\int_{g'_{ij}}^{g_{ij}}\{\pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t\}\,d^3x. \tag{43.10}$$

Поэтому эффект малого изменения δg_{ij} в 3-метрике на верхнем пределе интегрирования легко записать следующим образом:

$$\delta S=\int \pi^{ij}(x,y,z,)\,\delta g_{ij}(x,y,z)\,d^3x. \tag{43.11}$$

Язык «функциональных производных» (см., например, [431]) позволяет выразить это не через интеграл, а через производную:

Геометродинамический импульс как скорость изменения длины динамического пути по отношению к 3-геометрии на конечной гиперповерхности

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}=\pi^{ij}. \tag{43.12}$$

«Полевые импульсы» имеют простой смысл: они дают скорость изменения действия по отношению к непрерывному бесконечному множеству «полевых координат» $g_{ij}(x,y,z)$. (Здесь x, y, z, так же как i, j, служат лишь в качестве индексов.)

Действие зависит от 3-геометрии, а не от отдельных метрических коэффициентов

Хотя кажется, что функция S зависит от всех шести метрических коэффициентов g_{ij} в отдельности, фактически она зависит лишь от той комбинации коэффициентов g_{ij}, которая тесно связана с 3-геометрией. Чтобы убедиться в этом, выразим конкретную 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ на одной локальной координатной области через один набор координат x^p с помощью одного набора метрических коэффициентов g_{pq}. Выразим вновь ту же 3-геометрию через координаты $\bar{x}^p$, смещенные на малую величину ξ^p:

$$\bar{x}^p=x^p-\xi^p. \tag{43.13}$$

Чтобы сохранилась та же 3-геометрия, т. е. чтобы расстояние ds от одной не зависящей от координат точки до другой осталось без изменения, метрические коэффициенты должны меняться следующим образом:

$$\bar{g}_{pq}=g_{pq}+\xi_{p|q}+\xi_{q|p}. \tag{43.14}$$

Пусть фазовая функция S (или в квантовой механике амплитуда вероятности ψ) рассматривается как функционал от метрических коэффициентов $g_{11}(x)$, $g_{12}(x)$, . . ., $g_{33}(x)$. Вариации $\delta g_{pq}(x)$ этих коэффициентов меняют фазовую функцию Гамильтона—Якоби и амплитуду вероятности на величины

$$\delta S = \int (\delta S/\delta g_{pq})\, \delta g_{pq}\, d^3x, \qquad \delta\psi = \int (\delta\psi/\delta_{pq})\, \delta g_{pq}\, d^3x \tag{43.15}$$

в согласии с обычным определением функциональной производной. Поэтому вариации координат приводят к вариациям длины динамического пути или фазы S

$$\delta S = \int (\delta S/\delta g_{pq})(\xi_{p|q} + \xi_{q|p})\, d^3x = \\ = -2 \int (\delta S/\delta g_{pq})_{|q} \xi_p d^3x. \tag{43.16}$$

Эта вариация должна обращаться в нуль, если S зависит только от 3-геометрии и не зависит от координат, в которых выражается 3-геометрия; кроме того, она должна обращаться в нуль для произвольного выбора ξ_p. Из этого условия находим

$$\left(\frac{\delta S}{\delta g_{pq}}\right)_{|q} = 0. \tag{43.17}$$

Аналогично находим три уравнения для самой волновой функции ψ, отличной от ее фазы $S/\hbar$; получаем

$$\left(\frac{\delta \psi}{\delta g_{pq}}\right)_{|q} = 0. \tag{43.18}$$

Но, согласно (43.12), (43.17) совпадает с (43.9). В этом смысле (43.9) просто подтверждает справедливость того, что мы и так уже знаем: классическая функция Гамильтона—Якоби S (так же как функции амплитуды вероятности ψ в квантовой теории) зависит от 3-геометрии, но не зависит от отдельных метрических коэффициентов и от выбора координат.

Все динамическое содержание геометродинамики можно выразить одним остающимся уравнением (43.8), которое принимает вид

$$g^{-1/2}\left[\frac{1}{2} g_{pq}g_{rs} - g_{pr}g_{qs}\right] \frac{\delta S}{\delta g_{pq}} \frac{\delta S}{\delta g_{rs}} + g^{1/2}R = 0. \tag{43.19}$$

Закон распространения гребней волн в суперпространстве

Это и есть уравнение Эйнштейна—Гамильтона—Якоби, которое в явном виде впервые ввел в литературу Перес [432], исходя из собственных ранних работ и работ других авторов по гамильтоновой формулировке геометродинамики. Это уравнение описывает распространение в суперпространстве фронтов постоянного S («гребней волн»).

Тот факт, что это единственное уравнение ЭГЯ (43.19) содержит столько же информации, сколько все десять компонент эйнштейновского уравнения поля, был продемонстрирован Герлахом [433]. Центральным пунктом в этом исследовании служит принцип конструктивной интерференции, и для правильного его рассмотрения необходимо прежде всего понятие полностью параметризованного решения уравнения ЭГЯ.

Для полного анализа проблемы движения частиц в двумерном пространстве, рассмотренной методом Гамильтона — Якоби в дополнениях 25.3 и 25.4, требуется решение, содержащее два параметра, отличных и независимых друг от друга, энергия на единицу массы $\tilde{E}$ и момент импульса на единицу массы $\tilde{L}$; в этом случае

$$S(r,\ \theta,\ t;\ \tilde{E},\ \tilde{L}) = -\tilde{E}t + \tilde{L}\theta + \\ + \int^{r} [\tilde{E}^2 - (1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}\,\frac{dr}{(1-2M/r)} + \delta(\tilde{E},\ \tilde{L}). \quad (43.20)$$

Здесь аддитивная фаза $\delta(\tilde{E},\ \tilde{L})$ необходима в том случае, если нам нужно создать такие условия, чтобы частица достигала заданного значения r в определенный момент времени t и при определенном значении θ. Рассмотрим суперпозицию четырех амплитуд вероятности, как в (43.4), обладающих динамическими фазами S, заданными с помощью (43.20) и параметрами, которые принимают следующие четыре набора значений: $(\tilde{E},\ \tilde{L})$, $(\tilde{E}+\Delta\tilde{E},\ \tilde{L})$, $(\tilde{E},\ \tilde{L}+\Delta\tilde{L})$ и $(\tilde{E}+\Delta\tilde{E},\ \tilde{L}+\Delta\tilde{L})$. Принцип конструктивной интерференции приводит к условиям

$$\partial S/\partial\tilde{E} = 0, \qquad \partial S/\partial\tilde{L} = 0. \quad (43.21)$$

Точки пространства-времени $(r,\ \theta,\ t)$, удовлетворяющие этим условиям, назовем ДА-точками; они лежат на мировой линии. А точки, не удовлетворяющие этим условиям, назовем НЕТ-точками.

Желаемое решение уравнения ЭГЯ (43.19) содержит не два параметра (плюс аддитивная фаза δ, зависящая от этих двух параметров), а бесконечное множество таких параметров и даже континуум параметров. Поэтому параметры не следует обозначать как $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots;\ \beta_1,\ \beta_2\ \ldots$ (параметры с дискретным индексом); следует писать

$$\alpha(u,\ v,\ w) \text{ и } \beta(u,\ v,\ w)$$

(два параметра, «помеченные» тремя индексами u, v, w, принимающими непрерывный ряд значений). Что если мы случайно пропустим один из бесконечного числа параметров? Каким образом можно надеяться узнать, обладает ли на самом деле полнотой предполагаемое полное решение уравнения ЭГЯ? К счастью, Герлах дает процедуру проверки параметров на полноту.

Условие конструктивной интерференции дает классический «лист истории», или пространство-время

Убедившись в полноте, Герлах идет дальше и показывает, что «лист истории в суперпространстве», или совокупность 3-геометрий, удовлетворяющих условиям конструктивной интерференции

$$\frac{\delta S\left({}^{(3)}\mathcal{G};\ \alpha(u,\ v,\ w),\ \beta(u,\ v,\ w)\right)}{\delta\alpha}=0,$$
$$\frac{\delta S\left({}^{(3)}\mathcal{G};\ \alpha(u,\ v,\ w),\ \beta(u,\ v,\ w)\right)}{\delta\beta}=0, \tag{43.22}$$

совпадает с листом истории (или эквивалентной 4-геометрией), который дается десятью компонентами эйнштейновского закона геометродинамики.

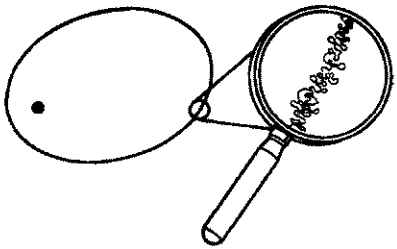
От уравнения Гамильтона — Якоби в области элементарной механики один короткий шаг до соответствующего уравнения Шредингера; аналогично обстоит дело и в геометродинамике. Самый крупный вклад в исследование физического смысла и следствий этого «уравнения Эйнштейна — Шредингера» принадлежит Брайсу де Витту [425, 426]. Одним из самых интересных следствий является существование сохраняющегося тока в суперпространстве, аналогичного сохраняющемуся току

$$j_\mu=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\right),$$

с которым мы сталкиваемся в волновом уравнении Клейна — Гордона для частиц с нулевым спином.

Неприятная особенность этого волнового уравнения Эйнштейна — Шредингера состоит в том, что оно содержит вторую производную; поэтому мы должны определять как амплитуду вероятности, так и обычную производную амплитуды вероятности на подходящей «супергиперповерхности» в суперпространстве, чтобы иметь возможность предсказать эволюцию этой функции состояния во всем суперпространстве. Один из способов избежать такой ситуации, которая представляет собой по крайней мере неудобство, а возможно, и реальную трудность, был предложен Лейтвайлером [435]: наложить естественное граничное условие, которое уменьшает число независимых решений от значения, характерного для уравнения второго порядка, до значения, характерного для уравнения первого порядка. Другой выход состоит в том, чтобы сформулировать динамику совершенно иначе, как это было предложено Кухаржем (см. гл. 21); при этом получается уравнение первого порядка по переменной, являющейся аналогом времени.

Изучение квантовой геометродинамики упрощается, если считать большую часть степеней свободы замороженными путем наложения высокой степени симметрии. Тогда остаются одна, две или три степени свободы (см. гл. 30 о космологии перемешанного мира) или даже бесконечное число степеней свободы, и мы приходим к вполне разрешимым задачам квантовой механики [436, 437].



ФИГ. 43.3.
Символическое представление движения электрона в атоме водорода под действием флуктуаций электрического поля в вакууме («вакуумные», или «нулевые» флуктуации, или флуктуации «основного состояния»). Электрическое поле, связанное с флуктуацией $E_x(t) = \int E_x(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$, складывается со статическим электрическим полем, создаваемым самим ядром. Дополнительное поле в наиболее простом приближении приводит к смещению $\Delta x = \int (e/m\omega^2)\, E_x e^{-i\omega t}\, d\omega$. Среднее отклонение обращается в нуль, но среднее квадратичное отклонение $\langle(\Delta x)^2\rangle$ в нуль не обращается. Вследствие этого электрон испытывает действие эффективного атомного потенциала, который отличается от ожидаемого значения $V(x, y, z)$ на величину

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{1}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle \nabla^2 V(x, y, z).$$

Основная часть наблюдаемого сдвига Лэмба — Резерфорда энергии уровней $\Delta E = \langle \Delta V(x, y, z)\rangle$ обусловлена наложением усредненного возмущения на невозмущенное движение. Наоборот, наблюдение ожидаемого сдвига доказывает реальность существования вакуумных флуктуаций.

§ 43.4. ФЛУКТУАЦИИ ГЕОМЕТРИИ

Ни одно из замечательных достижений физики после второй мировой войны не является столь впечатляющим, как предсказание и подтверждение влияния вакуумных флуктуаций электромагнитного поля на движение электрона в атоме водорода (фиг. 43.3). Благодаря этому открытию уже невозможно пройти мимо эффектов, связанных с подобными флуктуациями, во всех других областях физики, не исключая и геометрию самого пространства-времени.

От нулевых флуктуаций единичного осциллятора к флуктуациям электромагнитного поля, а от них к геометродинамическим флуктуациям — вот естественный порядок продвижения.

Флуктуации в случае осциллятора и в случае электромагнитного поля

Гармонический осциллятор в своем основном состоянии имеет амплитуду вероятности

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \qquad (43.23)$$

сместиться на расстояние x от своего естественного классического положения равновесия. В этом смысле о нем можно сказать, что

он «резонирует» или «флуктуирует» между положениями в пространстве, которые охватывают область протяженностью

$$\Delta x \sim (\hbar/m\omega)^{1/2}. \tag{43.24}$$

Электромагнитное поле можно представить себе как совокупность бесконечного числа независимых «полевых осцилляторов» с амплитудами ξ_1, ξ_2, ... Когда максвелловское поле находится в состоянии с наименьшей энергией, амплитуда вероятности для первого осциллятора иметь амплитуду ξ_1 и одновременно для второго осциллятора иметь амплитуду ξ_2, для третьего — ξ_3 и т. д. является произведением функций вида (43.23) по одной для каждого осциллятора. Если подходящим образом нормировать амплитуды для каждого осциллятора, то результирующее бесконечное произведение принимает вид

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots) = N \exp[-(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots)]. \tag{43.25}$$

Это выражение дает амплитуду вероятности ψ для конфигурации $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ магнитного поля, которая описывается фурье-коэффициентами ξ_1, ξ_2, . . . Однако при желании можно отказаться от какого-либо упоминания этих фурье-коэффициентов и записать (43.25) непосредственно через конфигурацию магнитного поля [139]:

$$\psi(\boldsymbol{B}(x, y, z)) = \mathscr{N} \exp\left(-\int\int \frac{\boldsymbol{B}(x_1)\,\boldsymbol{B}(x_2)}{16\pi^3\hbar c r_{12}^2}\, d^3x_1\, d^3x_2\right). \tag{43.26}$$

Теперь мы уже не говорим об определенном магнитном поле; вместо этого мы говорим о вероятности той или иной конфигурации магнитного поля, даже в условиях, когда электромагнитное поле находится в основном состоянии, как это имеет место здесь. (См. [438], где приводится аналогичное выражение для функционала, соответствующего «основному состоянию» линеаризованного гравитационного поля.)

При этих условиях наиболее вероятной является конфигурация $\boldsymbol{B}(x, y, z) = 0$. Для сравнения рассмотрим конфигурацию, когда магнитное поле равно нулю всюду, за исключением области размером L. Принимая, что, как всегда, выполняется условие $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, допустим, что поле по порядку величины равно ΔB. Амплитуда вероятности этой конфигурации будет отличаться от амплитуды для нулевой конфигурации на фактор $\exp(-I)$. Здесь величина I, входящая в экспоненту, по порядку величины равна $(\Delta B)^2 L^4/\hbar c$. Конфигурации, для которых I велико по сравнению с единицей, имеют пренебрежимо малую вероятность. Конфигурации, для которых I мало по сравнению с единицей, имеют практически ту же вероятность, что и нулевая конфигурация. В этом смысле можно сказать, что флуктуации магнитного поля в области размером L по порядку величины равны

$$\Delta B \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{L^2}. \tag{43.27}$$

Другими словами, поле «резонирует» между двумя конфигурациями с диапазоном изменения конфигураций, даваемым формулой (43.27). Более того, чем меньше рассматриваемая область пространства, тем больше значения магнитного поля, обладающие заметной вероятностью.

Еще один знакомый способ рассмотрения флуктуаций электромагнитного поля позволяет выяснить вопросы, относящиеся к геометродинамике. Рассмотрим измерительный прибор, одинаково реагирующий на магнитное поле во всех точках области размера L. Спрашивается, как будут воздействовать на прибор электромагнитные возмущения разных длин волн. Возмущения малой по сравнению с L длины волны создают силы, по-разному действующие на различные части прибора, которые почти полностью компенсируют друг друга. Наоборот, возмущение большой длины волны λ создает силы, имеющие всюду одно и то же направление, но эти силы слишком малы, чтобы произвести заметное действие. Поэтому поле, определяемое уравнением

$$\left(\begin{array}{c}\text{энергия электромагнитной}\\ \text{волны длины } \lambda \text{ в области}\\ \text{объема } \lambda^3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c}\text{энергии одного кванта}\\ \text{длины волны } \lambda\end{array}\right),$$

или

$$B^2\lambda^3 \sim \frac{\hbar c}{\lambda},$$

или

$$B \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{\lambda^2}, \tag{43.28}$$

очень мало, если λ велико по сравнению с размером области L. Наибольший эффект возникает в том случае, когда длина волны возмущения сравнима с L. Такой способ рассуждений приводит от (43.28) непосредственно к обычной формуле для флуктуаций (43.27).

Флуктуации геометрии играют главную роль при планковских расстояниях

Аналогичные рассуждения применимы в геометродинамике. Квантовые флуктуации геометрии накладываются на крупномасштабную медленно меняющуюся кривизну, предсказываемую классической детерминистской общей теорией относительности. Классическая кривизна и квантовые флуктуации сосуществуют друг с другом. В соответствии с этим в некоторой области размера L, где обычные значения метрических коэффициентов в локально лоренцевой системе равны $-1, 1, 1, 1$, возникают флуктуации этих метрических коэффициентов

$$\Delta g \sim \frac{L^*}{L}, \tag{43.29}$$

флуктуации первых производных g_{tk}

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta g}{L} \sim \frac{L^*}{L^2} \tag{43.30}$$

и флуктуации кривизны пространства

$$\Delta R \sim \frac{\Delta g}{L^2} \sim \frac{L^*}{L^3}. \tag{43.31}$$

Здесь величина

$$L^* = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см} \tag{43.32}$$

есть так называемая планковская длина [439].

Рассмотрим порядки величин флуктуаций. Согласно классической эйнштейновской теории, кривизна пространства внутри Земли и вблизи ее поверхности по порядку величины равна

$$R \sim \frac{1}{2}\left(\frac{G}{c^2}\right)\rho \sim (0{,}7 \cdot 10^{-28} \text{ см/г})\,(5 \text{ г/см}^3) \sim 4 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-2}. \tag{43.33}$$

Эта величина имеет прямой физический смысл. Она определяет «компоненту гравитационного поля, создающую приливное воздействие», которая может быть измерена, например, в свободно падающем лифте или на космическом корабле, свободно движущемся по орбите вокруг Земли. В то же время квантовые флуктуации кривизны пространства, даже если наблюдать их в очень малой области размера 1 см, составляют всего

$$\Delta R \sim 10^{-33} \text{ см}^{-2}. \tag{43.34}$$

Таким образом, квантовыми флуктуациями геометрии пространства при обычных условиях можно полностью пренебречь.

Даже в атомной и ядерной физике флуктуации метрики, равные соответственно

$$\begin{aligned} \Delta g &\sim \frac{10^{-33} \text{ см}}{10^{-8} \text{ см}} \sim 10^{-25}, \\ \Delta g &\sim \frac{10^{-33} \text{ см}}{10^{-13} \text{ см}} \sim 10^{-20}, \end{aligned} \tag{43.35}$$

столь малы, что представление о физическом пространстве как о плоском лоренцевом пространственно-временном многообразии является вполне оправданным.

Тем не менее, если верить в справедливость квантового принципа и теории Эйнштейна, квантовых флуктуаций геометрии невозможно избежать. Они существуют наряду с эволюцией геометродинамики, предсказываемой классической общей теорией относительности. Эти флуктуации как бы расширяют узкую просеку, прорезаемую классической историей геометродинамики в суперпространстве. Другими словами, геометрия не является детерминированной, несмотря на кажущуюся ее детерминированность для обычных масштабов наблюдений. Вместо этого в субмикроскопических масштабах геометрия «резонирует» между различными конфигурациями. Эта терминология означает не более и не менее как следующее: 1. Каждая конфигурация ${}^{(3)}\mathcal{G}$ имеет свою амплитуду вероятности $\psi = \psi({}^{(3)}\mathcal{G})$. 2. Эти амплитуды

вероятностей сравнимы по величине для целого диапазона 3-геометрий, ограничиваемого значениями (43.29), определяющими ширину полосы по каждую сторону от классической «просеки» в суперпространстве. 3. Этот диапазон 3-геометрий при субмикроскопических масштабах столь разнообразен, что его нельзя свести к одной какой-либо 4-геометрии или к одной классической истории геометродинамики. 4. Только в том случае, если мы не замечаем этих мелкомасштабных флуктуаций ($\sim 10^{-33}$ см) и изучаем лишь крупномасштабные свойства 3-геометрий, они сводятся к одному пространственно-временному многообразию, удовлетворяющему классическим уравнениям поля.

Эти мелкомасштабные флуктуации говорят о том, что повсюду в пространстве все время происходит нечто похожее на гравитационный коллапс, что гравитационный коллапс по существу постоянно совершается, но постоянно совершается и обратный процесс, что кроме гравитационного коллапса Вселенной и звезды необходимо рассматривать также третий и, поскольку для него непрерывно идет обратный процесс, наиболее важный уровень гравитационного коллапса при планковском масштабе расстояний.

УПРАЖНЕНИЯ

43.1. Принцип действия для свободной частицы в нерелятивистской механике

Принимая в качестве принципа действия $I = \int L\,dt =$ экстремум при заданных x', t' и x'', t'' на двух пределах интегрирования и при $L = {}^1/_2 m\,(dx/dt)^2$, найдите 1) экстремизирующую историю $x = x(t)$ и 2) динамическую длину пути, или действие $S(x'', t''; x', t') = I_{\text{экстрем}}$ в зависимости от конечных точек. Кроме того, 3) запишите уравнение Гамильтона — Якоби для этой задачи и 4) убедитесь, что $S(x, t; x', t')$ удовлетворяет этому уравнению. Наконец, представив себе, что уравнение Гамильтона — Якоби неизвестно, 5) выведите его из уже известных свойств самой функции S.

43.2. Действие для гармонического осциллятора

Кинетическая энергия есть ${}^1/_2 m\,(dx/dt)^2$, а потенциальная ${}^1/_2 m\omega^2 x^2$. Проведите исследование пунктов 1—4 предыдущего упражнения. Частное решение:

$$S = \frac{m\omega}{2}\,\frac{(x^2 + x'^2)\cos\omega(t-t') - 2xx'}{\sin\omega(t-t')}.$$

Убедитесь, что $\partial S/\partial x$ дает импульс, а $-\partial S/\partial t$ — энергию.

УПРАЖНЕНИЯ

43.3. Квантовый пропагатор для гармонического осциллятора

Покажите, что амплитуда вероятности для перехода простого гармонического осциллятора из состояния x', t' в состояние x'', t'' есть

$$\langle x'',\ t'',\ x',\ t'\rangle = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega\,(t''-t')}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \exp \frac{im\omega\,[(x''^2+x'^2)\cos\omega\,(t''-t') - 2x''x']}{2\hbar \sin\omega\,(t''-t')}$$

и что в случае свободной частицы амплитуда сводится к

$$\langle x'',\ t'',\ x',\ t'\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,(t''-t')}\right)^{1/2} \exp\frac{im\,(x''-x')^2}{2\hbar\,(t''-t')}\,.$$

Обратите внимание, что все волновые функции гармонического осциллятора можно получить из этого решения с помощью формулы

$$\langle x'',\ t'';\ x',\ t'\rangle = \sum_n u_n(x'')\,u_n^*(x')\exp iE_n\,(t'-t'')/\hbar.$$

43.4. Квантовый пропагатор для свободного электромагнитного поля

В плоском пространстве-времени заданы на пространственноподобной гиперповерхности $t = t'$ магнитное поле $B'(x, y, z)$ с равной нулю дивергенцией и на пространственноподобной гиперповерхности $t = t''$ магнитное поле $B'(x, y, z)$ с равной нулю дивергенцией. С помощью фурье-анализа (сводящего эту задачу к предыдущей) или другим способом найдите амплитуду вероятности для перехода из состояния с B' в момент времени t' в состояние с B'' в момент времени t''.

43.5. Формулировка максвелловской электродинамики с помощью уравнения Гамильтона — Якоби

Считайте четыре компоненты A_μ электромагнитного 4-потенциала независимыми переменными; выделите из них пространственную часть A_i и скалярный потенциал ϕ. 1. Получите из принципа действия (в плоском пространстве)

$$I = (1/8\pi)\int (E^2 - B^2)\,d^4x,$$

отделяя соответствующую дивергенцию, выражение, качественно похожее по своему характеру на (43.7). 2. Покажите, что подходящей величиной, которую следует фиксировать на начальной и конечной пространственноподобных гиперповерхностях, на самом деле является не A_i, а магнитное поле, определяемое как $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. 3. Выведите уравнение Гамильтона — Якоби для динамической фазы, или действия $S(\boldsymbol{B}, \mathscr{S})$, в зависимости от выбора гиперповерхности $\mathscr{S}$ и выбора магнитного поля $\boldsymbol{B}$ на этой гиперповерхности:

$$-\frac{\delta S}{\delta \Omega} = \frac{1}{8\pi} \boldsymbol{B}^2 + \frac{(4\pi)^2}{8\pi} \left(\frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{A}} \right)^2 .$$

Величина, стоящая слева, есть «пузырьково-временная производная» Томонаги ([440], см. также дополнение 21.1).

2

44. ЗА ГРАНИЦЕЙ ВРЕМЕНИ

Небеса плывут над тобой,
Взор твой вечною славой
своею пленяя,
А ты все равно не отводишь
глаз от Земли.

ДАНТЕ

Мир стоит перед нами как великая вечная загадка.

ЭЙНШТЕЙН [441]

Эта глава целиком относится к курсу 2. Для подготовки к ней не требуется какой-либо предыдущий материал курса 2, но гл. 43 окажется полезной.

§ 44.1. ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС КАК ВЕЛИЧАЙШИЙ КРИЗИС В ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Вселенная начинает свое существование из сверхплотного и сверхгорячего состояния, расширяется до максимальных размеров, а затем вновь сжимается и коллапсирует — никогда не делалось предсказания, внушающего столь благоговейное чувство. Оно противоречит здравому смыслу. Эйнштейн сам не мог поверить в свой вывод. Только наблюдения Хаббла заставили его и научную общественность отказаться от концепции вечного существования Вселенной.

В последующих работах [31, 193, 443, 444] обобщается этот вывод. Замкнутая модель Вселенной, подчиняющаяся геометродинамике Эйнштейна и нигде не обладающая отрицательной плотностью массы-энергии, неизбежно приводит к сингулярности. Плотность массы-энергии с неизбежностью неограниченно растет. Вычислительная машина, рассчитывающая шаг за шагом динамическую эволюцию геометрии, доходит до такой точки, дальше которой она не может продолжать счет. Образно говоря, из машины начинает «валить дым». Тем не менее поступательное движение физики, безусловно, продолжается хотя бы по той

Марчоновская лекция, прочитанная Дж. А. Уилером в университете Ньюкасла-апон-Тайн 18 мая 1971 г., и Наффилдовская лекция, прочитанная в Кембриджском университете 19 июля 1971 г., основывались на материале, изложенном в этой главе.

причине, что физика по определению есть то, что существует вечно, несмотря ни на какие призрачные изменения во внешних проявлениях реальности.

Несомненно дверь однажды распахнется, и перед нами откроется сверкающий механизм движения мира во всем своем великолепии и простоте. В преддверии этого дня никакое открытие не вселяет столько надежд, как парадокс гравитационного коллапса. Но почему парадокс? Потому что уравнение Эйнштейна гласит: «Это конец», а физика утверждает, что «конца не существует». Почему же тогда надежды? Потому что среди всех примеров расследования загадочной проблемы физика не может предложить ничего более обещающего, чем парадокс.

Парадокс коллапса: физика остановилась, но физика должна двигаться дальше

Ни один из предшествующих периодов развития физики не приводил к большему парадоксу, чем 1911 год (дополнение 44.1). Резерфорд только что был вынужден сделать вывод, что вещество состоит из локализованных положительных и отрицательных зарядов. Согласно теории, построенное таким образом вещество должно испытать электрический коллапс за время 10^{-17} с. Из наблюдений столь же ясно следовало, что вещество стабильно. Никто не отнесся к этому парадоксу с большей серьезностью, чем Бор. Никто не работал со всей энергией, на какую только способен человек, вновь и вновь обращаясь к главной загадке. Никто не совмещал в себе дерзкую смелость с консерватизмом, никто не обладал более глубоким чувством гармонии в физике. Если же обратиться к литературе второго десятилетия нашего века по вопросу о строении атома, то возникает впечатление какофонии в противоположность гармонии. 1. Изменить закон Кулона, описывающий взаимодействие между электрическими зарядами? 2. Отказаться от принципа, что ускоренно движущийся заряд должен излучать? Мало что удерживало от этих шагов, а также от еще более нелепых отказов от надежно установленных законов. Бор, напротив, строго придерживался этих двух принципов. В то же время он настаивал на важности третьего принципа, твердо установленного Планком в совершенно иной области физики, — квантового принципа. Этим ключом Бор открыл дверь в мир атома.

Кризис 1911 г., связанный с электрическим коллапсом

Как ни велик был кризис в физике, разразившийся в 1911 г., сегодня гравитационный коллапс поставил физику перед лицом еще более грандиозного кризиса. Стоит вопрос не только о судьбе вещества, но и о судьбе самой Вселенной. Динамика коллапса, или точнее обратного ему процесса расширения, подтверждается не только теорией, но также и наблюдениями, причем таких наблюдений много, и они проведены астрономами, обладающими непревзойденными талантом и добросовестностью. Более того, коллапс характерен не только для крупномасштабной динамики Вселенной. Согласно предсказаниям теории, белые карлики, или нейтронные звезды с массой больше критической, должны испытывать гравитационный коллапс с образованием черных дыр (гл. 32 и 33). Ожи-

дается, что достаточно большое число звезд, сближающихся в достаточной степени в центре ядра галактики, коллапсирует с образованием черной дыры, масса которой на много порядков величины больше массы Солнца. Ведутся активные поиски доказательств существования черной дыры в нашей Галактике (дополнение 33.3). Согласно предсказаниям, процесс образования черной дыры представляет собой экспериментальную модель гравитационного коллапса самой Вселенной с одним отличием. Коллапс с образованием черной дыры предоставляет наблюдателю на выбор две возможности: 1) наблюдать за коллапсом с безопасного расстояния, не получая в этом случае никаких сведений о том, что происходит внутри горизонта, или 2) последовать внутрь за падающим веществом и увидеть заключительные стадии коллапса не только самого вещества, но и геометрии за его пределами, когда происходит сжатие до бесконечно большой плотности; при этом он должен будет заплатить за увиденное своей жизнью. В случае гравитационного коллапса замкнутой модели Вселенной такого выбора у наблюдателя нет. Его судьба предрешена. То же самое относится и к судьбе вещества и элементарных частиц, сжимаемых до бесконечно больших плотностей. Трудно увязать друг с другом такие основные моменты кризиса, связанного с коллапсом, как динамика самого большого объекта — пространства и самого малого объекта — элементарной частицы, а также установить, каково в том и другом случае начало динамики.

Дополнение 44.1. СРАВНЕНИЕ И ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ КОЛЛАПСА ВСЕЛЕННОЙ, ПРЕДСКАЗЫВАЕМОГО КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ, И КЛАССИЧЕСКИ ПРЕДСКАЗАННОГО КОЛЛАПСА АТОМА

Система	Атом (1911 г.)	Вселенная (70-е годы)
Динамический объект	Система электронов	Геометрия пространства
Сущность коллапса, предсказываемого классической теорией	Электрон, движущийся по направлению к точечному центру притяжения, за конечное время приобретает бесконечную энергию	Не только вещество, но и само пространство за конечное собственное время переходит в состояние с бесконечной плотностью
Один отвергнутый «выход из положения»	Отказ от закона Кулона для силы	Отказ от эйнштейновского уравнения поля
Другой «легкий выход из положения», который должен быть отвергнут	«Ускоренно движущийся заряд не обязательно излучает»	«Вещество не может быть сжато сверх некоторой определенной плотности, каким бы сильным ни было давление»
Как последнее предложение нарушает принцип причинности	Кулоновское поле точечного заряда не может изменяться с бесконечной скоростью на бесконечно больших расстояниях при внезапных изменениях скорости заряда	Скорость звука не может превышать скорость света; давление не может превышать плотность массы-энергии

Продолжение

Система	Атом (1911 г.)	Вселенная (70-е годы)
Основное новое соображение, вводимое при признании квантового принципа в качестве всеобщего организующего принципа физики	Принцип неопределенности: близость к центру притяжения приводит к тому, что кинетическая энергия нулевых колебаний превосходит потенциальную энергию; вследствие этого существует наинизшее квантовое состояние, в котором система не может излучать, поскольку нет состояния с более низкой энергией, в которое можно было бы перейти	Принцип неопределенности: распространение волнового пакета в суперпространстве не приводит детерминированным образом к единственной конфигурации геометрии пространства; вместо этого имеется распределение вероятностей различных исходов, причем каждый исход описывает вселенную разного размера с различными наборами масс элементарных частиц, различным числом частиц и различными промежутками времени, необходимыми для ее расширения и сжатия

§ 44.2. ОЦЕНКА ТЕОРИИ, ПРЕДСКАЗЫВАЮЩЕЙ КОЛЛАПС

Всякий, кто размышляет над парадоксом, связанным с коллапсом («коллапс — это конец физики», «физика не может кончаться с коллапсом»), не может не задать вопроса: «Каковы пределы применимости эйнштейновской геометрической теории гравитации?» Аналогичный вопрос напрашивался сам собой и во время кризиса 1911 г. Закон Кулона для силы, действующей между двумя зарядами, был проверен на расстояниях порядка метров и миллиметров, но где была гарантия, что он выполняется вплоть до атомных размеров порядка 10^{-8} см? Правда, в конце концов оказалось, что он выполняется не только на атомном уровне и на уровне ядра 10^{-13} см, но даже вплоть до $5 \cdot 10^{-15}$ см [445—447] — поразительный пример того, что Вигнер [448] называет «непостижимой эффективностью математики в естественных науках».

Ни одна теория не напоминает так максвелловскую электродинамику по своей простоте, красоте и широте охвата, как геометродинамика Эйнштейна. Немногие принципы физики установлены столь же твердо, как те, на которых она основывается: локальная справедливость специальной теории относительности (гл. 2—7), принцип эквивалентности (гл. 16), закон сохранения импульса и энергии (гл. 5, 15 и 16) и преобладающая роль во всей физике уравнений второго порядка (гл. 17). Эти принципы вместе с требованиями отсутствия «инородных полей» (например, скалярного поля Дикке) и «первичной геометрии» (§ 17.6) приводят к выводу, что геометрия пространства-времени должна быть римановой, а законы геометродинамики — эйнштейновскими.

Теория гравитации, проверенная в бою

Утверждение, что геометрия риманова, означает, что интервал между любыми двумя близкими событиями C и D где-либо в пространстве-времени, выраженный через интервал AB между двумя близкими эталонными событиями в совершенно другой точке пространства-времени, имеет значение CD/AB, не зависящее от пути сравнения этих двух интервалов (гл. 13 и дополнение 16.4). Таких путей тысячи. Вследствие этого предсказания теория Эйнштейна оказывается под угрозой опровержения тысячами способов (дополнение 16.4).

Геометродинамика предоставляет возможность своего опровержения и другими способами. Геометрия не допускает какого-либо произвола в выводах о динамике частиц и полей (гл. 20). Теория делает определенные предсказания о равновесных конфигурациях и пульсациях компактных звезд (гл. 23—26). Она дает формулы (гл. 27—29) для замедления расширения Вселенной, для плотности массы-энергии и для степени фокусировки за счет кривизны пространства, проверка которых уже недалека. Геометродинамика предсказывает гравитационный коллапс, существование черных дыр и разнообразные физические явления, связанные с этими объектами (гл. 31—34). Она предсказывает гравитационные волны (гл. 35—37). В соответствующем приближении она включает в себя все хорошо проверенные предсказания ньютоновской теории тяготения, касающиеся динамики Солнечной системы, и, кроме того, предсказывает поддающиеся проверке постньютоновские поправки, в том числе несколько эффектов, уже проверенных наблюдениями (гл. 38—40).

В геометрической теории гравитации Эйнштейна до сих пор не найдено никаких противоречий. Ни одно из наблюдений, якобы не согласующихся с этой теорией, не выдержало проверки временем. Никогда не выдвигалось ни одного приемлемого описания физических явлений, сравнимого с эйнштейновской теорией по простоте и широте охвата.

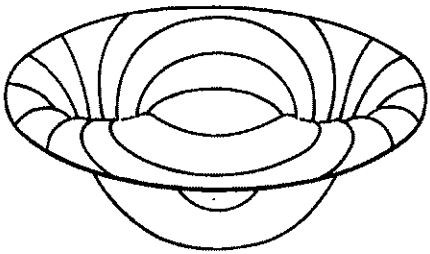
Прежде чем вернуться к главному вопросу о пределах применимости общей теории относительности и их роли в проблеме гравитационного коллапса, продолжим эту оценку теории немного далее. Что дала геометродинамика Эйнштейна для понимания физики?

Новый взгляд на природу, следующий из эйнштейновской геометродинамики

Во-первых, она свергла пространство-время с пьедестала предопределенного совершенства, вознесшегося высоко над полями сражений вещества и энергии, и сделала его новым динамическим понятием, активно участвующим в этих сражениях.

Во-вторых, связав энергию и импульс с кривизной пространства-времени, теория Эйнштейна позволила понять, что закон сохранения импульса и энергии является автоматическим следствием геометрического тождества, согласно которому граница границы есть нуль (гл. 15 и 17).

В-третьих, она обосновала взгляд на гравитацию как на проявление кривизны геометрии пространства-времени, а не как



ФИГ. 44.1.
Электрический заряд, рассматриваемый как электрические силовые линии, захваченные топологией многосвязного пространства (историю этой концепции см. в работе, приведенной в списке литературы (№ 36) книги [451]). Горловина или ручка представляется как связующее звено между двумя совершенно различными областями одного пространства. Одно из отверстий горловины, с точки зрения наблюдателя, обладающего малой разрешающей способностью, выглядит местом расположения электрического заряда. Вне этой области 3-пространства он обнаруживает силовые линии, выходящие во всех направлениях в телесном угле 4π. Он может окружить этот заряд границей, определить поток через эту границу, некорректно применить теорему Гаусса и «доказать», что «внутри границы» расположен заряд. Но это не граница. Если кого-то, образно говоря, заключить внутрь этой границы, то он может войти в отверстие горловины, пройти через перешеек, выйти через другое отверстие и вернуться по окружающему пространству, чтобы взглянуть на свою «тюрьму» снаружи. Силовые линии нигде не кончаются. Уравнения Максвелла нигде не нарушаются. Нельзя указать пальцем такого места, чтобы можно было сказать: «Здесь расположен некоторый заряд». Это классическое представление об электрическом заряде не имеет непосредственного отношения к квантованному электрическому заряду. Существует свобода выбора потока через горловину и конкретного вида связи между одним зарядом и другим, что совершенно не свойственно зарядам в физике элементарных частиц. Для наглядности число измерений пространства уменьшено с трех до двух. Третье измерение, отсчитываемое от поверхности, не имеет физического смысла — оно лишь дает дополнительное измерение, в которое погружена поверхность для более наглядного представления. (Подробнее см. [139, 464].)

на что-то чуждое и «физическое», погруженное в пространство-время.

В-четвертых, общая теория относительности укрепила ту точку зрения, что «физика локальна», т. е. что изучение физики становится простым, если она связывает величины в заданном событии с величинами в непосредственно прилегающих событиях.

В-пятых, в соответствии с квантовым принципом она признает, что пространство-время и время — понятия, справедливые лишь в классическом приближении, что истинная арена действия эйнштейновской динамики геометрии — не пространство-время, а суперпространство, причем эта динамика описывается, согласно квантовому принципу, как распространение амплитуды вероятности через суперпространство (гл. 43). Вследствие этого геометрия пространства подвержена квантовым флуктуациям, влияние

которых на метрические коэффициенты порядка

$$\delta g \sim \frac{\text{планковская длина } L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см}}{\text{линейный размер изучаемой области}}.$$

В-шестых, классическая геометродинамика Эйнштейна не отдает предпочтения эвклидовой топологии, так же как и эвклидовой геометрии. Многосвязная топология дает естественное описание электрического заряда как электрических силовых линий, вплетенных в топологию многосвязного пространства (фиг. 44.1). При любом другом описании электрических явлений постулируется либо нарушение максвелловских уравнений поля для вакуума в том месте, где локализован заряд, либо существование некоторого инородного «физического» электрического субстрата, погруженного в пространство, либо и то и другое сразу. Никому до сих пор не удалось найти способ описания электрических явлений, лишенный неприятных особенностей, за исключением предположения, что квантовые флуктуации геометрии пространства на малых расстояниях столь велики, что флуктуирует даже топология, образуя «горловины» и захватывая силовые линии. Эти флуктуации не следует представлять себе связанными с частицами и обладающими масштабом расстояний, соответствующим физике элементарных частиц ($\sim 10^{-13}$ см); их надо представлять себе заполняющими все пространство («пенообразная структура геометрии») и характеризуемыми по порядку величины планковской длиной ($\sim 10^{-33}$ см). Таким образом, заставляет обратить на себя внимание третий тип гравитационного коллапса — коллапс, который непрерывно и всюду совершается, но вместе с тем совершается процесс, обратный коллапсу; несомненно, он является ключом к проблеме конечной стадии коллапса на уровне звезды и на уровне Вселенной (дополнение 44.2).

Электрический заряд как силовые линии, захваченные топологией пространства

Дополнение 44.2. ТРИ УРОВНЯ ГРАВИТАЦИОННОГО КОЛЛАПСА: 1) ВСЕЛЕННАЯ, 2) ЧЕРНАЯ ДЫРА, 3) ФЛУКТУАЦИИ ПОРЯДКА ПЛАНКОВСКОЙ ДЛИНЫ

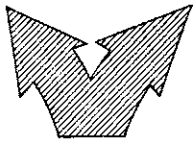
Сжатие и коллапс Вселенной представляют собой своего рода зеркальное отображение «большого взрыва», в пользу которого мы уже имеем так много доказательств.

Коллапс вещества с образованием черной дыры наиболее естествен на двух различных уровнях: а) коллапс плотного ядра отдельной звезды типа белого карлика (когда масса этого ядра превосходит критическую массу $\sim 1 M_\odot$ или $2 M_\odot$ и нейтронная звезда уже не может служить возможной стабильной конечной конфигурацией коллапса) и б) последовательное слияние звезд в галактическом ядре с образованием черной дыры с массой до $10^6 M_\odot$ или даже $10^9 M_\odot$.

В обоих случаях ни одно из принципиальных свойств падающего в черную дыру вещества не представляет такого интереса, как возможность выбора, которой располагает наблюдатель (что символически изображено здесь разветвляющейся стрелкой). Он может последовать за падающим в дыру веществом, и в этом случае

он увидит заключительные стадии коллапса, но лишь ценой своей жизни. Или же он может остаться в безопасности снаружи, и в таком случае даже по прошествии бесконечно большого времени он увидит лишь начальную стадию коллапса, причем падающее вещество, по его наблюдениям, будет все медленней подползать к горизонту.

На заключительных стадиях коллапса замкнутой модели Вселенной все имеющиеся в ней черные дыры захватываются общим сжатием, приближаются



друг к другу и объединяются в одно целое. Никто не может наблюдать это событие, находясь в безопасности снаружи: любой наблюдатель неизбежно будет сам вовлечен в происходящий процесс.

Коллапс при планковском масштабе длин происходит всюду и непрерывно в виде квантовых флуктуаций геометрии и, по-видимому, топологии пространства. В этом смысле коллапс постоянно протекает, но вместе с тем постоянно идет обратный процесс, моделируя тем самым такой же процесс в самой Вселенной, что можно кратко охарактеризовать термином «воспроизводство Вселенной» (см. текст).

§ 44.3. ФЛУКТУАЦИИ ВАКУУМА: ИХ ПРЕОБЛАДАНИЕ И КОНЕЧНОЕ ДОМИНИРОВАНИЕ

Если теория Эйнштейна проливает свет на всю остальную физику, то и физика также проливает свет на геометродинамику. Пожалуй, самый центральный пункт состоит в следующем: пустое пространство вовсе не является пустым — оно представляет собой вместилище самых бурных физических процессов. Электромагнитное поле флуктуирует (гл. 43). Там непрерывно рождаются и аннигилируют виртуальные пары электронов и позитронов, пары мю-мезонов, пары барионов и пары других частиц. Все эти флуктуации существуют наряду с квантовыми флуктуациями геометрии и топологии пространства. Являются ли они дополнением к упомянутым геометродинамическим нулевым возмущениям или они в некотором пока недостаточно ясном смысле представляют собой просто их проявление?

Построено ли вещество из геометрии?

Сформулируем вопрос иначе. Вспомним, что Клиффорд, вдохновленный идеями Римана, выступая перед Кембриджским философским обществом 21 февраля 1870 г. с докладом «О пространственной теории материи» ([449], стр. 244 и 322, и [450], стр. 21), сказал: «Я считаю: 1) Что малые участки пространства по своей природе аналогичны небольшим холмикам на поверхности, которая в среднем является плоской, так что обычные законы геометрии

в них неприменимы. 2) Что это свойство искривленности или деформированности непрерывно переходит от одного участка пространства к другому наподобие волны. 3) Что это изменение кривизны пространства и есть явление, которое мы называем *движением материи* — как весомой, так и эфирной. 4) Что в физическом мире не происходит ничего, кроме этого изменения, подчиняющегося (возможно) закону непрерывности». Зададим вопрос: Есть ли смысл говорить, что частица образована геометрией? Или, переводя этот вопрос на современный язык: Является ли частица геометродинамическим экситоном? Из чего еще можно построить частицу, кроме самой геометрии? И что еще, кроме квантового принципа, может обеспечить дискретность подобного объекта?

Богатство физики вакуума

Пространственная теория материи Клиффорда — Эйнштейна не была забыта в недавнем прошлом. «В конце концов, — писал один из авторов этой книги десять лет назад [139], — предвидение Римана, Клиффорда и Эйнштейна о чисто геометрической основе физики в настоящее время получило высшее развитие и является как никогда многообещающим, затрагивая самые глубокие проблемы. Квант действия привносит в эту геометродинамику новые свойства, самое впечатляющее из которых — присутствие всюду в пространстве флуктуаций типа горловин. Если имеется какое-либо соответствие между этой виртуальной пенообразной структурой и физическим вакуумом, как это следует из квантовой электродинамики, то, по-видимому, нельзя избежать отождествления этих горловин с «голыми электронами». Согласно всем имеющимся данным, электроны и другие частицы, фигурирующие в экспериментальной физике, совершенно непохожи на эти «голые электроны». Для таких частиц геометродинамика предлагает модель коллективных возбуждений виртуального пенообразного вакуума, аналогичных различным типам фононов или экситонов в твердом теле».

«Огромное различие между ядерными плотностями $\sim 10^{14}$ г/см^3 и плотностью энергии флуктуаций в вакууме $\sim 10^{94}$ г/см^3 свидетельствует о том, что элементарные частицы в процентном отношении представляют собой пренебрежимо малое изменение в локально бурных условиях, характеризующих вакуум. [Частица (10^{14} г/см^3) для физики вакуума (10^{94} г/см^3) так же малосущественна, как облако (10^{-6} г/см^3) для физики атмосферы (10^{-3} г/см^3).] Другими словами, элементарные частицы не могут быть основной отправной точкой при описании природы, а представляют собой поправки первого порядка к физике вакуума. Этот вакуум, это состояние нулевого порядка с огромнейшими плотностями виртуальных фотонов, виртуальных пар положительно и отрицательно заряженных частиц и виртуальных горловин, должен быть правильно описан, прежде чем мы получим фундаментальную отправную точку для соответствующего теоретического анализа возмущений».

«Эти выводы о плотности энергии вакуума, о его сложном топологическом характере и о разнообразии физических процессов, протекающих в вакууме, не имеют явных противоречий с тем, что говорит о вакууме квантовая электродинамика. Напротив, выводы из анализа для «малых расстояний» (10^{-33} см), хотя и отрывочные, и из анализа для «больших расстояний» (10^{-11} см), по-видимому, подкрепляют друг друга наиболее естественным образом».

«Самый очевидный недостаток геометродинамической модели в современном ее виде состоит в том, что в *ней нет естественного места для частиц спина* $^1/_2$ *вообще и для нейтрино в частности*».

Попытки найти естественное место для частиц спина $^1/_2$ в обычной эйнштейновской геометродинамике (дополнение 44.3) терпят крах, поскольку в рамках классической дифференциальной геометрии нет естественного способа ввести *изменение* связности.

Ядро урана, испытывающее деление, вначале имеет одну топологию, а после завершения этого процесса — другую. Ядро совершает этот переход непрерывным образом вопреки классической дифференциальной геометрии.

В геометродинамике нет места изменению топологии, поэтому обратимся к «предгеометрии»

Считается, что существуют два типа адвокатов. Один говорит клиенту, чего не следует делать. Другой выслушивает, что клиенту нужно сделать, и говорит ему, как это сделать. От первого «адвоката»— классической дифференциальной геометрии — клиент уходит разочарованным, продолжая искать естественный способ описания квантовых флуктуаций связности пространства. Только на этом пути он может надеяться описать электрический заряд как электрические силовые линии, захваченные топологией пространства. Только следуя этим путем, он может надеяться, что удастся понять и исследовать заключительные стадии гравитационного коллапса. Размышляя над своими проблемами, он подходит к конторе второго «адвоката» с табличкой «предгеометрия» на двери. Полный надежд, он стучится и входит. Что представляет собой предгеометрия и что она может сказать? Рожденная из комбинации надежды и необходимости, философии и физики, математики и логики, предгеометрия приступит к рассказу, не законченному в этой книге, но полному событий.

Дополнение 44.3. ТРУДНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОПЫТКАМИ НАЙТИ ЕСТЕСТВЕННОЕ МЕСТО ДЛЯ ЧАСТИЦ СПИНА 1/2 В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

«Невозможно» [139] «принять какое-либо описание элементарных частиц, в котором нет места для частиц спина $^1/_2$. В чем тогда заключается чисто геометрическое описание, которое можно предложить для объяснения спина $^1/_2$ вообще? Более конкретный и более важный вопрос: какое место в квантовой геометродинамике отводится нейтрино — единственному объекту с полуцелым спином, который по существу является чисто полевым объектом в том смысле, что он обладает нулевой

массой покоя и движется со скоростью света? Четкого или удовлетворительного ответа на этот вопрос в настоящее время мы не знаем. Пока ответ не будет получен, *чистую геометродинамику следует считать недостаточной в качестве фундамента для физики элементарных частиц*».

В более поздней публикации [451] вновь затронут этот вопрос, причем отмечается, что «для исследований в области квантовой геометродинамики открываются новые горизонты. Центральное место занимает новая концепция пространства, резонирующего между двумя пенообразными структурами. В случае многосвязности пространства в субмикроскопических масштабах ни одна отдельная черта природы не выступает столь ярко, как электрический заряд. Столь же впечатляющим является преобладание в мире элементарных частиц спина $^1/_2$».

Повторяя утверждение, что «невозможно принять какое-либо описание элементарных частиц, в котором нет места для спина $^1/_2$», статья вносит в обсуждение новую ноту: «К счастью, на свет появилась концепция спинового многообразия, главным образом благодаря работам Милнора [180, 452—462]. Эта концепция выдвигает новую *интересную интерпретацию спинорного поля* в контексте резонирующей микротопологии в квантовой геометродинамике *как неклассической двузначности* (установившийся термин, введенный Паули для обозначения спина; см., например, [463]), *связанной с амплитудой вероятности для тождественных в остальном 3-геометрий, обладающих разными «спиновыми структурами»*. Более конкретно: «Нельзя полностью охарактеризовать замкнутое ориентируемое физическое трехмерное многообразие, задавая лишь его топологию, дифференциальную структуру и метрику. Мы должны сказать, какой спиновой структурой обладает это многообразие». [На 3-геометрии с топологией сферы можно уложить непрерывное поле триад (триада состоит из трех ортонормированных векторов). Любое другое непрерывное поле триад может быть деформировано в первое поле путем непрерывной последовательности малых изменений. Мы говорим, что 3-сфера допускает лишь одну «спиновую структуру» — термин, способный в принципе привести к путанице, который с успехом можно заменить названием «триадная структура». Напротив, 3-сфера с n узлами (ручками или горловинами) допускает 2^n «спиновых структур» (непрерывных полей триад), неэквивалентных друг другу, какая бы непрерывная последовательность малых изменений ни действовала на них, и различаемых каким-нибудь удобным способом с помощью n «описывающих величин» $w_1, w_2, \ldots, w_k \ldots, w_n$.] В квантовой геометродинамике естественно ожидать «различных амплитуд вероятности для 3-геометрии с описывающей величиной $w_k = +1$ и для тождественной в остальном 3-геометрии с $w_k = -1$. Означает ли это обстоятельство, что квантовая геометродинамика обеспечивает все необходимое для описания полей со спином $^1/_2$ вообще и поля нейтрино в частности?.. Это единственный путь, открывшийся в рамках эйнштейновской общей теории относительности и планковского квантового принципа. Правильный ли это путь? Трудно назвать более важный вопрос с точки зрения представления, согласно которому «нет ничего, кроме геометрии».

Почему бы не разобраться в этих концепциях, не сопоставить их с опытом и не сравнить с тем, что известно о поведении полей со спином $^1/_2$? Такая попытка наталкивается на одну главную трудность. При таком подходе из физических соображений предполагается и требуется, чтобы топология 3-геометрии могла свободно изменяться при переходе от одной связности к другой. Напротив, классическая дифференциальная топология гласит: «Однажды заданная топология всегда

остается той же топологией». Попытаемся поставить такой вопрос: «Если образуется новая ручка и число описывающих величин увеличивается на одну, то какое граничное условие в суперпространстве связывает амплитуду вероятности ψ для 3-геометрии с первоначальной топологией и амплитуды вероятности ψ_+ и ψ_- для двух спиновых структур новой топологии? «Классическая дифференциальная геометрия не только не помогает ответить на этот вопрос, но даже запрещает его задавать. Другими словами, упомянутая выше попытка не может быть предпринята за неимением естественного математического способа описания требуемого изменения топологии. Таким образом, следует раз и навсегда отказаться от идеи, что 3-геометрия может быть «магическим строительным материалом Вселенной». В отличие от этого предгеометрию (см. текст), которая далека от того, чтобы обладать какой-либо фиксированной топологией, следует рассматривать как не имеющую даже размерности.

Дополнение 44.4. «ГОРСТЬ ПЫЛИ» — РАННЯЯ ПОПЫТКА СФОРМУЛИРОВАТЬ КОНЦЕПЦИЮ ПРЕДГЕОМЕТРИИ [36]

«Какая воображаемая цепочка рассуждений могла бы привести к четырехмерности или вообще к какой-нибудь другой размерности, исходя из самых простых соображений? В случае атомов желтый цвет дублета в спектре натрия выводится из рассмотрения квантовой динамики системы, ни одна часть которой не обладает ничем, хотя бы отдаленно напоминающим атрибут цвета. По аналогии с этим вывод четырехмерности пространства-времени вряд ли может *исходить* из понятия размерности».

«Напомним понятие борелева множества. Борелево множество, попросту говоря, есть совокупность точек («горсть пыли»), которые еще не собраны в многообразие какой-то конкретной размерности... Вспоминая универсальную силу квантового принципа, можно представить себе амплитуды вероятности для точек борелева множества быть собраными в совокупности точек той или иной размерности... Если точки собраны в пятимерную решетку, то на заданное число точек должны быть наложены дополнительные условия (какая точка находится вблизи какой другой точки) по сравнению со случаем, когда точки образуют двумерную структуру. Таким образом, можно думать, что каждая размерность обладает намного бо́льшим статистическим весом, чем следующая более *высокая* размерность. С другой стороны, можно предположить, что для многообразий размерности один, два и три геометрия слишком примитивна, чтобы дать что-нибудь интересное. Так эйнштейновские уравнения поля, примененные к многообразиям столь низкой размерности, требуют, чтобы пространство было плоским; только если размерность достигает четырех, возникают действительно интересные возможности. Нельзя ли в таком случае считать, что размерность четыре является уникальной: она в одно и то же время достаточно высока, чтобы дать какую-то реальную физику, и при этом достаточно низка, чтобы иметь большой статистический вес?

«Мы еще сделаем достаточно большое число ошибок в этой области мышления, прежде чем нам удастся исследовать подобные представления с какой-либо степенью обоснованности».

Рассмотрим ручку в геометрии. Пусть она истончается в точку на половине своей длины. Другими словами, пусть ручка распадается на два изогнутых рога, которые касаются друг друга в точке. Пусть эти два рога отделяются друг от друга и становятся короче. В этом процессе две точки, которые когда-то были в непосредственной близости друг от друга, разъединяются, становясь все дальше друг от друга. «Однако внезапное изменение имеет место лишь в классической теории; в квантовой теории есть функция амплитуды вероятности, которая спадает в запрещенной классической теорией области. Другими словами, имеется некоторая остаточная связь между точками, которые кажутся очень далекими друг от друга (путь между ними от одной «вершины» вниз по одному рогу, затем через большое пространство, к которому эти рога прикреплены, и, наконец, вверх вдоль другого рога к другой «вершине»). Но точки, которые оказались предметом обсуждения, ничем не выделены. Поэтому, казалось бы, должна быть связь... между *любыми* двумя точками. При таких условиях понятие ближайшего соседа, по-видимому, должно терять смысл. Таким образом, исчезает аппарат, с помощью которого мы могли бы исследовать размерность».

§ 44.4. ПРЕДГЕОМЕТРИЯ, А НЕ ГЕОМЕТРИЯ, — МАГИЧЕСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В раннем обзоре (дополнение 44.4) был поставлен вопрос о том, можно ли построить геометрию с помощью квантового принципа из основных элементов, которые сами по себе не обладают какой-либо определенной размерностью.

В центре внимания дискуссии, которая проходила в 1964 г., была «размерность без размерности». Однако основными причинами, заставляющими размышлять о предгеометрии, были и остаются две характерные особенности природы: спин $^1/_2$ и заряд, говорящие сами за себя во весь голос в любой области физики элементарных частиц.

Взгляд на гравитацию как на «метрическую упругость пространства»

Новая перспектива, открывающаяся перед предгеометрией, связана с новым подходом к оценке общей теории относительности. «Геометродинамика не так важна и не так проста, как кажется. Откажемся от нее как от отправной точки в поисках простоты, лежащей в основе всего. Заглянем глубже в физику элементарных частиц». Таков общий смысл интересных соображений, выдвинутых в работе [465] и кратко изложенных в дополнении 17.2 под заголовком: «Гравитация как метрическая упругость пространства». В двух словах это означает, что гравитация для физики элементарных частиц — то же, что упругость — для атомной физики. Энергия упругой деформации есть не что иное, как энергия, запасенная в связях между атомами при деформации. Энергия, затрачиваемая на искривление пространства, есть не что иное, как возмущение вакуумной энергии полей и частиц, вызываемое этой кривизной. Энергия, необходимая для деформации, в одном случае определяется двумя константами упругости, а в другом —

одной константой упругости (ньютоновской постоянной тяготения), но в обоих случаях константы — не результат смелого росчерка пера на чистом листе бумаги, а следствие совместного действия большого числа отдельных сложных эффектов.

Такой взгляд на гравитацию [465] встречает поддержку, поскольку мы сегодня знаем то, чего не знали в 1915 г., а именно каким сложным физическим объектом является вакуум. Во времена Эйнштейна в течение одного десятилетия перешли от идеального, как будто ниспосланного самим богом совершенства лоренцева плоского пространства-времени к искривленному пространству-времени. Потребовалась смелость, чтобы этому миру геометрии, всегда стоявшему так высоко над физикой, приписать хотя бы одну физическую константу. Долгое время вакуум представлялся лишенным структуры, как лист стекла, выходящий из прокатного стана. С открытием позитрона [466] была приподнята завеса над той «жизнью», которую можно отогреть в «пустом» пространстве. Открытие каждой новой частицы или нового вида излучения вносило новый вклад в уже известное богатство вакуума. Покрытие шоссейной дороги выглядит гладким, но стоит бульдозеру провести лишь одну борозду через дорогу, чтобы выявить всю сложность ее устройства.

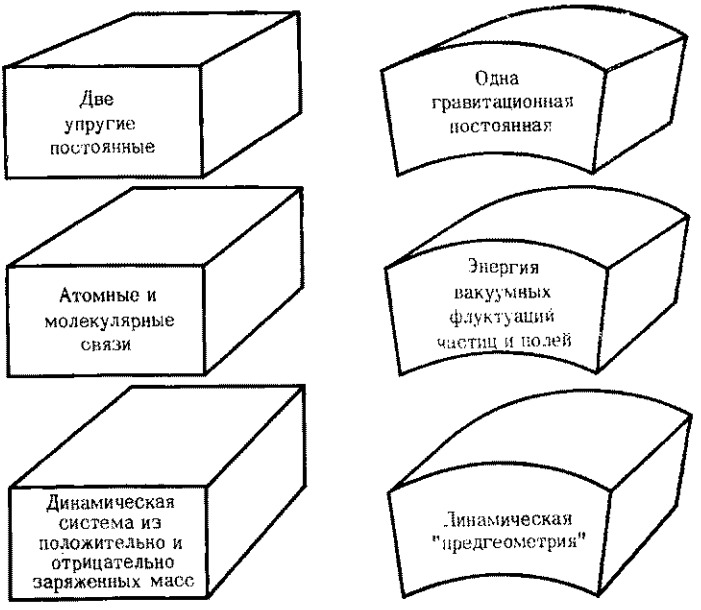
Слоистость пространства

Считать, что частицы построены из геометрии пространства, что они представляют собой «геометродинамические экситоны»? Если следовать работе [465], никакая модель не находится в меньшей гармонии с природой, кроме, может быть, атома, построенного из упругости! Упругость не объясняет атомы — атомы объясняют упругость. Если аналогично этому частицы определяют константу в геометродинамическом законе Эйнштейна [465], то разумно ли считать, что геометродинамический закон объясняет частицы?

Продолжим сравнение геометрии и упругости (фиг. 44.2). В твердом теле существуют сотни различных связей, и все они дают вклад в константы упругости; некоторые из них обусловлены силами Ван-дер-Ваальса, некоторые представляют собой ионные связи, некоторые — униполярные связи; они очень различны по силе, но в основе всех их лежит нечто фантастически простое — система положительно и отрицательно заряженных масс, движущихся в соответствии с законами квантовой механики. Было бы неправильно при каждом усложнении химии и физики множества этих связей соответствующим образом усложнять принцип, да в этом и нет нужды. Переходя на более глубокий уровень исследования, чем анализ сил связи, мы попадаем в мир света, отличающийся простотой и единством.

Сравнение с обычной упругостью

Сравним с геометрией. Вакуум оживлен нулевой активностью различных полей и десятков различных частиц, и все они, согласно рассматриваемой точке зрения, вносят вклад в ньютоновскую «постоянную упругости метрики» G. Некоторые из них действуют друг на друга силами слабого взаимодействия, другие — электромагнитными силами, третьи — за счет сильного взаимодей-



ФИГ. 44.2.
Упругость и геометродинамика, рассматриваемые на трех уровнях анализа. Сто лет изучения упругости не обнаружили существования молекул, и сто лет изучения молекулярной химии не обнаружили уравнения Шредингера. Раскрытие загадок природы представлено на этом рисунке движением вверх, а не вниз.

ствия. Силы этих взаимодействий весьма различны. Но не должна ли природа всех этих частиц и взаимодействий представлять собой нечто фантастически простое? И не должно ли это нечто, эта «предгеометрия», так же далеко отстоять от геометрии, как квантовая механика электрона от упругости?

Если когда-либо думали, что общая теория относительности является путеводной нитью к открытию предгеометрии, то ничто не могло бы показаться столь обескураживающим, как это сравнение с более старой областью физики. Никто не помышлял о том, чтобы изучать законы упругости с целью открыть принципы квантовой механики. Точно так же никто не стал бы исследовать механическое упрочнение металла, чтобы узнать что-то об атомной физике. Понимание приходило не в таком порядке:

механическое упрочнение (1 см) → дислокации (10^{-4} см) → → атомы (10^{-8} см),

а в прямо противоположном:

атомы (10^{-8} см) → дислокации (10^{-4} см) → → механическое упрочнение (1 см).

Чтобы понять дислокации, мы должны располагать знанием об атомах, а чтобы разобраться в механическом упрочнении, мы должны знать о дислокациях. Не столь же безнадежно идти от «упругости геометрии» к пониманию физики частиц и от физики частиц — к открытию предгеометрии? Не должен ли путь продвижения быть прямо противоположным? И не является ли причиной появившегося уныния кажущаяся потеря путеводной нити, которую мы испытываем, отказываясь от геометродинамики — и не только от геометродинамики, но и от самой геометрии,— как костыля, на который опираются, медленно продвигаясь вперед? И все же вероятность того, что такой взгляд на природу правилен, столь велика, что мы должны отнестись к нему серьезно и исследовать вытекающие из него следствия. В настоящее время, как никогда ранее, имеется побудительный мотив для исследования предгеометрии.

§ 44.5. ПРЕДГЕОМЕТРИЯ КАК ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

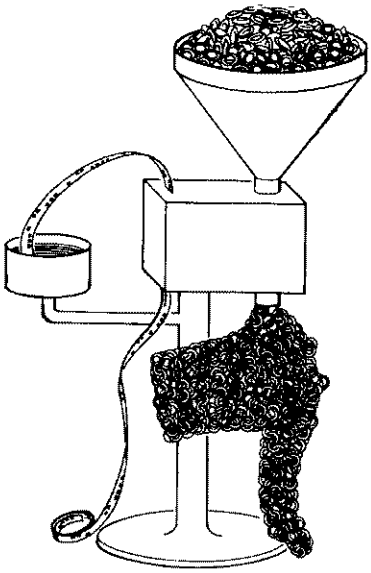
Оклеим пол комнаты белой бумагой и разделим его на квадраты со стороной в один метр. Опустимся на пол и запишем в первый квадрат систему уравнений, которые, как мы думаем, описывают физику Вселенной. Продумаем целую ночь. На следующий день улучшенную систему уравнений поместим во второй квадрат. Пригласим наших самых уважаемых коллег, чтобы они внесли свой вклад в другие квадраты. В конце этих трудов, исписав весь пол, мы окажемся у дверей. Встанем на ноги, взглянем на все эти уравнения, одни из которых, возможно, более многообещающие, чем другие, поднимем руку в повелительном жесте и отдадим приказание: «Летите!» Ни одно из этих уравнений не обретет крыльев, не поднимется в воздух и не полетит. Тем не менее Вселенная «летит».

Поиски основного принципа предгеометрии

Какой-то принцип, единственно верный и единственно простой, когда он нам станет известен, будет также столь очевидным, что не останется сомнений: Вселенная устроена таким-то и таким-то образом и должна быть так устроена, а иначе и быть не может. Но как открыть этот принцип? Если безнадежно пытаться понять атомную физику, изучая механическое упрочнение и дислокации, то, может быть, столь же безнадежно пытаться понять основной принцип функционирования Вселенной — назовем ли мы его предгеометрией или как-то иначе — какой бы объем работы в области общей теории относительности и физики элементарных частиц мы ни выполнили.

Томас Манн [467] в своем эссе о Фрейде высказал мысль, которую Нильс Бор несомненно назвал бы великой истиной. («Великая истина — это такая истина, отрицание которой есть также великая истина».) Томас Манн сказал: «Наука никогда

2



ФИГ. 44.3.

«Десять тысяч колец», или пример того, как можно представить связь между предгеометрией и геометрией; такое представление неверно, так как оно является слишком буквальным, а также по другим причинам, о которых говорится в тексте. Согласно Уилеру [1]) (см. [469]), один визирь поведал следующую историю: «Возьмите $N = 10\,000$ латунных колец. Возьмите автоматическое устройство, которое будет разрезать кольцо, продевать его через другое кольцо и вновь запаивать место разреза. Загрузите кольца в бункер этого устройства. Возьмите перфоленту с программой, достаточно длинную, чтобы на ней умещалось $N\,(N-1)/2$ двоичных чисел. Посмотрите, что записано в программе в (jk)-м месте на ленте (j, $k = 1, 2, \ldots, N$; $j < k$). Если там стоит 0, то это сигнал для того, чтобы j-е кольцо не спаивать с k-м кольцом. Если же там 1, то это сигнал для соединения данной пары колец. Введите ленту в машину и нажмите кнопку пуска. Раздастся грохот. Из машины выйдет цепочка колец длиной в 10 000 звеньев. Она упадет на стол, и машина остановится. Загрузите еще 10 000 колец, введите новую перфоленту с программой и снова нажмите кнопку. На этот раз появится не одномерная, а двумерная структура: кольчуга с отверстием для головы и рукавами. Возьмите еще одну ленту из библиотеки программ и повторите все сначала. На стол упадет кольчуга меньшего размера, на этот раз сплошь заполненная сеткой из колец, т. е. трехмерная структура. Теперь забудьте о библиотеке программ и составьте свою собственную программу — случайный набор нулей и единиц. Управляемая этой программой машина «создаст» что-то вроде «елочного украшения» — гирлянды одномерных цепочек, двумерных поверхностей, трех-, четырех-, пятимерных объектов и объектов более высокой размерности. Некоторые из них будут соединены друг с другом, другие свободны. Теперь перейдем от программы, записанной на ленте, к амплитуде вероятности — комплексному числу

$$\psi\,(\text{ленты}) = \psi\,(n_{12},\ n_{13},\ n_{14},\ \ldots,\ n_{N-1,\,N}),\quad n_{ij} = 0,\ 1, \tag{1}$$

определенному для всей области возможных структур, построенных из 10 000 колец. Не будем эти амплитуды вероятности задавать случайным образом. Вместо этого установим связь между амплитудами для структур, которые отличаются одна от другой одним распаянным кольцом, с помощью линейных формул, в которые все кольца входят равноправно. Отдельные амплитуды ψ теперь не являются полностью независимыми, но они будут давать ненулевые амплитуды вероятности для «елочных украшений». Наибольший интерес представляют следующие вопросы, касающиеся более гладких структур: 1) Какие виды структур наиболее вероятны? 2) Какова преобладающая размерность этих структур в соответствующем пределе принципа соответствия? 3) Какую форму принимает динамический закон эволюции геометрии в этом полуклассическом пределе?». Ни один принцип не исключает такую модель предгеометрии более явно, чем принцип простоты (см. текст).

[1]) История Уилера о визире и о том, что визирь поведал о суперпространстве, была рассказана 18 мая 1970 г. на Гваттском семинаре, посвященном роли топологии в общей теории относительности. В работе [469] дается ссылка на эту историю, но сама история не приводится.

не сделает ни шага вперед, пока философия не одобрит и не вдохновит ее на это». Если принцип эквивалентности (гл. 16) и принцип Маха (§ 21.9) являются философскими «крестными отцами» общей теории относительности, то справедливо также и то, что истинный смысл этих принципов стал ясным только после длительного изучения самой теории Эйнштейна. Поэтому кажется разумным ожидать, что при поисках предгеометрии самое раннее указание должно исходить из философского и вместе с тем плодотворного принципа, полный смысл которого и все его следствия, возможно, суждено понять лишь впоследствии.

Среди всех принципов, которые можно перечислить в мире науки, трудно вообразить себе что-либо более привлекательное, чем принцип *простоты*. И среди всех видов простоты динамики, жизни и движения ни один не является более совершенным [468], чем *альтернатива* «да—нет» или «истинно — ложно». Это никоим образом не доказывает правильность такого выбора исходного принципа; можно лишь упомянуть, что «неклассическая двузначность» Паули, или «спин», играет доминирующую роль во всей физике частиц.

Первая попытка в области предгеометрии, основанная на принципе двузначного выбора

Одно дело построить пробную модель предгеометрии, но как поступить дальше? Как не надо поступать, показано на фиг. 44.3. «Швейная машина» создает объекты той или иной определенной размерности или разных размерностей в соответствии с программой, записанной на ленте в двоичном коде «да — нет». Некоторые трудности создания структуры на основе двоичного кода, согласно этой модели или любой из десятка других моделей, выявляются сразу же. 1. Почему $N = 10\,000$ строительных элементов? Почему не другое N? И если с самого начала вводится произвольное число элементов, то почему бы не фиксировать «вручную» и другие признаки? Очевидно, что никакой естественной точки остановки нет, так же как нет какого-либо принципа, который мог бы фиксировать такую точку. Подобный произвол противоречит принципу простоты и исключает такую модель. 2. Квантовая механика привносится извне, а не присуща самой модели. В этом пункте также принцип простоты выступает против этой модели. 3. Переход от предгеометрии к геометрии осуществляется слишком буквально, без какой-либо оценки необходимости появления частиц и полей. Модель, говоря словами Бора, сказанными по другому поводу, «безумная, но недостаточно безумная, чтобы быть правильной».

Более разумная картина: предгеометрия как исчисление высказываний

Отмечая эти трудности и бесплодно испытывая одну модель предгеометрии за другой в попытке найти модель, свободную от этих трудностей, мы внезапно сознаем, что механизм для комбинирования элементов «да — нет» или «истинно — ложно» не надо изобретать — он уже существует. Чем еще может быть предгеометрия, спрашиваем мы себя, как не исчислением высказываний? (Дополнение 44.5.)

Дополнение 44.5. ПРЕДГЕОМЕТРИЯ КАК ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Простое высказывание, выбранное почти наугад из обычного учебника логики, записывается ([470], стр. 40) в виде

$$[X \to ((X \to X) \to Y)] \,\&\, (\bar{X} \to Z) \text{ eq } (\bar{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}) \,\&\, (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \bar{Y} \vee Z).$$

Символы имеют следующий смысл:

$\bar{A}$ — не A,

$A \vee B$ — A или B или A и B,

$A \,\&\, B$ — A и B,

$A \to B$ — из A следует B («если A, то B»),

$A \longleftrightarrow B$ — B эквивалентно A («B тогда и только тогда, когда A»).

Предикатная формула $\mathfrak{A}$ называется эквивалентной («eq») предикатной формуле $\mathfrak{B}$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ есть тавтология. Буквы A, B и т. д. служат в качестве соединительных звеньев, чтобы «связать» одно высказывание с другим. Следуя по такому пути, можно построить высказывание бесконечно большой длины.

Переключающая схема (см., например, [471, 472]) изоморфна некоторому высказыванию.

Сравним короткое высказывание или элементарную переключающую схему с соударением молекул. Ни одна из идей не казалась более абсурдной, чем идея Даниила Бернулли в 1733 г. [473] о том, что тепло есть проявление соударений молекул. Кроме того, столкновения трех тел трудны для изучения, столкновения четырех тел — еще труднее, а столкновения пяти или большего числа молекул практически не поддаются анализу. Тем не менее механика приобретает новые элементы простоты в пределе, когда число молекул очень велико и когда можно использовать понятие плотности в фазовом пространстве. Статистическая механика в этом пределе дает такие понятия, как температура и энтропия. Когда температура вполне определена, энергия системы является не вполне определенным понятием, а когда полностью определена энергия, неопределенным понятием становится температура. Эта дополнительность неизбежно присуща самим основам предмета. Суньте палец в пламя от спички, и вы испытаете ощущение, равного которому нет ни в небе, ни на земле; однако все, что произошло, есть следствие соударений молекул вопреки ранним критикам.

Трудно понять смысл какого-либо отдельного высказывания, если оно длинное, но еще труднее разобраться в смысле совокупности высказываний. Тем не менее проведем статистический анализ исчисления высказываний в пределе, когда число высказываний велико и большинство из них являются длинными. Поставим вопрос, не выявляются ли при этом анализе параметры, которые 1) аналогичны в какой-то мере температуре и энтропии статистической механики, но 2) намного более многочисленны и настолько динамичны по своему характеру, что воспроизводят континуум обычной физики.

На первый взгляд ничто не может показаться столь абсурдным, как мысль о том, что природа построена на таком же эфемерном основании, как исчисление высказываний. Все же кроме побуждения к поиску в этом направлении, определяемому принципом простоты, имеются еще два стимула. Во-первых, основы квантовой механики совершенно естественным образом формулируются на языке исчисления высказываний, о чем не в последнюю очередь свидетельствует книга Джоуча [474]. Если бы квантовый принцип уже не содержался автоматически в выдвигаемой модели предгеометрии и если бы, напротив, его нужно было вводить извне, то мы должны были бы заключить, что такая модель нарушает принцип простоты, и отказаться от нее. Во-вторых, погоня за реальностью, по-видимому, всегда отдаляет нас от реальности. Кто мог бы предположить, что такое обыденное явление, как тяготение будут описывать посредством кривизны геометрии пространства-времени? И когда позднее был признан динамический характер этой геометрии, кто мог бы себе представить, что действие геометродинамики развертывается на столь эфемерной арене, как суперпространство? Поэтому не следует слишком удивляться, если попытки описания природы приведут нас в конце концов к логике, этому «воздушному замку» в самом центре математики. Если, как считают, вся математика сводится к математической логике, а вся физика — к математике, то разве не единственной возможностью является то, что физика сводится к математической логике? Логика — единственная область математики, которая может «размышлять о себе самой».

Вывод, что логика не имеет ничего общего с физикой, — явился следствием большого числа старых споров об аксиоме «параллельные прямые никогда не пересекаются». Следует ли она из других аксиом эвклидовой геометрии или независима от них? «Независима», — доказали Больи и Лобачевский. Исходя из этого, а также из работ Гаусса, Риман пришел к созданию римановой геометрии. «Чтобы понять геометрию, изучайте природу, а не Эвклида» — советовал он. Эйнштейн, следуя этому совету, пошел дальше и превратил геометрию в часть физики.

«Вывод, что логика не имеет ничего общего с физикой», — первая естественная оценка поразительных ограничений на логику, обнаруженных Гёделем [475], Коэном [476] и другими (см., например, обзор [477]). Вывод будет прямо противоположным, если в действительности окажется, что реальная предгеометрия реального физического мира тождественна исчислению высказываний.

«Физика как проявление логики», или «предгеометрия как исчисление высказываний», — это пока еще даже не идея, а идея для поиска идеи. Она изложена здесь лишь для того, чтобы пояснить немного, в чем смысл предположения, что направление развития может быть не

$$\text{физика} \rightarrow \text{предгеометрия},$$

а

$$\text{предгеометрия} \rightarrow \text{физика}.$$

§ 44.6. ЧЕРНЫЙ ЯЩИК: ВОСПРОИЗВОДСТВО ВСЕЛЕННОЙ

Никакие поиски не открыли до сих пор «легкого пути» в вопросе о гравитационном коллапсе, так же как ранее не был найден легкий путь в вопросе о коллапсе атома. Во время того более раннего кризиса физики оказались в конце концов перед дилеммой: «Либо

ничего не понимать, либо принять квантовый принцип». Нынешний кризис едва ли позволит избежать аналогичной коренной перестройки. Не видно никакой альтернативы: можно лишь сказать, что геометрия не способна переправить физику через конечные стадии гравитационного коллапса к тому, что случится за ними, и ее место должна занять предгеометрия. На этом неисследованном пути не видно никаких указателей, кроме решительно применяемого принципа простоты.

Сожмется ли вся Вселенная до планковских размеров или до бóльших (или меньших) размеров, прежде чем начнется новое расширение, и динамика снова станет нормальной? При рассмотрении некоторых интересующих нас вопросов этого можно не знать.

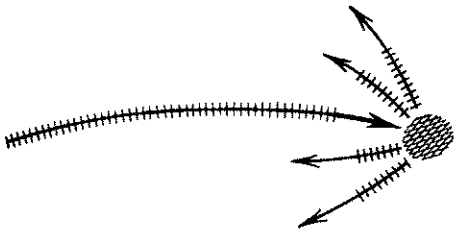
Роль черного ящика в физике

В физике уже давно используется понятие «черный ящик», символизирующее такие ситуации, когда желают сконцентрировать внимание на том, чтó входит и чтó выходит, не рассматривая того, что происходит между входом и выходом.

В самом начале кризиса, связанного с коллапсом атома, считалось, что электрон детерминированным образом движется по направлению к точечному центру притяжения и с неизбежностью за конечное время переходит в состояние с бесконечной кинетической энергией. После появления квантовой механики задачу о взаимодействии между центром притяжения и электроном удалось свести к рассмотрению некоторого «черного ящика»: в него поступает волновой цуг электронов, движущийся в определенном направлении, а из него выходят электроны, движущиеся в различных направлениях с определенными амплитудами вероятности (фиг. 44.4). Чтобы правильно количественно предсказать эти амплитуды вероятности, достаточно перевести гамильтониан классической теории на язык волновой механики и решить получившееся волновое уравнение, которое служит ключом к «черному ящику».

Распределение вероятностей различных исходов коллапса

При аналогичном подходе к гравитационному коллапсу как к «черному ящику», можно ожидать, что мы получим «распределение вероятностей различных исходов». Однако можно предполагать, что здесь один исход отличается от другого не одним параметром, таким, как угол рассеяния электрона, а многими. Заранее известно, что они определяют такие величины, как размер системы в момент максимального расширения, время от начала нового цикла до момента, когда он закончится коллапсом, число имеющихся частиц и тысячи других свойств. «Вероятности» этих исходов будут подчиняться динамическому закону, аналогичному 1) волновому уравнению Шредингера для электрона или, если вспомнить еще одну проблему, где используется черный ящик, 2) уравнениям Максвелла для электромагнитных волн в отдельных волноводах, которые взаимодействуют в месте соединения этих волноводов. Однако едва ли разумно ожидать, что требуемый динамический закон получится сразу же, как только уравнение Гамильтона — Якоби общей теории относительности (гл. 43)



ФИГ. 44.4.
Модель черного ящика в применении: 1) к рассеянию электрона на центре притяжения и 2) к коллапсу самой Вселенной. Вполне определенная в классической теории мировая линия электрона в квантовой теории заменяется амплитудой вероятности, гребни волн которой схематически изображены на рисунке. Вместо неопределенности в классической теории в квантовой теории мы имеем распределение вероятностей исходов. Этот рисунок иллюстрирует также применение черного ящика в случае гравитационного коллапса (см. текст). При этом ареной служит уже не пространство-время, а суперпространство. Длинная стрелка теперь обозначает не классическую мировую линию электрона в пространстве-времени, а относится к классическому «листу истории геометрии», рассекающему суперпространство (гл. 43). Гребни волн не символизируют более волновую функцию электрона, движущегося в пространстве-времени; они изображают геометродинамическую волновую функцию, распространяющуюся в суперпространстве. Заштрихованная область уже не является областью обращения в бесконечность одночастичного потенциала; теперь это область гравитационного коллапса, где кривизна пространства стремится к бесконечности. Выходящие волны описывают не различные направления рассеянного электрона; теперь они обозначают начала новых историй самой Вселенной после коллапса и «воспроизводство» в конце рассматриваемого цикла.

будет приведено к уравнению типа уравнения Шредингера; это объясняется просто тем, что в основе геометродинамики, как в классическом, так и в квантовом варианте, лежит классическая дифференциальная геометрия. Но в классической геометрии нет места для каких-либо квантовых флуктуаций связности, которые, по-видимому, неизбежны при малых расстояниях и поэтому неизбежны также на конечных стадиях гравитационного коллапса. Черный ящик гравитационного коллапса должна заполнять не геометрия, а предгеометрия.

«Воспроизводство» Вселенной

Как бы мало ни знали мы о внутреннем механизме черного ящика, нам с неизбежностью рисуется такая картина происходящего. В эпоху коллапса Вселенная превращается, преобразуется, переходит или, наконец, *воспроизводится* вероятностным образом от одного цикла истории к другому.

Хотя эта картина воспроизводства Вселенной, казалось бы, следует из основных свойств общей теории относительности и из квантового принципа — двух важнейших принципов физики двадцатого столетия, тем не менее она представляется поистине фантастической. Как может динамика столь невообразимо гигантской системы переключаться — и переключаться по воле случая — с одного цикла, длившегося 10^{11} лет, на другой цикл, который

будет длиться только 10^6 лет? Сначала лишь то обстоятельство, что система в ходе этой динамической эволюции сжимается до невероятно малых размеров, примиряет нас с таким превращением, в которое иначе было бы невозможно поверить. Затем, глядя на вертикальные пласты горного склона или на невиданную ранее птицу, мы поражаемся тому, как удивительна Вселенная:

изменение видов,
метаморфоз горных пород,
химические реакции,
спонтанное превращение ядер,
радиоактивный распад частиц,
воспроизводство самой Вселенной.

Если знание того, что горные породы могут подниматься и опускаться на тысячи метров и менять наклон на сотни градусов, проливает новый свет на геологию, то каково же тогда значение для физики идеи, что Вселенная время от времени сжимается до такой степени, что «проходит сквозь игольное ушко», полностью «перерабатывается» и вступает в новый динамический цикл? Прежде всего обращают на себя внимание три соображения, заключенные в следующих лаконичных фразах:

полное уничтожение всех интегралов движения при коллапсе;
частицы и сами физические «константы» как «устойчивая составляющая метеорологии коллапса»;
«биологический отбор физических констант».

Все законы сохранения при коллапсе Вселенной нарушаются

В ходе гравитационного коллапса звезды или группы звезд с образованием черной дыры исчезают все индивидуальные особенности системы (см. гл. 32 и 33), за исключением массы, заряда и момента импульса. Состоит ли система из вещества, антивещества или излучения, обладает ли она большой энтропией или малой, происходят ли в ней ламинарные движения или имеет место хаотическая турбулентность,— в конце коллапса эта система, с точки зрения внешнего наблюдателя, приходит в одно и то же состояние. Нарушаются законы сохранения барионного и лептонного чисел (гл. 33, см. также [413]). Ни одним из известных способов нельзя как-то отличить друг от друга черные дыры самого различного происхождения, если у них одинаковые масса, заряд и момент импульса. Но для замкнутой Вселенной даже эти константы исчезают со сцены. Полный заряд автоматически равен нулю, поскольку силовые линии могут кончаться только на заряде. Полная масса и полный момент импульса в случае замкнутой Вселенной вообще теряют какой-либо определенный смысл. Такой вывод следует главным образом из отсутствия асимптотически плоского пространства, где можно было бы поместить пробную частицу на кеплеровскую орбиту, чтобы измерить период вращения и прецессию для этой орбиты.

Из всех основных физических принципов наиболее твердо установленными считаются законы сохранения заряда, лептонного и барионного чисел, массы и момента импульса. Однако при гравитационном коллапсе эти законы сохранения также нарушаются. Общепризнанное отменяется. Ни одна характеристика движения не может остаться неизменной по своей величине при переходе от одного цикла Вселенной к другому. Более того, если структура элементарных частиц носит динамический характер и спектр масс частиц также имеет динамическую природу, то не остается иного выбора, как сделать вывод о воспроизводстве самого спектра масс в тот момент, когда «Вселенная проходит через игольное ушко». Каждая молекула этого листа бумаги есть продукт фотосинтеза, протекавшего в дереве несколько лет назад. Каждое ядро кислорода в этом воздухе — продукт термоядерной реакции, происшедшей при несравненно более высокой температуре в какой-нибудь звезде несколько миллиардов лет назад. Чем еще может быть элементарная частица, как не продуктом самого катастрофического из всех явлений — гравитационного коллапса?

Три иерархии превращений: молекулы, ядра, частицы

Тот факт, что один геологический пласт имеет одинаковый наклон на протяжении многих километров с поразительной однородностью структуры, а другой обладает иным наклоном,— это одновременно и прописная истина, известная любому, и чудесная загадка до тех пор, пока не выяснен механизм этого явления. То, что масса одного электрона равна массе другого электрона,— это тоже факт, с одной стороны, тривиальный, а с другой — загадочный. Этот факт тривиален в квантовой электродинамике, поскольку его справедливость постулируется, а не доказывается. Однако он превращается в загадку, если считать, что Вселенная время от времени воспроизводится. Почему электроны могут иметь одинаковую массу в разные моменты времени и в разных местах современного цикла существования Вселенной, если спектр масс частиц в одном цикле Вселенной отличается от спектра масс в другом цикле?

Какова причина равенства масс частиц одного сорта?

Изучите строение частицы одного сорта, мысленно увеличьте ее до чудовищных размеров, и вы увидите в ней изображение всей Вселенной. (Сравните с понятием монады Лейбница [478]: «У монад нет окон, через которые что-то может в них проникать или из них выходить».) Поступите точно так же с другой частицей того же сорта. Не потому ли частицы одного сорта тождественны друг другу в каждом отдельном цикле Вселенной, что они позволяют увидеть тождественные картины одной и той же Вселенной? До сих пор не дано приемлемого объяснения удивительной тождественности элементарных частиц одного сорта. Эту тождественность следует рассматривать не как тривиальный факт, а как главную тайну физики.

Воспроизводство физических констант

По-видимому, наиболее разумно предполагать, что при переходе от одного цикла к другому воспроизводится не только спектр

масс частиц, но и сами физические «константы». Воспроизводится по отношению к чему? Например, по отношению к планковской системе единиц,

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см},$$
$$T^* = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5{,}4 \cdot 10^{-44} \text{ с},$$
$$M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ г}.$$

Как указал Планк [439], это единственная система единиц, свободная, как излучение абсолютно черного тела, от всех усложнений, следующих из физики твердого тела, молекулярных связей, строения атома и структуры элементарных частиц, и основанная лишь на самых простых и наиболее универсальных физических принципах — законах тяготения и излучения абсолютно черного тела. В планковских единицах любая константа, относящаяся к любой области физики, выражается как безразмерная величина.

Самые удивительные из безразмерных величин — это постоянная тонкой структуры $\hbar c/e^2 = 137{,}0360$ и так называемые «большие числа» [1]) [277, 289, 305, 316, 317, 319, 326, 479—482]:

$$\sim 10^{80} \text{ частиц во Вселенной},$$

$$\sim 10^{40} \sim \frac{10^{28} \text{ см}}{10^{-12} \text{ см}} \sim \frac{\text{радиус Вселенной при максимальном расширении}}{\text{«размер» элементарной частицы}},$$

$$\sim 10^{40} \sim \frac{e^2}{GmM} \sim \frac{\text{электрические силы}}{\text{гравитационные силы}},$$

$$\sim 10^{20} \sim \frac{e^2/mc^2}{(\hbar G/c^3)^{1/2}} \sim \frac{\text{«размер» элементарной частицы}}{\text{планковская длина}},$$

$$\sim 10^{10} \sim \frac{\text{число фотонов во Вселенной}}{\text{число барионов во Вселенной}}.$$

Хотя удалось составить некоторое представление о связях между этими числами [482], тем не менее их огромные значения остаются необъясненными и никогда не будут объяснены, если окажется правильным предположение, что при воспроизводстве Вселенной воспроизводятся также и физические константы. В таком случае они являются не частью законов физики, а частью начальных условий. Такие числа задаются заново для каждого нового цикла расширения Вселенной. Таким образом, искать физическое объяснение «больших чисел», по-видимому, означает искать правильный ответ на неправильно поставленный вопрос.

В течение недели, проходящей между двумя последовательными штормами, многое в погоде непрерывно меняется, но общая

[1]) Эти числа получены с использованием «типичной космологической модели», приведенной в дополнении 27.4; вследствие большой неопределенности их значений, связанной с недостаточной точностью измерения астрофизических расстояний, они совместимы и с открытой Вселенной.

картина распределения ветров сохраняется на протяжении всей недели. Если термин «установившиеся метеорологические условия» подходит для этой картины ветров, то еще в большей степени он подходит к большим числам, физическим константам и спектру масс элементарных частиц в течение цикла между двумя последовательными воспроизводствами Вселенной.

Связь физических констант с условиями возможности жизни

Согласно Картеру [482], изменение одной из «постоянных», а именно $\hbar c/e^2$ приблизительно на 1% в одну сторону приведет к тому, что все звезды будут красными, а сравнимое изменение в другую сторону сделает все звезды голубыми. И в том и в другом случае существование звезд типа Солнца станет невозможным. Картер поставил вопрос о том, могла ли возникнуть жизнь, если бы определяющие физические константы существенно отличались от тех, которые характеризуют данный цикл Вселенной.

Дикке [305] указал, что порядок рассуждений может быть не таким: вот Вселенная, каким должен быть человек, а таким: вот человек, какой должна быть Вселенная? Другими словами: 1. Какой был бы смысл говорить о Вселенной, если бы не было познающего субъекта? Но: 2. Для познания требуется жизнь. 3. Для жизни требуется наличие элементов тяжелее водорода. 4. Для образования тяжелых элементов нужна реакция термоядерного синтеза. 5. Чтобы в звезде создались условия, необходимые для возникновения термоядерной реакции, требуется несколько миллиардов лет. 6. Согласно общей теории относительности, время в несколько миллиардов лет совместимо с замкнутой Вселенной лишь в том случае, если ее радиус в момент максимального расширения составляет не менее нескольких миллиардов световых лет. Почему же с этой точки зрения Вселенная так велика? Потому что только в такой Вселенной возможно существование человека!

Короче говоря, эти соображения Картера и Дикке, по-видимому, поднимают вопрос о «биологическом отборе физических констант». Но для «отбора» необходимо иметь какую-то возможность выбора. Именно такая возможность выбора впервые возникает в единственной картине, охватывающей весь коллапс Вселенной,— в *предгеометрической модели черного ящика для воспроизводства Вселенной.*

С крайней осторожностью вступая на неисследованную территорию, мы непременно должны помнить, что выводы, к которым мы приходим, и вопросы, которые мы ставим на данной стадии исследований, могут оказаться лишь ступеньками на пути к еще более острым вопросам и к еще более удивительной картине Вселенной. Может также оказаться, что, говоря о «воспроизводстве и отборе», мы придерживаемся лишь половинчатой точки зрения, останавливаясь на полпути к лейбницевскому представлению о Вселенной как о мире связей, а не как о мире структур. Не могла ли Вселенная вместо того, чтобы прийти к сегодняшним условиям путем «воспроизводства» после предшествующего цикла,

быть в каком-то странном смысле «ввергнута в бытие» при участии кого-то, кто действительно является участником происходящего? С этой точки зрения концепция циклов кажется совершенно неверной. Вместо этого важнейший акт — акт участия. «Участник»— это, несомненно, новое понятие, к которому приводит квантовая механика; оно заменяет собой устаревшее понятие «наблюдателя» в классической теории — человека, стоящего за толстой стеклянной стеной и безучастно наблюдающего за происходящим вокруг него. Этого не может быть, говорит квантовая механика. Необходимо принять участие даже в поведении скромного электрона: только тогда удастся придать какой-то смысл его импульсу и положению в пространстве. А вдруг этот твердо установленный факт представляет собой крошечную верхушку гигантского айсберга? Не «участие» ли придает смысл Вселенной? Неужели нам суждено вернуться к великой концепции Лейбница о «предопределенной гармонии» («логический замкнутый круг Лейбница»), прежде чем мы сможем сделать следующий большой шаг вперед?

Черная дыра как «лабораторная модель» коллапса Вселенной

Поистине широкие перспективы открываются перед исследованиями в области гравитационной физики — от нейтронных звезд до космологии и от постньютоновской небесной механики до гравитационных волн. Делая тысячи предсказаний, эйнштейновская геометродинамика ставит себя под угрозу опровержения на множестве фронтов. Самыми увлекательными из всех предсказаний, подлежащих проверке в первую очередь, являются предсказания, касающиеся образования и свойств черной дыры — в некоторых отношениях «лабораторной модели» самой Вселенной. Вряд ли найдется другая область физики, столь же устремленная в будущее, как гравитационный коллапс. Никогда серьезно не рассматривались более революционные взгляды на человека и на Вселенную, чем те, которые возникают при исследовании парадокса гравитационного коллапса — этого величайшего кризиса в истории физики [1]).

> *Все эти усилия зиждятся на вере в непременную и полную гармонию бытия. Сегодня у нас еще меньше причин, чем когда бы то ни было раньше, позволить себе отступиться от этой прекрасной веры.*
>
> Эйнштейн [421]

---

[1]) О совпадении больших чисел в космологии и физике элементарных частиц, о возможном значении этого факта см. в книге [507]. Там же см. критику некоторых гипотез и произвольных построений, связанных с таким фактом. Это совпадение, может быть, связано с тем фактом, что возникновение жизни возможно лишь в определенных условиях, возникающих лишь при образовании галактик, звезд и планет, т. е. на определенной стадии эволюции Вселенной, как это описано в данном параграфе книги. Однако некоторые другие рассуждения авторов носят абстрактный характер, и мы не можем с ними согласиться.— *Прим. ред.*

ЛИТЕРАТУРА

Этот список литературы, подобно библиографии в работе [29], может служить лишь отправной точкой при ознакомлении с литературой, которая настолько обширна, что нельзя составить всеобъемлющий список. Более подробную библиографию по некоторым разделам можно найти, например, в работах [483 — 487][1]). Иногда приводится не самое первое издание, а более позднее и более доступное. Почти все докторские диссертации США можно получить в виде микрофильмов[2]). Мы хотим выразить свою благодарность Грегори Черлину, подготовившему первый вариант списка литературы, и Нигелю Куту, внесшему многочисленные исправления, а также всем коллегам, без помощи которых многие из наиболее важных и труднодоступных работ так и не попали бы в данный список.

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.*, Теория поля, изд. 4, Физматгиз, М., 1962. [Форзац.]
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.*, Теория поля, изд. 5, изд-во «Наука», М., 1967. [Форзац, § 36.1.]
3. *Adler R., Bazin M., Schiffer M.*, Introduction to General Relativity, McGraw-Hill, New York, 1965. [Форзац.]
4. *Anderson J.L.*, Principles of Relativity Physics, Academic Press, New York, 1967). [Форзац.]
5. *Bergmann P.G.*, Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, New York, 1942. (Имеется перевод: Бергман П., Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947.) [Форзац.]
6. *Cartan É.*, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928 and 1946. (Имеется перевод: *Э. Картан*, Риманова геометрия в ортогональном репере, Изд-во МГУ, М., 1960.) [Форзац.]
7. *Davies W.R.*, Classical Theory of Particles and Fields and the Theory of Relativity, Gordon and Breach, New York, 1970. [Форзац.]
8. *Eddington A.S.*, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1922. [Форзац.]

[1]) Список литературы [484] составлен на основе библиографии в книге [488].

[2]) University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Mich. 48106.

9. *Ehlers J.*, General Relativity and Kinetic Theory в книге General Relativity and Cosmology, Academic Press, New York, 1971. [Форзац.]
10. *Einstein A.*, The Meaning of Relativity, 3d ed., Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1950. (Имеется перевод: *А. Эйнштейн*, Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955.) [Форзац, § 43.1.]
11. *Eisenhart L.P.*, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1926. (Имеется перевод: Эйзенхарт Л., Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.) [Форзац.]
12. *Фок В.А.*, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1959. [Форзац, доп. 39.3, упр. 39.15.]
13. *Fokker A.D.*, Time and Space, Weight and Inertia, Pergamon Press, London, 1965. [Форзац.]
14. *Hawking S.W.*, *Ellis G.F.R.*, The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973. [Форзац.]
15. *Hicks N.J.*, Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965. [Форзац.]
16. *Infeld L.*, *Plebanski J.*, Motion and Relativity, Pergamon Press, New York, 1960. (Имеется перевод: *Л. Инфельд*, *Е. Плебаньский*, Движение и релятивизм, ИЛ, М., 1962.) [Форзац.]
17. *Lichnerowicz A.*, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, Paris, 1955. [Форзац.]
18. *McVittie G.C.*, General Relativity and Cosmology, Chapman and Hall, London, 1956. [Форзац.]
19. *Misner C.W.*, Gravitational collapse в книге Brandeis Summer Institute 1968, Astrophysics and General Relativity, eds. Chrétien M., Deser S., Goldstein J., Gordon and Breach, New York, 1969, vol. 1. [Форзац, § 32.5, доп. 31.2, упр. 31.8.]
20. *Møller C.*, The Theory of Relativity, Oxford Univ. Press, London, 1952: 2d ed., 1972. [Форзац.]
21. *Pauli W.*, Theory of Relativity, Pergamon Press, London, 1958. [Форзац.]
22. *Penrose R.*, Structure of Space-time в книге Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics, eds. DeWitt C., Wheeler J.A., Benjamin, New York, 1968. [Форзац.]
23. *Pirani F.A.E.*, Introduction to gravitational radiation theory в книге *Trautman A.*, *Pirani F.A.E.*, *Bondi H.*, Lectures on General Relativity, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965. [Форзац.]
24. *Robertson H.P.*, *Noonan T.W.*, Relativity and Cosmology, Saunders, Philadelphia, 1968. [Форзац.]
25. *Sachs R.K.*, Gravitational Radiation в книге Relativity, Groups, and Topology, eds., DeWitt C., DeWitt B.S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Форзац, § 33.6, 41.11.]
26. *Schild A.*, Lectures on General Relativity Theory в книге Relativity Theory and Astrophysics, ed., Ehlers J., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967, p. 1. [Форзац.]
27. *Schouten J.A.*, Ricci-calculus, Springer, Berlin, 1954. [Форзац.]
28. *Schrödinger E.*, Space-Time Structure, Cambridge Univ. Press, England, 1950. [Форзац.]
29. *Synge J.L.*, Relativity: The General Theory, North-Holland, Amsterdam, 1960. (Имеется перевод: Синг Дж., Общая теория относительности, ИЛ, М., 1963.) [Форзац.]
30. *Thorne K.S.*, The General Relativistic Theory of Stellar Structure and Dynamics в книге High-Energy Astrophysics, vol. III, eds., DeWitt C., Schatzman E., Veron P., Gordon and Breach, New York, 1967. [Форзац.]
31. *Tolman R.C.*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Clarendon Press, Oxford, 1934. (Имеется перевод: Толмен Р., Относительность, термодинамика и космология, изд-во «Наука», М., 1974.) [Форзац, § 44.1.]
32. *Trautman A.*, Foundations and Current Problems of General Relativity Theory в книге *Trautman A.*, *Pirani F.A.E.*, *Bondi H.*, Lectures on General Relativity, Brandies 1964 Summer Institute on Theoretical Physics, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965. [Форзац.]

33. *Weber J.*, General Relativity and Gravitational Waves, Wiley-Interscience, New York, 1961. (Имеется перевод: Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, М., 1962.) [Форзац. § 37.3.]
34. *Weinberg S.*, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972. [Форзац.]
35. *Weyl H.*, Space-Time-Matter, Methuen, London, 1922. [Форзац.]
36. *Wheeler J.A.*, Geometrodynamics and the Issue of the Final State в книге Relativity, Groups and Topology, eds., DeWitt C., DeWitt B.S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Форзац, § 34.6, 35.13, 42.6, 43.1, доп. 44.4.]
37. *Eddington A.S.*, Nature, **113**, 192 (1924). [Доп. 31.1, 31.2.]
38. *Lemaitre G.*, Ann., Soc. Sci. Bruxelles, **A53**, 51 (1933). [Доп. 31.1.]
39. *Synge J.L.*, Proc. Roy. Irish Acad., **A53**, 83 (1950). [§ 31.5, доп. 31.1.]
40. *Fronsdal C.*, Phys. Rev., **116**, 778 (1959). [Доп. 31.1.]
41. *Kruskal M.D.*, Phys. Rev., **119**, 1743 (1960). [§ 31.4, доп. 31.1.]
42. *Szekeres G.*, Publ. Mat. Debrecen, **7**, 285 (1960). [§ 31.4, доп. 31.1.]
43. *Новиков И.Д.*, кандидатская диссертация, Гос. Астрономический институт им. Штернберга, М., 1963. [§ 31.4.]
44. *Finkelstein D.*, Phys. Rev., **110**, 965 (1958). [Доп. 31.2.]
45. *Fuller R.W.*, *Wheeler J.A.*, Phys. Rev., **128**, 919 (1962). [§ 31.6, фиг. 31.5.]
46. *Reissner H.*, Ann. Phys. (Germany), **50**, 106 (1916). [Упр. 31.8.]
47. *Nordström G.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **20**, 1238 (1918). [Упр. 31.8.]
48. *Graves J.C.*, *Brill D.R.*, Phys. Rev., **120**, 1507 (1960). [Фиг. 34.4, упр. 31.8.]
49. *Carter B.*, Phys. Lett., **21**, 423 (1966). [Фиг. 34.4, упр. 31.8, 34.3.]
50. *Dodgson C.L.* (*Carroll L.*), Through the Looking Glass, Macmillan, London, 1871. [Эпиграф к гл. 32.]
51. *Birkhoff G.D.*, Relativity and Modern Physics, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1923. [§ 32.2.]
52. *Bertotti B.*, Phys. Rev., **116**, 1331 (1959). [Упр. 32.1.]
53. *Robinson I.*, Bull. Acad. Polon, Sci., **7**, 351 (1959). [Упр. 32.1.]
54. *Lindquist R.W.*, The Two-Body Problem in Geometrodynamics, doctoral dissertation, Princeton University, Princeton, N.J., 1960. [Упр. 32.1.]
55. *Oppenheimer J.R.*, *Snyder H.*, Phys. Rev. **56**, 455 (1939). [§ 32.3, 32.4, 34.6.]
56. *Подурец М.А.*, Астрон, журн., **41**, 1090 (1964). [§ 32.3.]
57. *Ames W.L.*, *Thorne K.S.*, Astrophys. Journ., **151**, 659 (1968). [§ 32.3.]
58. *Jaffe J.*, Ann. Phys. (USA), **55**, 374 (1969). [§ 32.3.]
59. *Beckedorff D.L.*, *Misner C.W.*, не опубликовано, 1962, см. Beckedorff D.L., A.B. Senior Thesis, Princeton University. [§ 32.4.]
60. *Misner C.W.*, *Sharp D.H.*, Phys. Rev., **B136**, 571 (1964). [Упр. 32.7.]
61. *May M.*, *White R.H.*, Phys. Rev., **141**, 1232 (1966). [§ 32.7, 42.7, доп. 33.3, упр. 32.7.]
62. *Tolman R.C.*, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **20**, 169 (1934). [Упр. 32.8.]
63. *Datt B.*, Zs. Phys., **108**, 314 (1938). [Упр. 32.8.]
64. *Зельдович Я.Б.*, *Новиков И.Д.*, Теория тяготения и эволюция звезд, изд-во «Наука», М., 1971. [§ 32.7.]
65. *Colgate S.A.*, *White R.H.*, Astrophys. Journ., **143**, 626 (1966). [§ 32.7.]
66. *Arnett W.D.*, Can. Journ. Phys., **44**, 2553 (1966). [§ 32.7.]
67. *Arnett W.D.*, Can. Journ. Phys., **45**, 1621 (1967). [§ 32.7.]
68. *Иванова Л.Н.*, *Имшенник В.С.*, *Надежин Д.К.*, Научные информации Астрономического совета Академии наук СССР, **13**, 3 (1969). [§ 32.7.]
69. *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965). [§ 32.7, 34.6, доп. 34.2.]
70. *Price R.H.*, doctoral dissertation, California Institute of Technology, 1971. [Упр. 32.10, доп. 32.2.]
71. *Price R.H.*, Phys. Rev., **D5**, 2419 (1972). [§ 35.14, 41.11, упр. 32.10, доп. 32.2.]

72. *Thorne K.S.*, Nonspherical Gravitational Collapse, a short review в книге Klauder, ed., Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, W.H. Freeman, San Francisco, 1972. [Доп. 32.3, упр. 32.10.]
73. *Press W.H.*, *Bardeen J.M.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 1303 (1971). [Упр. 32.11.]
74. *Bardeen J.M.*, *Press W.H.*, Journ. Math. Phys., **14**, 7 (1972). [§ 35.14, упр. 32.11.]
75. *Пиир И.И.*, Изв. Акад. Наук Эстонской ССР, физ.-мат., **20**, 413 (1971). [Упр. 32.11.]
76. *Wheeler J.A.*, Phys. Rev., **97**, 511 (1955). [Упр. 32.11.]
77. *Newman E.T.*, *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 231 (1965). [Упр. 32.11.]
78. *Price R.H.*, Phys. Rev., **D5**, 2439 (1972). [§ 41.11, доп. 32.2.]
79. *Hunter C.*, Fragmentation в книге Ehlers I., ed., Relativity Theory and Astrophysics, vol. I; Relativity and Cosmology, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967. [Доп. 32.2, 32.3.]
80. *Lin C.C.*, *Mestel L.*, *Shu F.H.*, Astrophys. Journ., **142**, 1431 (1965). [Доп. 32.2, 32.3.]
81. *Dirac P.A.M.*, Proc. Roy. Soc. London, **A155**, 447 (1936). [Доп. 32.2.]
82. *Garding L.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **41**, 49 (1945). [Доп. 32.2.]
83. *Bargmann V.*, *Wigner E.P.*, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **34**, 211 (1948). [Доп. 32.2.]
84. *Penrose R.*, Proc. Roy. Soc. London, **A284**, 159 (1965). [§ 34.2, доп. 32.2.]
85. *Hartle J.B.*, Phys. Rev., **D3**, 2938 (1971). [Доп. 32.2, 33.1, § 41.11.]
86. *Hartle J.B.*, Can a Schwarzschild black hole exert long-range neutrino forces? в книге Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, ed. Klauder J., Freeman, San Francisco, 1972. [Доп. 32.3, 33.1.]
87. *Teitelboim C.*, Nuovo Cimento, **II 3**, 397 (1972). [Доп. 32.2, 33.1.]
88. *Teitelboim C.*, Phys. Rev., **D5**, 2941 (1972). [Доп. 32.2, 33.1.]
89. *Bekenstein J.*, Phys. Rev., **D5**, 1239 (1972). [Доп. 32.2, 33.1.]
90. *Bekenstein J.*, Phys. Rev., **D5**, 2403 (1972). [Доп. 32.2, 33.1.]
91. *Teitelboim C.*, Nuovo Cimento Lett., **II 3**, 326 (1972). [Доп. 32.2, 33.1.]
92. *Chandrasekhar S.*, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon Press, Oxford, 1968. [Доп. 32.3.]
93. *Morgan T.*, *Thorne K.S.*, in preparation, 1973. [Доп. 32.3.]
94. *Laplace P.S.*, Le Systeme du monde, vol. II, Paris, 1795; The System of the World, W. Flint, London, 1809. [Эпиграф к гл. 33.]
95. *DeWitt C.*, *DeWitt B.S.*, eds., Black Holes, Proceedings of 1972 session of Ecole d'été de physique theorique, Gordon and Breach, New York, 1973. [§ 33.1.]
96. *Courant R.*, Ann. Math., U.S., **38**, 679 (1937). [§ 33.2.]
97. *Darboux G.*, Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, Part I, Gauthier-Villars, Paris, France, 1941. [§ 33.2.]
98. *Bers L.*, Singularities of minimal surfaces в книге Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1952. [§ 33.2.]
99. *Kerr R.P.*, Phys. Rev. Lett., **11**, 237 (1963). [§ 33.2, 33.6, доп. 33.2.]
100. *Newman E.T.*, *Couch E.*, *Chinnapared K.*, *Exton A.*, *Prakash A.*, *Torrence R.*, Journ. Math. Phys., 6, 918 (1965). [§ 33.2.]
101. *Boyer R.H.*, *Lindquist R.W.*, Journ, Math. Phys., **8**, 265 (1967). [§ 33.2, доп. 33.2, упр. 33.8.]
102. *Carter, B.*, Properties of the Kerr metric, в книге DeWitt and DeWitt eds., Black Holes, Proceedings of 1972 session of Ecole d'été de physique theorique, Gordon and Breach, New York, 1973. [Доп. 33.1.]
103. *Hawking S.W.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1344 (1971). [§ 34.5, доп. 33.1, 33.4.]
104. *Hawking S.W.*, Commun. Math. Phys., **25**, 152 (1972). [§ 34.5, доп. 33.1, 33.3, 33.4, 34.3, упр. 34.4.]
105. *Israel W.*, Phys. Rev., **164**, 1776 (1967). [Доп. 33.1.]
106. *Israel W.*, Commun. Math. Phys., 8, 245 (1968). [Доп. 33.1.]

107. *Carter B.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 331 (1970). [Доп. 33.1.]
108. *Hawking S.W., Ellis G.F.R.*, The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973. [§ 34.1, 34.6, доп. 33.1.]
109. *Penrose R.*, Nuovo Cimento, **1**, special number, 252 (1969). [§ 33.7, доп. 33.2, 33.4, 34.2.]
110. *Carter B.*, Phys. Rev., **141**, 1242 (1966). [Доп. 33.2.]
111. *Carter B.*, Phys. Rev., **174**, 1559 (1968). [§ 33.5, доп. 33.2, упр. 33.7.]
112. *Cohen J.M., Wald R.M.*, Journ. Math. Phys., **12**, 1845 (1971). [Доп. 33.2.]
113. *Hanni R.S., Ruffini R.*, Phys. Rev., **8D**, 3259 (1973). [Доп. 33.2.]
114. *May M., White R.H.*, Meth. Computat. Phys., **73**, 219 (1967). [Доп. 33.3.]
115. *Ruffini R., Wheeler J.A.*, Relativistic cosmology and space platforms в книге Proceedings of the Conference of Space Physics, European Space Research Organization, Paris, 1971, p. 45. [Доп. 33.2, 33.3, 33.5, 36.3, упр. 37.13, 37.14.]
116. *Sanders R.*, Astrophys. Journ., **162**, 791 (1970). [Доп. 33.3.]
117. *Spitzer L., Jr.*, Dynamical evolution of dense spherical star systems, в книге Semaine d'étude sur les noyeaux des galaxies, 1970, Pointificae Academiae Scientarum Scripta Varia no. 35, 1971. [Доп. 33.3.]
118. *Lynden-Bell D.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **136**, 101 (1967). [Доп. 33.3.]
119. *Lynden-Bell D.*, Nature, 223, 690 (1969). [Доп. 33.3.]
120. *Colgate S.A.*, Astrophys. Journ., **150**, 163 (1967). [Доп. 33.3.]
121. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.*, Астрон. журн., **43**, 758 (1966). [Доп. 33.3.]
122. *Hawking S.W.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **152**, 75 (1971). [Доп. 33.3.]
123. *Peebles P.J.E.*, Gen. Rel. and Grav., 3, 63 (1972). [Доп. 33.3.]
124. *Vishveshwara C.V.*, Phys. Rev., **D 1**, 2870 (1970). [Доп. 33.3.]
125. *Regge T., Wheeler J.A.*, Phys. Rev., **108**, 1063 (1957). [Доп. 33.3, упр. 33.14.]
126. *Zerilli F.J.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 737 (1970). [Доп. 33.3.]
127. *Press W.H., Teukolsky S.A.*, Nature, 238, 211 (1972). [Доп. 33.3.]
128. *Press W.H., Teukolsky S.A.*, Astrophys. Journ. (1973). [Доп. 33.3, упр. 33.14.]
129. *Bardeen J.M.*, Nature, **226**, 64 (1970). [§ 33.8, доп. 33.3, 33.5.]
130. *Goldreich P., Julian W.H.*, Astrophys. Journ., **157**, 869 (1968). [Доп. 33.3.]
131. *Novikov I.D., Thorne K.S.*, Astrophysics of black holes в книге DeWitt C., DeWitt B.S., eds. Black Holes, Gordon and Breach, New York, 1973, p. 343. [Доп. 33.3].
132. *Дорошкевич А.Г.*, Астрон. журн., 43, 105 (1966). [Доп. 33.3].
133. *Godfrey B.B.*, Phys. Rev., **D1**, 2721 (1970). [Доп. 33.3.]
134. *Thorne K.S.*, Astrophys. Journ. **191**, 507 (1974). [Доп. 33.3.]
135. *Zerilli F.J.*, Phys. Rev., **D2**, 2141 (1970). [§ 36.5, фиг. 36.2, доп. 33.3.]
136. *Davis M., Ruffini R., Press W.H., Price R.H.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 1466 (1971). [§ 36.5, доп. 33.3, фиг. 36.2.]
137. *Press W.H.*, Astrophys. Journ. Lett., **170**, 105 (1971). [Доп. 33.3.]
138. *Goebel C.J.*, Astrophys. Journ., **172**, L95 (1972). [Доп. 33.3.]
139. *Wheeler J.A.*, Geometrodynamics, Academic Press, New York, 1962. [§ 44.3, фиг. 44.1, доп. 33.3, 36.2, 44.3.]
140. *Christodolou D.*, Investigations in Gravitational Collapse and the Physics of Black Holes, doctoral dissertation, Princeton Univ., 1971. [§ 35.8, доп. 33.3, 33.4, фиг. 33.3.]
141. *Ipser J.R.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 529 (1971). [§ 41.11, упр. 33.14, доп. 33.3.]
142. *Press W.H.*, Astrophys. Journ., **175**, 243 (1972). [Доп. 33.3.]
143. *Hawking S.W., Hartle J.B.*, Commun. Math. Phys., **27**, 283 (1972). [Доп. 33.3.]
144. *Wheeler J.A.*, Mechanisms for jets в книге Study week on nuclei of galaxies, Pontificiae Academiae Scientarum Scripta Varia, no. 35, 539, 1971. [Доп. 33.3.]

145. *Hoyle F., Fowler W.A., Burbidge G.R., Burbidge E.M.*, Astrophys. Journ., **139**, 909 (1964). [Доп. 33.3.]
146. *Zel'dovich Y.B., Guseynov O.H.*, Astrophys. Journ., **144**, 840 (1965). [Доп. 33.3.]
147. *Trimble V.L., Thorne K.S.*, Astrophys. Journ., **156**, 1013 (1969). [Доп. 33.3.]
148. *Pringle J.E., Rees M.J.*, Astron. Astrophys., **21**, 1 (1972). [Доп. 33.3.]
149. *Shakura N.I., Sunyaev R.A.*, Astron. Astrophys., **24**, 337 (1973). [Доп. 33.3.]
150. *Refsdal S.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **128**, 295 (1964). [Доп. 33.3.]
151. *Peebles P.J.E.*, Physical Cosmology, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971. (Имеется перевод: *Дж. Пиблс*, Физическая космология, изд-во «Мир», М., 1975.) [Доп. 33.3.]
152. *Lynden-Bell D., Rees M.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **152**, 461 (1971). [Доп. 33.3.]
153. *Bardeen J.M., Carter B., Hawking S.W.*, Commun. Math. Phys., **31**, 161 (1973). [Доп. 33.4.]
154. *Christodolou D.*, Phys., Rev. Lett., **25**, 1596 (1970). [§ 33.8, доп. 33.4.]
155. *Christodolou D., Ruffini R.*, Phys. Rev., **D4**, 3552 (1971). [§ 38.3, доп. 33.4, 33.5.]
156. *Hernandez W.C., Jr.*, Phys. Rev., **159**, 1070 (1967). [§ 33.3.]
157. *Walker M., Penrose R.*, Commun. Math. Phys., **18**, 265 (1970) [§ 33.4, 33.5.]
158. *Bardeen J.M.*, Astrophys. Journ., **162**, 71 (1970). [Упр. 33.3.]
159. *Bardeen J.M., Press W.H., Teukolsky S.A.*, Astrophys. Journ., **178**, 347 (1972). [§ 33.7, упр. 33.3, 33.14.]
160. *Goldstein H.*, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959. [§ 33.5, упр. 33.7.]
161. *Carter B.*, Common. Math. Phys., **10**, 280 (1968). [§ 33.5.]
162. *Corben H.C., Stehle P.*, Classical Mechanics, 2d ed., Wiley, New York, 1960. [Упр. 33.7.]
163. *Ehlers J., Kundt W.*, Exact solutions of the gravitational field equations в книге *Witten L.*, ed., Gravitation: An Introduction to Current Research, Wiley, New York, 1962. [§ 33.6, 35.9, упр. 35.8, 35.9.]
164. *Петров А.З.*, Доклады Казанского гос. университета, **114**, № 8, 55 (1954). [§ 33.6.]
165. *Петров А.З.*, Пространства Эйнштейна, Физматгиз, М., 1961. [§ 33.6.]
166. *Pirani F.A.E.*, Phys. Rev., **105**, 1089 (1957). [§ 33.6.]
167. *Kerr R.P., Schild A.*, A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations в книге Proceedings of the Galileo Galilei Centenary Meeting on General Relativity, Problems of Energy and Gravitational Waves, G. Barbera, ed., Comitato Nazionale per le Manifestazione Celebrative, Florence, pp. 222—233, 1965. [§ 33.6.]
168. *Ruffini R., Wheeler Y.A.*, Phys. Today, **24**, 30, 1971. [§ 33.7.]
169. *Hartle J.B.*, Astrophys. Journ., **161**, 111 (1970). [Упр. 33.13.]
170. *Ostriker J.P., Gunn J.E.*, Astrophys. Journ., **157**, 1395 (1969). [Упр. 33.13.]
171. *Teukolsky S.A.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1114 (1972). [§ 41.11, упр. 33.14.]
172. *Teukolsky S.A.*, Astrophys. Journ., **185**, 635 (1973). [Упр. 33.14.]
173. *Meixner J., Schäfke F.W.*, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1954. [Упр. 33.14.]
174. *Brill D.R., Chrzanowski P.L., Pereira C.M., Fackerell E.D., Ipser J.R.*, Phys. Rev., **D5**, 1913 (1972). [Упр. 33.14.]
175. *Misner C.W.*, Bull. Am. Phys. Soc. (II), **17**, 472 (1972). [Упр. 33.14.]
176. *Chrzanowski P.L., Misner C.W.*, Phys. Rev., **D10**, 1701 (1974). [Упр. 33.14.]
177. *De Felice F.*, Nuovo Cimento, **B57**, 351 (1968). [Доп. 33.5.]
178. *Wilkins D.*, Phys. Rev., **D5**, 814 (1972). [Доп. 33.5.]
179. *Geroch R.P.*, Spacetime structure from a global viewpoint в книге Sachs

R. K., ed., General Relativity and Cosmology, Academic Press, New York, 1971. [§ 34.1.]
180. *Penrose R.* в книге DeWitt and Wheeler (1968). [§ 34.1, 34.4, 41.7, 41.11, доп. 34.1, 34.2, 44.3.]
181. *Penrose R.* в книге Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity, Springer, Berlin, 1972. [§ 34.1.]
182. *Hawking S.W.*, The Event Horizon в книге DeWitt C., DeWitt B.S., eds., Black Holes, Gordon and Breach, New York, 1973. [§ 34.1, 34.5.]
183. *Godfrey B.B.*, A Survey of the Mathematical Properties of Static Axisymmetric Vacuum Spacetimes, doctoral dissertation, Princeton University, 1970. [§ 34.1.]
184. *Penrose R.*, Conformal treatment of infinity в книге DeWitt C., DeWitt B.S., eds., Relativity, Groups and Topology, Gordon and Breach, New York, 1964. [§ 34.2.]
185. *Новиков И.Д.*, Письма в ЖЭТФ, **3**, 223 (1966). [§ 34.6, фиг. 34.4.]
186. *Новиков И.Д.*, Астр. журн., 43, 911 (1966). [§ 34.6, фиг. 34.4.]
187. *De la Cruz V., Israel W.*, Nuovo Cimento, **A51**, 744 (1967). [§ 34.6, фиг. 34.4.]
188. *Bardeen J.M.*, Bull. Am. Phys. Soc. **13**, 41, 1968 [§ 34.6, фиг. 34.4.]
189. *Новиков И.Д.*, Астр. журн., 41, 1075 (1964). [§ 34.3.]
190. *Ne'eman Y.*, Astrophys. Journ., **141**, 1303 (1965). [§ 34.3.]
191. *Wallace A.H.*, An Introduction to Algebraic Topology, Pergamon, London, 1957. [Доп. 34.1.]
192. *Kelley J.L.*, General Topology, Van Nostrand, New York, 1955. [Доп. 34.1.]
193. *Hawking S.W., Penrose R.*, Proc. Roy. Soc. London, **A314**, 529 (1969). [§ 34.6, 44.1.]
194. *Geroch R.P.*, Ann. Phys. (USA), **48**, 526 (1968). [§ 34.6.]
195. *Schmidt B.G.*, Gen. Rel. Grav., **1**, 269 (1971). [§ 34.6.]
196. *Oppenheimer J.R., Snyder H.*, Phys. Rev., **56**, 455 (1939). [§ 34.6.]
197. *Подурец М.А.*, ДАН СССР, **167**, 1025 (1966). [§ 34.6.]
198. *Лифшиц Е.М., Халатников И.М.*, Advances in Physics, **12**, 185 (1963). [§ 34.6.]
199. *Лифшиц Е.М., Халатников И.М.*, Усп. физ. наук, 80, 391 (1963). [§ 34.6.]
200. *Misner C.W.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 1071 (1969). [§ 34.6.]
201. *Белинский В.А., Халатников И.М.*, ЖЭТФ, **56**, 1700 (1969). [§ 34.6.]
202. *Белинский В.А., Халатников И.М.*, ЖЭТФ, **57**, 2163 (1969). [§ 34.6.]
203. *Белинский В.А., Халатников И.М.*, ЖЭТФ, **59**, 314 (1970). [§ 34.6.]
204. *Халатников И.М., Лифшиц Е.М.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 76 (1970). [§ 34.6.]
205. *Misner C.W., Taub A.H.*, ЖЭТФ, 55, 233 (1968). [§ 34.6.]
206. *Wheeler J.A.*, Geometrodynamics and the issue of the final state в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B.S., Gordon and Breach, New York, 1964. [§ 34.6, 35.13, 42.1, 42.6, 43.1, доп. 44.4.]
207. *Misner C.W.*, Phys. Rev., **186**, 1328 (1969). [§ 34.6.]
208. *Infeld L., ed.*, Conference Internationale sur les theories relativistes de la gravitation, Gauthier-Villars, Paris, France, 1964. [Доп. 34.2.]
209. *Penrose R.*, An analysis of the structure of spacetime, Adams Prize Essay, 1966. [Доп. 34.2.]
210. *Klauder J., ed.*, Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, W.H. Freeman, San Francisco, 1972. [Доп. 34.2.]
211. *Penrose R., MacCallum M.A.H.*, Physics Reports, 6C, no. 4, 242 (1973). [Доп. 34.2.]
212. *Penrose R.*, Int. Journ. Theor. Phys., **1**, 61 (1968). [Доп. 34.2.]
213. *Hawking S.W.*, Observatory, 89, 38 (1969). [Доп. 34.3.]
214. *Hawking S.W.*, «Singularities and the geometry of space-time», Adams Prize Essay, Cambridge University, Cambridge, England, 1966. [§ 34.3.]

215. *Hawking S.W.*, Contemp. Phys., **13**, 273 (1972). [Доп. 34.3.]
216. *Hawking S.W., Ellis G.F.R.*, Astrophys. Journ., **152**, 25 (1968). [Доп. 34.3.]
217. *Hawking S.W.*, Proc. Roy. Soc. London, **A294**, 511 (1966). [Доп. 34.3.]
218. *Collins C.B., Hawking S.W.*, Astrophys. Journ., **180**, 317 (1973). [Доп. 34.3.]
219. *Einstein A.*, Phys. Zs., **14**, 1249, 1913, discussion 1262. [Эпиграф к гл. 35.]
220. *Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.* в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, New York, 1962, p. 227. [§ 35.4.]
221. *Papapetrou A.*, Ann. Phys. (Germany) **2**, 87 (1958). [§ 35.8.]
222. *Misner C.W.*, Waves, Newtonian fields, and coordinate functions в книге Infeld L., ed., Conférence Internationale sur les théories relativistes de la gravitation, Gauthier-Villars, Paris, 1964. [§ 35.8.]
223. *Riesz M.*, Acta Math., **81**, 1 (1949). [§ 35.8.]
224. *DeWitt B.S., Brehme R.W.*, Ann. Phys. (USA), 9, 220 (1960). [§ 35.8,]
225. *DeWitt C., DeWitt B.S.*, Physics, **1**, 3 (1964). [§ 35.8.]
226. *Kundt W., Newman E.T.*, Journ. Math. Phys., 9, 2193 (1968). [§ 35.8.]
227. *Couch W.E., Torrence R.J., Janis A.I., Newman E.T.*, Journ. Math. Phys., 9, 484 (1968). [§ 35.8, 35.14.]
228. *Ruffini R., Wheeler J.A.*, Bull. Am. Phys. Soc., **15**, 76 (1970). [§ 35.8.]
229. *Bondi H., Pirani F.A.E., Robinson I.*, Proc. Roy. Soc. London, **A 251**, 519 (1959). [§ 35.9.]
230. *Isaacson R.A.*, Phys. Rev., **166**, 1263 (1968). [§ 35.13.]
231. *Isaacson R.A.*, Phys. Rev., **166**, 1272 (1968). [§ 35.13, упр. 35.14.]
232. *Brill D.R., Hartle J.B.*, Phys. Rev., **B135**, 271 (1964). [§ 35.13.]
233. *Choquet-Bruhat Y.*, Commun. Math. Phys., **12**, 16 (1969). [§ 35.13.]
234. *Унт В., Керес П.*, Изв. АН Эстонской ССР, Физ.-мат., **21**, 17 (1972). [§ 35.14.]
235. *Synge J.L.*, Proc. Roy. Irish Acad., **A 61**, 29 (1960). [Упр. 35.14.]
236. *Peters P.C.*, Phys. Rev., **B136**, 1224 (1964). [§ 36.1, 36.7, 36.8.]
237. *Peres A., Rosen N.*, Ann. Phys., (USA), **10**, 94 (1964). [§ 36.1, 36.8.]
238. *Couch W.E., Newman E.T.*, Journ. Math. Phys., **13**, 929 (1972). [§ 36.1.]
239. *Lefschetz S.*, Introduction to Topology, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1949. [§ 36.1.]
240. *Press W.H., Thorne K.S.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 335 (1972). (Имеется перевод: Усп. физ. наук, **110**, 569 (1973).) [§ 36.5, 37.4, 37.8, доп. 37.5.]
241. *Wheeler J.A.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., **4**, 393 (1966). [Упр. 36.3.]
242. *Ferrari A., Ruffini R.*, Astrophys. Journ. Letters, **158**, L71 (1969). [Упр. 36.4.]
243. *Ipser J.R.*, Astrophys. Journ., **166**, 175 (1970). [Упр. 36.4.]
244. *Thorne K.S.*, Astrophys. Journ., **158**, 1 (1969). [Доп. 36.1.]
245. *Hartle J.B., Thorne K.S.*, Astrophys. Journ., **153**, 807 (1968). [Доп. 36.1.]
246. *Allen C.W.*, Astrophysical Quantities, Univ. of London, Athlone Press, London, 1963. (Имеется перевод 1-го издания: *К. Аллен.* Астрофизические величины, ИЛ, М., 1960). [§ 36.6, форзац.]
247. *Peters P.C., Mathews J.*, Phys. Rev., **131**, 435 (1963). [§ 36.6, упр. 36.6.]
248. *Van de Kamp P.*, Ann. Phys. (USA), **50**, 187 (1958). [Доп. 36.3.]
249. *Gaposchkin S.*, Hundbuch der Physik, **50**, 225 (1958). [Доп. 36.3.]
250. *Брагинский В.Б.*, Усп. физ. наук, **86**, 433 (1965). [Доп. 36.3.]
251. *DeWitt B.S.*, Lectures on Relativity—Stanford, Fall 1971. [§ 36.7.]
252. *Burke W.L.*, Phys. Rev., **A2**, 1501 (1970). [§ 36.8.]
253. *Thorne K.S.*, Astrophys. Journ., **158**, 997 (1969). [§ 36.8.]
254. *Chandrasekhar S., Esposito F.P.*, Astrophys. Journ., **160**, 153 (1970). [§ 36.8, доп. 39.3.]
255. *Burke W.L.*, Journ. Math. Phys., **12**, 402 (1971). [§ 36.8.]

256. *Thomson W.*, *Lord Kelvin*, Popular Lectures and Addresses, Vol. 1, Macmillan, London, 1889. [Эпиграф к гл. 37.]
257. *Press W.H.*, неопубликованная работа, частично описанная в работе [240], 1970. [§ 37.3. фиг. 37.2. доп. 37.2.]
258. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 498 (1967). [§ 37.3, фиг. 37.2.]
259. *Dyson F.J.*, Astrophys. Journ., **156**, 529 (1969). [§ 37.3, фиг. 37.2.]
260. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 1320 (1969). [§ 37.3, фиг. 37.2.]
261. *Douglass D.H.*, Jr., Properties of «Hollow square» gravitational wave detectors в книге *Davies R.W.*, ed., Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories., November 11—13, 1970, California, Institute of Technology, J.P.L., 1971. [§ 37.3., фиг. 37.2.]
262. *Брагинский В.Б.*, *Зельдович Я.Б.*, *Руденко В.Н.*, Письма в ЖЭТФ, **10**, 437 (1969). [§ 37.3, фиг. 37.2.]
263. *Weber J.*, Phys. Rev., **117**, 307 (1960). [§ 37.3.]
264. *Weber J.*, General Relativity and Gravitational Waves, Wiley-Interscience, New York, 1961. [§ 37.3.]
265. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 276 (1970). [§ 37.3.]
266. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 180 (1970). [§ 37.3.]
267. *Douglass D.H.*, Jr., *Tyson J.A.*, Nature, **229**, 34 (1971). [§ 37.3.]
268. *Брагинский В.Б.*, *Назаренко В.С.*, О детектировании гравитационного излучения от некоторых астрономических источников с помощью гетеродинного детектора в книге *Davies R.W.*, ed. 1971, Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, November 11—13, 1970, p. 45. [§ 37.3.]
269. *Blatt J.M.*, *Weisskopf V.F.*, Theoretical Nuclear Physics, Wiley, New York. 1952. [§ 37.7.]
270. *Barschall H.H.*, *Haeberli W.*, The Madison Convention в книге Polarization Phenomena in Nuclear Reactions, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1971, p. XXV. [§ 37.7.]
271. *Bolt B.A.*, Recent information of the earth's interior from studies of mantle waves and eigenvibrations в книге *Ahrens L.H.*, *Press F.*, *Runcorn S.K.*, eds. Physics and Chemistry of the Earth, Pergamon Press, London, 1964, [Упр. 37.14.]
272. *Press F.*, Sci. American, **213**, no. 5, 28 (1965). [Упр. 37.14.]
273. *Davenport W.B.*, *Root W.L.*, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw Hill, New York, 1958. [§ 37.8.]
274. *Blackman R.B.*, *Tukey J.W.*, The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering, Dover, New York 1959. [§ 37.8.]
275. *Брагинский В.Б.*, Физические эксперименты с пробными телами, издво «Наука», М., 1970. [§ 37.8.]
276. *Брагинский В.Б.*, *Менский М.Б.*, Письма в ЖЭТФ, **13**, 585 (1971). [§ 37.9, доп. 37.6.]
277. *Dicke R.H.*, The Theoretical Significance of Experimental Relativity, Gordon and Breach, New York, 1964. [§ 38.2, 38.7, 44.6, доп. 40.1.]
278. *Thorne K.S.*, *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **163**, 595 (1971). [§ 38.2, 39.2.]
279. *Will C.M.*, Caltech preprint, 289, 1972. [§ 38.2, 39.3, доп. 39.5, упр. 39.15.]
280. *Eddington A.S.*, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng., 1922. [§ 38.2, 39.3.]
281. *Robertson H.P.*, Relativity and Cosmology в книге Deutsch A.I., Klemperer W.B., Space Age Astronomy, Academic Press, New York, 1962, p. 228. [§ 38.2, 39.3.]
282. *Schiff L.I.*, Journ. Indust. Appl. Math., **10**, 795 (1962). [§ 38.2, 39.3.]
283. *Schiff L.I.*, Comparison of theory and observation in general relativity в книге Enlers J., ed., Relativity Theory and Astrophysics, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967. [§ 38.2, 39.3.]
284. *Nordtvedt K.*, Phys. Rev., **169**, 1017 (1968). [§ 38.2, 39.3, 40.9, доп. 39.5.]
285. *Nordtvedt K.*, Jr., Phys. Rev., **180**, 1293 (1969). [§ 38.2, 39.3.]

286. *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **163**, 611 (1971). [§ 38.2, 39.3, доп. 39.5.]
287. *Will C.M.*, *Nordtvedt K.*, Jr., Astrophys. Journ., **177**, 757 (1972). [§ 38.2, 39.3, 39.9, доп. 39.1, 39.5.]
288. *Brans C.*, *Dicke R.H.*, Phys. Rev., **124**, 925 (1961). [§ 38.2, 40.8, доп. 38.3, 39.1.]
289. *Jordan P.*, Z. Phys., **157**, 112 (1959). [§ 38.2, 38.6, 44.6, доп. 39.1.]
290. *Bergmann P.G.*, Int. Journ. Theor. Phys., **1**, 25 (1968). [§ 38.2.]
291. *Whitehead A.N.*, The Principle of Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Englad, 1922. [§ 38.2, 39.1, 39.3, 39.8.]
292. *Whitrow G.J.*, *Morduch G.E.*, Vistas in Astronomy, **6**, 1 (1965). [§ 38.2.]
293. *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **169**, 141 (1971). [§ 38.2, 39.1, 40.8, доп. 39.5.]
294. *Ni W.T.*, Astrophys. Journ., **176**, 769 (1972). [§ 38.2, 39.2, 40.1, 40.5, 40.8, доп. 39.1, 39.2, 39.5.]
295. *Cartan E.*, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, **174**, 593 (1922). [§ 38.2, 39.2.]
296. *Trautman A.*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences (math., astr., phys.), **20**, 185 (1972). [§ 38.2, 39.2.]
297. *Eötvös R.V.*, *Pekár D.*, *Fekete E.*, Ann. Phys. (Germany), **68**, 11 (1922). [§ 38.3, доп. 38.2.]
298. *Roll P.G.*, *Krotkov R.*, *Dicke R.H.*, Ann. Phys. (USA), **26**, 442 (1964). [§ 38.3.]
299. *Брагинский В.Б.*, *Панов В.И.*, ЖЭТФ, **61**, 873 (1971). [§ 38.3.]
300. *Fejér L.*, *Mikola S.*, eds., Báró Eötvös Loránd Füzet, Matem. Fiz. Lapok 27, Nos. 6—7, Oct.-Nov. 1918. [Доп. 38.2.]
301. *Dicke R.H.*, Phys. Rev., 93, 99 (1954). [Доп. 38.3.]
302. *Dicke R.H.*, Journ. Opt. Soc. Am., **47**, 527 (1957). [Доп. 38.3.]
303. *Dicke R.H.*, Nature, **202**, 432 (1964). [Доп. 38.3.]
304. *Dicke R.H.*, *Goldenberg H.M.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 313 (1967). [Доп. 38.3, 40.3.]
305. *Dicke R.H.*, Nature, **192**, 440 (1961). [§ 44.6, доп. 38.3.]
306. *Dicke R.H.*, *Peebles P.J.E.*, Phys. Rev., **128**, 2006 (1962). [§ 38.6, доп. 38.3.]
307. *Farley F.J.M.*, *Bailey J.*, *Brown R.C.A.*, *Giesch M.*, *Jöstlein H.*, *van der Meer S.*, *Picasso E.*, *Tannenbaum M.*, Nuovo Cimento, **45**, 281 (1966). [§ 38.4.]
308. *Frisch D.H.*, *Smith J.H.*, Am. Journ. Phys., **31**, 342 (1963). [§ 38.4.]
309. *Durbin R.P.*, *Loar H.H.*, *Havens W.W.*, Jr., Phys. Rev., 88, 179 (1952). [§ 38.4.]
310. *Rossi B.*, *Hall D.B.*, Phys. Rev., 59, 223 (1941). [§ 38.4.]
311. *Lichtenberg D.B.*, Meson and Baryon Spectroscopy, Springer-Verlag, New York, 1965. [§ 38.4.]
312. *Pound R.V.*, *Rebka G.A.*, Phys. Rev. Lett., 4, 337 (1960). [§ 38.5, фиг. 38.1.]
313. *Pound R.V.*, *Snider J.L.*, Phys. Rev., **B140**, 788 (1965). [§ 38.5, фиг. 38.1.]
314. *Brault J.W.*, The Gravitational Redshift in the Solar Spectrum, doctoral dissertation, Princeton Univ., 1962. Abstract: Bull. Amer. Phys. Soc., 8, 28 (1963). [§ 38.5, фиг. 38.2.]
315. *Bertotti B.*, *Brill D.R.*, *Krotkov R.*, Experiments on gravitation в книге Witten L., ed., Gravitation: An Introduction to Current Research, Wiley, New York, 1962. [§ 38.5, доп. 40.1.]
316. *Dirac P.A.M.*, Nature, **139**, 323 (1937). [§ 38.6, 44.6.]
317. *Dirac P.A.M.*, Proc. Roy Soc. London, **A165**, 199 (1938). [§ 38.6, 44.6.]
318. *Teller E.*, Phys. Rev., **73**, 801 (1948). [§ 38.6.]
319. *Jordan P.*, Schwerkraft und Weltall, Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1955. [§ 38.6, 44.6.]
320. *Gamov G.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 759 (1967). [§ 38.6.]
321. *Bahcall J.N.*, *Sargent W.L.W.*, *Schmidt M.*, Astrophys. Journ., **149**, 11 (1967). [§ 38.6.]

322. *Bahcall J.N.*, *Schmidt M.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1294 (1967). [§ 38.6.]
323. *Dyson F.J.*, The fundamental constants and their time variation в книге *Salam A.*, *Wigner E.P.*, eds., Aspects of Quantum Theory, Cambridge University Press, Cambridge Eng., 1972. [§ 38.6.]
324. *Minkowski R.*, *Wilson O.C.*, Astrophys. Journ., **123**, 373 (1956). [§ 38.6.]
325. *Dicke R.H.*, Nature, **183**, 170 (1959). [§ 38.6.]
326. *Dicke R.H.*, Science, **129**, 621 (1959). [§ 38.6, 44.6.]
327. *Dicke R.H.*, Gravitation and the Universe, American Philosophical Society, Philadelphia, 1969. [§ 38.6.]
328. *Hughes V.W.*, *Robinson H.G.*, *Beltran-Lopez V.B.*, Phys. Rev. Lett., **4**, 342 (1960). [§ 38.7.]
329. *Drever R.W.*, Phil. Mag., **6**, 683 (1961). [§ 38.7.]
330. *Dicke R.H.*, *Peebles P.J.E.*, Phys. Rev., **127**, 629 (1962). [§ 38.7.]
331. *Turner K.C.*, *Hill H.A.*, Phys. Rev., **B 134**, 252 (1964). [§ 38.7, фиг. 38.3.]
332. *Fierz M.*, *Pauli W.*, Proc. Roy. Soc., London, **A, 173**, 211 (1939). [§ 39.1.]
333. *Kustaanheimo P.*, Phys. Lett., **23**, 75 (1966). [§ 39.1.]
334. *Birkhoff G.D.*, Matter, electricity and gravitation in flat spacetime, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **29**, 231, 1923. [§ 39.1.]
335. Cartan E., Ann. Ecole Norm. Sup., **40**, 325 (1923). [§ 39.2.]
336. *Ni W.-T.*, работа, доложенная К.С. Торном на конференции NASA — ESPO по экспериментальным проверкам теории тяготения, California Institute of Technology, November 1970. [§ 39.2, доп. 39.1.]
337. *Nordtvedt K.*, Jr., *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **177**, 775 (1972). [§ 39.2, 40.5, 40.8, доп. 39.5.]
338. *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **185**, 31 (1973). [§ 39.3, 39.8.]
339. *Shapiro I.I.*, Gen. Rel. Grav., **3**, 135 (1972). [§ 39.3, доп. 40.3.]
340. *Chandrasekhar S.*, Astrophys. Journ., **142**, 1488 (1965). [§ 39.3, доп. 39.3, упр. 39.14.]
341. *Chandrasekhar S.*, Astrophys., Journ., **142**. 1513 (1965). [§ 39.3.]
342. *Chandrasekhar S.*, Astrophys. Journ., **142**, 1519 (1965). [§ 39.3.]
343. *Chandrasekhar S.*, *Contopolous G.*, Proc. Roy. Soc. London, **A298**, 123 (1967). [§ 39.3, 39.9.]
344. *Dicke R.H.*, Phys. Rev., **125**, 2163 (1962). [Доп. 39.1.]
345. *Фок В.А.*, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1959. [Доп. 39.3, упр. 39.15.]
346. *Chandrasekhar S.*, *Nutku Y.*, Astrophys. Journ., 158, 55 (1969). [Доп. 39.3.]
347. *Chandrasekhar S.*, *Lebovitz N.R.*, Astrophys. Journ., **152**, 267 (1968). [Упр. 39.7.]
348. *Ni W.-T.*, Astrophys. Journ., **181**, 939 (1973). [Доп. 39.5, упр. 39.7.]
349. *Einstein A.*, *Infeld L.*, *Hoffmann B.*, Ann. Math., **39**, 65 (1938). [Упр. 39.15.]
350. *Eddington A.*, *Clark G.*, Proc. Roy. Soc., **A 166**. 465 (1938). [Упр. 39.15.]
351. *Estabrook F.B.*, Astrophys. Journ., **158**, 81 (1969). [Упр. 39.15.]
352. *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **169**, 125 (1971). [§ 39.9, доп. 39.5].
353. *Will C.M.*, Astrophys. Journ., **165**, 409 (1971). [Доп. 39.5.]
354. *Thorne K.S.*, *Ni W.T.*, *Will C.M.*, Theoretical frameworks for testing relativistic gravity в книге Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories. California Institute of Technology, J.P.L. Technical Memorandum, 1971, p. 10. [Доп. 39.5.]
355. *Nordtvedt K.*, Icarus, **12**, 91 (1970). [§ 40.8, доп. 39.5.]
356. *Nordtvedt K.*, Phys. Rev., **D3**, 1683 (1971). [§ 40.8, доп. 39.5.]
357. *Nordtvedt K.* в книге *Davies R.W.*, ed., Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, November 11-13, 1970, California Institute of Technology, J.P.L. Technical Memorandum, 1971, p. 32, 1971. [§ 40.9, доп. 39.5.]
358. *Ohandley D.A.*, *Holcridge D.B.*, *Melbourne W.G.*, *Mulholland J.D.*, J.P.L. Development Ephemeris №. 69, J.P.L. Technical Report 32-1465, Caltech Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, 1969. [§ 40.1.]

359. *Anderson J.D.* в книге *Bertotti B.*, ed., Proceedings of Course 56 of the, International School of Physics Enrico Fermi, Academic Press, New York, 1973. [§ 40.1.]
360. *Ward W.*, Astrophys. Journ., **162**, 345 (1970). [§ 40.3.]
361. *Shapiro I.I.*, Science, **157**, 806 (1967). [§ 40.3.]
362. *Klüber H.V.*, Vistas in Astronomy (London, Pergamon Press) 3, 47 (1960). [Доп. 40.1.]
363. *Campbell W.W., Trumpler R.J.*, Lick Obs. Bull., **13**, 130 (1928). [Доп. 40.1.]
364. *Seielstad G.A., Sramek R.A., Weiler K.W.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1373 (1970). [Доп. 40.1.]
365. *Muhleman D.O., Ekers R.D., Fomalont E.B.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1377 (1970). [Доп. 40.1.]
366. *Sramek R.A.*, Astrophys. Journ. Lett., **167**, L55 (1971). [Доп. 40.1.]
367. *Hill J.M.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **154**, 7P (1971). [Доп. 40.1.]
368. *Shapiro I.I.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 789 (1964). [§ 40.4.]
369. *Muhlemann D.O., Reichley P.*, JPL Space Programs Summary **4**, no. 37-29, p. 239 (1964). [§ 40.4.]
370. *Muhlemann D.O., Reichley P.*, JPL Space Programs Summary **4**, no. 37-31, p. 342 (1965). [§ 40.4.]
371. *Shapiro I.I.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1265 (1968). [Доп. 40.2.]
372. *Shapiro I.I., Ash M.E., Campbell D.B., Dyce R.B., Ingalls R.P., Jurgens R.F., Pettengill G.H.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1132 (1971). [Доп. 40.2.]
373. *Anderson J.D., Esposito P.B., Martin W.L., Muhleman D.O.* в книге Proceedings Conf. on Experimental Tests of Gravitational Theories, 1971, p. 111. [Доп. 40.2.]
374. *Coleman C.J.*, Journ. Phys. **A4**, 611 (1971). [§ 40.5.]
375. *Clemence G.M.*, Astron. Papers Am. Ephemeris, **11**, 1 (1943). [Доп. 40.3.]
376. *Clemence G.M.*, Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1947). [Доп. 40.3.]
377. *Shapiro I.I.*, Results Reported at Third Cambridge Conference on Experimental Relativity, New York City, June 1970. [Доп. 40.3.]
378. *Shapiro I.I.* в книге *Davies R.W.*, ed., Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, November 11-13, 1970, California Institute of Technology, JPL Technical Memorandum, 33-499, 1971, pp. 136-147. [Доп. 40.3.]
379. *Shapiro I.I., Pettengill G.H., Ash M.E., Ingalls R.P., Campbell D.B., Dyce R.B.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1594 (1972). [Доп. 40.3.]
380. *Брумберг В.А.*, Бюллютень Инст. Теор. Астрономии АН СССР, **6**, 733 (1958). [§ 40.6.]
381. *Baierlein R.F.*, Phys. Rev., **162**, 1275 (1967). [§ 40.6.]
382. *Krogh C., Baierlein R.*, Phys. Rev., **175**, 1576 (1968). [§ 40.6.]
383. *De Sitter W.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 77, 155; 481 (1916). [§ 40.6., 40.7.]
384. *Ruark A.E.*, Urey H.C., Atoms, Molecules, and Quanta, McGraw-Hill, New York, 1930. [§ 40.7, 41.4.]
385. *Thomas L.H.*, Phil. Mag., 3, 1 (1927). [§ 40.7.]
386. *Thorne K.S.* в книге Sachs R.K., ed., General Relativity and Cosmology, Academic Press, New York, 1971, pp. 238-283. [§ 40.7.]
387. *Everitt C.W.F., Fairbank W.M., Hamilton W.O.*, General relativity Experiments Using Low-Temperature Techniques в книге *Carmeli M.S., Fickler S.I., Witten L.*, Relativity, Plenum., New York, 1970, p. 145. [§ 40.7.]
388. *O'Connell R.F.*, Gen. Rel. and Grav., 3, 123 (1972). [§ 40.7, упр. 40.8.]
389. *Thirring H., Lense J.*, Phys. Zs., **19**, 156 (1918). [§ 40.7.]
390. *Brill D.R., Cohen J.M.*, Phys. Rev., **143**, 1011 (1966). [§ 40.7.]
391. *Papapetrou A.*, Proc. Roy. Soc., **A209**, 248 (1951). [Упр. 40.8.]
392. *Pirani F.A.E.*, Acta Phys. Pol., **15**, 389 (1956). [Упр. 40.8.]
393. *DeWitt B.S.*, The quantization of geometry в книге *Witten L.*, ed., Gravitation: An Introduction to Current Research, Wiley, New York, 1962. [Упр. 40.8.]
394. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **130**, 800 (1963). [Упр. 40.8.]
395. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **130**, 1253 (1963). [Упр. 40.8.]

396. *Heisenberg W., Euler H.*, Zs. Phys., **98**, 714 (1936). [Упр. 40.8.]
397. *Cavendish H.*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Part II, p. 469, 1798. [§ 40.8.]
398. *Rose R.D., Parker H.M., Lowry R.A., Kuhlthau A.R., Beams J.W.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 655 (1969). [§ 40.8.]
399. *Dicke R.H., Peebles P.J.E.*, Space Sci. Rev., **4**, 419 (1965). [§ 40.8.]
400. *Shapiro I.I., Smith W.B., Ash M.E., Ingalls R.P., Pettengill G.H.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 27 (1971). [§ 40.8.]
401. *Beams J.W.*, Phys. Today, **24**, 35 (1971). [§ 40.8.]
402. *Paparetrou A.*, Math. Nachr., **12**, 129 (1954). [§ 40.8.]
403. *Papapetrou A.*, Math. Nachr., **12**, 143 (1954). [§ 40.8.]
404. *Papapetrou A.*, Zs. Phys., **139**, 518 (1954). [§ 40.8.]
405. *Kreuzer L.B.*, Phys. Rev., **169**, 1007 (1968). [§ 40.8.]
406. *Taub A.H.*, Equations of motion of test particles, London, 1965. [§ 40.9.]
407. *Dicke R.H.*, Remarks on the observational basis of general relativity в книге *Chiu* and *Hoffman*, eds., Gravitation and Relativity, Benjamin, New York, 1964, p. 1, 1964. [§ 40.9.]
408. *Nordtvedt K.*, Phys. Rev., **169**, 1014 (1968). [§ 40.9.]
409. *Bender P.L., Dicke R.H., Wilkinson D.T., Alley C.O., Currie D.G., Faller J.E., Mulholland J.D., Silverberg E.C., Plotkin H.E., Kaulla W.M., McDonald G.J.F.*, The lunar laser-ranging experiment в книге *Davies*, ed., Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, 1970, California Inst. of Technology, 1971. [§ 40.9.]
410. *Aharonov Y., Susskind L.*, Phys. Rev., **158**, 1237 (1967). [§ 41.5.]
411. *Pirani F.A.E.* в книге *Trautman A., Pirani F.A.E., Bondi H.*, Lectures on General Relativity, Brandeis 1964 Summer Institute on Theoretical Physics, vol I, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, N.J., 1965, p. 249, 1965. [§ 41.7, 41.11.]
412. *Penrose R.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **55**, 137 (1959). [§ 41.10.]
413. *Wheeler J.A.*, Transcending the law of conservation of leptons в книге Atti del Convegno Internazionale sul Tema: The Astrophysical Aspects of the Weak Interactions, Quaderno N. 157, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1971, p. 133. [§ 41.11, 44.6.]
414. *Brill D.R., Wheeler J.A., Rev.* Mod. Phys., **29**, 465 (1957). [§ 41.11.]
415. *Fackerell E.D., Ipser J.R.*, Phys. Rev., **D5**, 2455 (1972). [§ 41.11.]
416. *Cartan E.*, Theory of Spinors, M.I.T. Press. Cambridge. Mass., 1966. [§ 41.11.]
417. *Regge T.*, Nuovo Cimento. **19**, 558 (1961). [§ 42.1, 42.2, 42.4, 42.6.]
418. *Coxeter H.S.M.*, Regular Polytopes, Macmillan, New York, 2d ed., 1963. [§ 42.5.]
419. *Wong C.-Y.*, Journ. Math. Phys., **12**, 70 (1971). [§ 42.6, 42.7.]
420. *Machado A.*, Proverbios y cantares XXIX in his Obras, Editorial Seneca, Mexico, pp. 235-236, 1940. [Эпиграф к гл. 43.]
421. *Einstein A.*, Essays in Science, Philosophical Library, New York, 1934. Translated from Mein Weltbilde, Querido Verlag, Amsterdam, 1933. [§ 43.1, 44,6.]
422. *Wheeler J.A.*, Mach's Principle as Boundary Condition for Einstein's Equations в книге *Chiu H.-Y., Hoffman W.F.*, eds., Gravitation and Relativity, Benjamin, New York, 1964. [§ 43.1.]
423. *Wheeler J.A.*, View that the distribution of mass and energy determines the metric в книге Onzieme Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers, Edition Stoops, Brussels, Belgium, 1959. [§ 43.1.]
424. *Hönl H.*, Allgemeine Relativitätstheorie und Machsches Prinzip в книге Physikertagung Wien, Physik Verlag, Mosbach, Baden, Germany, 1962. [§ 43.1.]
425. *DeWitt B.S.*, Phys. Rev., **160**, 1113 (1967). [§ 43.1, 43.3.]
426. *DeWitt B.S.*, Phys. Rev., **162**, 1195 (1967). [§ 43.1, 43.3.]
427. *Wheeler J.A.*, Superspace в книге *Gilbert R.P., Newton R.*, Analytic Methods in Mathematical Physics, p. 335, Gordon and Breach, New York, 1970. [§ 43.1.]

428. *Fischer A.E.*, The theory of superspace в книге *Carmeli M.*, *Fickler S.I.*, *Witten L.*, Relativity, Plenum, New York, 1970. [§ 43.1.]
429. *Baierlein R.F.*, *Sharp D.H.*, *Wheeler J.A.*, Phys. Rev., **126**, 1864 (1962). [§ 43.2.]
430. *Bohr N.*, *Rosenfeld L.*, Kgl. Danske Videnskab Sels. Mat.-fys. Medd. **12**, no. 8 (1933). [§ 43.2.]
431. *Боголюбов Н.Н.*, *Ширков Д.В.*, Введение в теорию квантованных полей, М., 1959. [§ 43.3.]
432. *Peres A.*, Nuovo Cimento, **26**, 53 (1962). [§ 43.3.]
433. *Gerlach U.*, Phys. Rev. **177**, 1929 (1969). [§ 43.3.]
434. *DeWitt B.S.*, Phys. Rev., **160**, 1113 (1967). [§ 43.3.]
435. *Leutwyler H.* в книге *DeWitt C.*, *Wheeler J.A.*, eds., Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics, Benjamin, New York, 1968. p. 309. [§ 43.3.]
436. *Misner C.W.*, Minisuperspace в книге *Klauder J.*, ed., Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, Freeman, San Francisco, 1972. [§ 43.3.]
437. *Misner C.W.*, Phys. Rev., **8D**, 3271 (1973). [§ 43.3.]
438. *Kuchař K.*, Journ. Math. Phys., **11**, 3322 (1970). [§ 43.4.]
439. *Planck M.*, Sitzungsber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., 440, 1899. [§ 43.4, 44.6.]
440. *Tomonaga S.*, Progr. Theor. Phys., **1**, 27 (1946). [Упр. 43.5.]
441. *Einstein A.* введение к книге *Schilpp P.A.*, ed., Albert Einstein: Philosopher-Scientist, Evanston, Ill., 1949. [Эпиграф к гл. 44.]
442. *Tolman R.C.*, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **20**, 169 (1934). [§ 44.1.]
443. *Avez A.*, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, **250**, 3583 (1960). [§ 44.1.]
444. *Geroch R.P.*, Singularities in the Spacetime of General Relativity: Their Definition, Existence, and Local Characterization, doctoral dissertation, Princeton University (1967). [§ 44.1.]
445. *Bailey J.*, *Bartl W.*, *von Bochmann G.*, *Brown R.C.A.*, *Farley F.J.M.*, *Jostlein H.*, *Picasso E.*, *Williams R.W.*, Phys. Lett. **28B**, 287 (1968). [§ 44.2.]
446. *Farley F.J.M.*, Nuovo Cimento, **1**, Numero Speciale, 59 (1969). [§ 44.2.]
447. *Brodsky S.J.*, *Drell S.D.*, Ann. Rev. Nuclear Sci., **20**, 147 (1970). [§ 44.2.]
448. *Wigner E.P.*, Commun. Pure and Appl. Math., **13**, 1 (1960). [§ 44.2.]
449. *Clifford W.K.*, Lectures and Essays, *Stephen L.*, *Pollock F.*, eds., Macmillan, London, 1879. [§ 44.3.]
450. *Clifford W.K.*, Mathematical Papers, *R. Tucker*, ed., Macmillan, London, 1882. [§ 44.3.]
451. *Wheeler J.A.*, Superspace and the nature of quantum geometrodynamics в книге Battelle Rencontres, 1967, Lectures in Mathematics and Physics, eds. *DeWitt C.*, *Wheeler J.A.*, Benjamin, New York, 1968. [Доп. 44.3, фиг. 44.1.]
452. *Lichnerowicz A.*, Compt. Rend., Acad. Sci., Paris, **252**, 3742 (1961). [Доп. 44.3.]
453. *Lichnerowicz A.*, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, **253**, 940 (1961). [Доп. 44.3.]
454. *Lichnerowicz A.*, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, **253**, 983 (1961). [Доп. 44.3.]
455. *Milnor J.*, Enseignement Math., 8, 16 (1962). [Доп. 44.3.]
456. *Milnor J.*, Enseignement Math., **9**, 198 (1963). [Доп. 44.3.]
457. *Milnor J.*, Topology, **3**, 223 (1965). [Доп. 44.3.]
458. *Milnor J.* в книге Cairns S.S., ed., Differential and Combinatorial Topology, Princeton, N.J., 1965, p. 55 [Доп. 44.3.]
459. *Hsiang W.-C.*, *Sanderson B.J.*, Illinois Journ. Math., **9**, 651 (1965). [Доп. 44.3.]
460. *Anderson D.W.*, *Brown E.H.*, *Peterson F.P.*, Bull. Am. Math. Soc., **72**, 256 (1966). [Доп. 44.3.]
461. *Anderson D.W.*, *Brown E.H.*, *Peterson F.P.*, Ann. Math., **83**, 54 (1966). [Доп. 44.3.]
462. *Lichnerowicz A.*, Propagateurs, commutateurs, et anticommutateurs en

relativité générale, в книге Relativity, Groups and Topology, des. *DeWitt C., DeWitt B.S.*, Gordon and Breach, New York, 1964. [Доп. 44.3.]
463. Pauli W., Exclusion Principle and Quantum Mechanics; Нобелевская лекция 1945 г., Editions Grisson, Neuchatel Switzerland, 1947. [Доп. 44.3.]
464. *Misner C.W., Wheeler J.A.*, Ann. Phys. USA, 2, 525 (1957). [Фиг. 44.1.]
465. *Сахаров А.Д.*, ДАН СССР, **177**, 70 (1967). [§ 44.4.]
466. *Anderson C.D.*, Phys. Rev., **43**, 491 (1933). [§ 44.4.]
467. *Mann T.*, Freud. Goethe, Wagner, Knopf., New York, Essay, on Freud published originally as Freud und die Zukunft (Vortrag Gehalten in Wien am 8 Mai 1936 zur Feier von Sigmund Freuds 80 Geburtstag). Bormann-Fischer, Wien, 1937. [§ 44.5.]
468. *Werner F.G.*, remark to J.A. Wheeler on June 3 at the Cincinnati, Ohio, Relativity Conference in the Midwest, 1969. [§ 44.5.]
469. *Kilmister C.W.*, Gen. Relativity and Gravitation, 2, 35 (1971). [Фиг. 44.3.]
470. *Kneebone G.T.*, Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics: An Introductory Survey, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1963. [Доп. 44.5.]
471. *Shannon C.*, Trans. Am. Inst. Elect. Eng., **57**, 713 (1938). [§ 44.5.]
472. *Hohn F.E.*, Applied Boolean Algebra: An Elementary Introduction, 2d ed., Macmillan, New York, 1966. [§ 44.5.]
473. *Bernoulli D.*, Hydrodynamica, chapter 10 (1733), Archives of Academy of Science, Leningrad; summarized in C.C. Gillispie, ed., Dictionary of Scientific Biography, Scribners, New York, vol. 2, 1970. [Доп. 44.5.]
474. *Jauch J.*, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968. [Доп. 44.5.]
475. *Gödel K.*, Monatsh. Math. Phys., 38, 173 (1931). [Доп. 44.5.]
476. *Cohen P.*, Set Theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin, New York, 1966. [Доп. 44.5.]
477. *Kac M., Ulam S.*, Mathematics and Logic: Retrospect and Prospects, Praeger, New York, 1968; abridged edition by Pelican Books, Harmondsworth, Middlesex, 1971. [Доп. 44.5.]
478. *Leibniz G.W.*, La Monadologie, 1714; parts included in *P.P. Wiener*, ed., Leibniz Selections, Scribners, New York, 1951. [§ 44.6.]
479. *Eddington A.S.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **27**, 15 (1931). [§ 44.6.]
480. *Eddington A.S.*, Relativity Theory of Protons and Electrons, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng., 1936. [§ 44.6.]
481. *Eddington A.S.*, Fundamental Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng., 1946. [§ 44.6.]
482. *Carter B.*, preprint, Institute of Theoretical Astronomy, Cambridge, England, 1968. [§ 44.6.]
483. *Lecat M.*, Bibliographie de la relativite, Lamertine, Bruxelles, 1924.
484. *Boni N., Russ M., Laurence D.H.*, A Bibliographical Check List and Index to the Published Writings of Albert Einstein, Pageant Books, Paterson, New York, 1960.
485. *Chick H.J.*, Theory of Gravitation 1920—Present (Bibliography), Report LMS-2328 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1960.
486. *Chick H.J.*, Theory of Gravitation 1959-1963 (Bibliography), Report LMS-3099 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1964.
487. *Combridge J.T.*, Bibliography of Relativity and Gravitation Theory 1921—1937, Kings College, London, 1965.
488. Albert Einstein: Philosopher + Scientist, Library of Living Philosophers, ed. Schilpp P.A., Evanston, 1949.
489. *Söding P., Bartels J., Barbaro-Galtieri A., Enstrom J.E., Lasinski T.A., Rittenberg A., Rosenberg A.H., Trippe T.G., Barash-Schmidt N., Bricman C., Chaloupka V., Roos M.*, Physics Letters, **39B**, 13 (1972). [Форзац.]
490. *Allen C.W.*, Astrophysical Quantities, Athlone Press, London, 1963.

Дополнительная литература[1])

491. *Новиков И.Д.*, Сообщения ГАИШ, № 120, 342 (1962).
492. *Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.*, ЖЭТФ, **49**, 170 (1965).
493. *Новиков И.Д.*, ЖЭТФ, **57**, 949 (1969).
494. *Грищук Л.П., Сажин М.В.*, ЖЭТФ, **65**, 441 (1973).
495. *Брагинский В.Б., Грищук Л.П., Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Сажин М.В.*, ЖЭТФ, 65, 1729 (1973).
496. *Новиков И.Д.*, Препринт-215, ИКИ, М., 1975.
497. *Брагинский В.Б., Манукин А.Б.*, Измерение малых сил в физических экспериментах, изд-во «Наука», М., 1974.
498. *Concelman G., Shapiro I.* et al., Phys. Rev. Lett., **33**, 1621 (1974).
499. *Carr B.J., Hawking S.W.*, Montly Notices, **168**, 399 (174).
500. *Page D.N., Hawking S.W.*, Preprint OAP-430, 1975.
501. *Eardly D.M., Press W.H.*, Annual Rev. Astron. Astroph., **13**, 381 (1975).
502. *Зельдович Я.Б.*, Письма ЖЭТФ, **12**, 443 (1970).
503. *Press W.H.*, Preprint OAP-363, 1974.
504. *Robinson D.C.*, Phys. Rev. Lett., **34**, 905 (1975).
505. *Hawking S.W.*, Nature, **248**, 30 (1974).
506. *Фролов В.П.*, Усп. физ. наук, **118**, 473 (1976).
507. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.*, Строение и эволюция Вселенной, изд-во «Наука», М., 1975.
508. *Гинзбург В. Л.*, ДАН СССР, **156**, 43 (1964).
509. *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М.*, ЖЭТФ, 47, 1030 (1964).
510. *Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, **64**, 48 (1973).
511. *Фок В., Иваненко Д.*, Zs. Phys., **30**, 648 (1929).
512. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.*, Вестник Моск. Гос. Университета, 8, 103 (1947).
513. *Владимиров Ю. С.*, ЖЭТФ, **45**, 251 (1963).
514. *Кобзарев Н. Ю., Захаров В. И.*, Annals. Phys., **60**, 448 (1970).
515. *Воронов Н. А.*, ЖЭТФ, **64**, 1889 (1973).

---

[1]) Добавлена редакторами перевода.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация в экспериментах по отклонению света 350
Аккреция на черную дыру 94
«Активные» преобразования 397
Альтернирующий символ 410
Асимптотически плоского пространства-времени геометрия 129—134
Астрономические таблицы 341, 345

Барионы 313, 319
Бертотти — Робинсона электромагнитная вселенная 45
Бесконечность 129—134, 154
— конформно преобразующиеся координатные диаграммы 132—134
— конформные преобразования 132—134, 154
— области в асимптотически плоском пространстве-времени 129—132
Биркгофа теорема 42
— — для геометрии Рейснера — Нордстрема 44
— — — — Шварцшильда 42
Ближняя зона в теории излучения 227, 229—231
Бойера — Линдквиста координаты 83—87
Бриля — Хартля усреднение 195
Броуновские силы 276
Быстрого движения приближение 314

Вариационные принципы 197, 433, 450
— — в исчислении Редже 433
— — — коротковолновом приближении 197
— — для суперпространства 450
Вектор, связь со спинорами 408, 411
Взаимодействие полей с веществом 306
Вириальные теоремы в ньютоновской теории гравитации 324
Возмущений теория 187—198
— — общий формализм 190, 191, 193, 198
— — приложения 72, 93, 187—198
— — — коллапсирующая звезда 72
— — — коротковолновое приближение для гравитационных волн 187—198
Возмущений теория, устойчивость шварцшильдовской и керровской черных дыр 93
Волновая зона 227
Волны, действие которых подобно удару молотка 254
Воспроизводство Вселенной 481, 483—488
Вращающееся тело 370, 372, 374
— — закон переноса спина Ферми — Уолкера 370
— — прецессия спина 372
— — — Томаса 372, 403
— — — — увлечение систем отсчета 372
Вращения 391—395
— инфинитезимальные 397
— матрицы (см. Спиновые матрицы) 322
— оператор 322
— представление в виде двух отражений 393
— Родригеса формула 393
— сложение 391—395
Времени замедление 295
Второй закон динамики черных дыр 146
— — обратимые и необратимые превращения 98, 120—124
— — ограничения на гравитационное излучение при соударениях черных дыр 95
— момент распределения масс 203

Гамильтона — Якоби теория 11, 350, 365, 459
— — — для гармонического осциллятора 459
— — — — геометродинамики в суперпространстве 443—455
— — — — пробной частицы в поле Керра — Ньюмана 111, 112
— — — — свободной частицы 459
— — — — электродинамики 460
Геодезических отклонение в детекторах гравитационных волн 170—177, 243
Геодезическое движение 297—302, 374, 375, 387, 388
— — экспериментальные проверки 297—302
Геометрическая оптика на языке спиноров 424

Геометрические объекты, спинорное представление 412
Геометродинамика 446
Геон 95
Гидродинамика 323—326, 335, 336
— ньютоновская 323—326
— постньютоновская (см. Параметризованный постньютоновский формализм) 336
Гиромагнитное отношение для черной дыры Керра — Ньюмана 91, 101
Гироскопов прецессия 370—375
Главные нулевые конгруэнции тензора Вейля 113
— — — в геометрии Керра — Ньюмана 112—115
Глобальные методы исследования пространства-времени 128, 129, 140—145
— — основные ссылки 128, 129
— — примеры (см. Бесконечность, Причинная структура пространства-времени, Сингулярности в геометрии пространства-времени) 140—145
Гомологические пульсации звезды 326
Горизонта генераторы 115, 139, 143—145, 147
Горизонты глобальная структура 139—145
— для геометрии Керра — Ньюмана 87
— и гравитационный коллапс 66, 67, 76, 139
— каустики 139
— определение 135, 136
— площадь 98, 124
— угловая скорость 124
— черных дыр 87, 98, 135, 136, 139, 143—147
Горловины 35, 41, 468, 471
— в геометрии Рейснера — Нордстрема 134
— — — Шварцшильда 35, 41
— и электрический заряд 468
— на квантовом уровне 468, 471
Гравитации теории 310—312, 315, 316, 330, 343
— — Бергмана скалярно-тензорные 290
— — консервативное 343
— — метрические (см. Метрические теории гравитации) 311
— теория Биркгофа 310
— — Дикке — Бранса — Йордана 289, 312, 315, 316, 343, 346, 376, 383, 386
— — Картана 290, 311
— — Колемана 364
— — критерии жизнеспособности 310, 311
— — Кустаанхеймо 310
— — Ни 312, 316, 330, 347, 377, 386
— — Нордстрема 290
— — Папапетроу 379
— — с первичной геометрией 312, 316, 317
— — с предпочтительной системой отсчета 330, 343, 347, 377—380
— — Уайтхеда 290, 311, 313, 379
Гравитационная постоянная (см. Кавендиша гравитационная постоянная) 375, 378
Гравитационной линзы эффект 96
Гравитационные волны 161—163, 171, 177—185, 200, 231, 235—237
— — генерация источниками сильного поля 209—212
— — — — — — — вращение деформированной релятивистской звезды 212
— — — — — — — колебания релятивистской звезды 211, 212
— — — — — — — частица, падающая в черную дыру 209, 210
— — — медленными движениями 200—207, 214, 215, 219—221, 224—234, 269, 273
Гравитационные волны, источники 94, 95, 207—217, 279, 280, 283
— — коротковолновый формализм 187—193, 195—198
— — линеаризованная теория 163—177, 262, 263
— — — — — геодезических отклонение 170—177, 243, 244
— — — — — лоренцева калибровка 162—164
— — — — плоские волны 164—165, 167
— — — — поляризация 172—177
— — — — поперечная бесследовая калибровка 165—170
— — — — Римана тензор 167
— — — — фурье-анализ 262, 263
— — нелинейное взаимодействие волн 179, 192
— — распространение в искривленном пространстве-времени 161—163, 179, 192—197
— — — — — — — — обратное рассеяние на кривизне 69—73, 179
— — — — — — — — рефракция на фоновой кривизне 179, 192, 197
— — реакция излучения 206, 208, 213, 216, 222, 231—233
— — точные решения 180—187
— — — — плоские волны 180—187
— — — — цилиндрическая волна 168
— — энергии-импульса тензор 177, 178, 187, 189, 194, 196—199
Гравитационный радиус (см. Горизонты черных дыр) 14—22
Гравитационных волн детекторы 233, 288, 244—254, 265, 274, 280
— — — возможные типы 244—254, 260, 280
— — — датчики смещений 279, 280
— — — методы анализа 236, 237, 241—244, 253, 257—267, 270—278, 281—283
— — — — детального равновесия 265—267
— — — — — динамический 238, 241—243
— — — — — резонансного детектора 274—278
— — — — — силовых линий диаграмма 243, 244
— — — — — шумовых детекторов 253, 274—278
— — — перспективы на будущее 283
— — — поперечные сечения 253—256, 262—264, 269—271, 276, 277
— — — шумовые детекторы 274—278
— — — — — выделение малого сигнала из шума 274—278
— — — — — пути повышения чувствительности 283
— — — — — чувствительность к волнам, воздействие которых подобно удару молотка 277
Гравитоны 197

Двойная звезда, генерация гравитационных волн 212, 216, 217, 224
— — черная дыра как компонент 96
Де-Витта уравнение 454
Действие (см. Динамическая длина пути) 450
Детального равновесия принцип 264, 267
Дикке — Бранса — Йордана теория гравитации 289, 312, 315, 316, 343, 346, 376, 383, 386
Дикке система анализа экспериментов 289, 294, 295
Динамическая длина пути (см. Вариационные принципы) 450
Добротность осциллятора 261

Замедление вращения черной дыры 95
Запаздывание радиолокационного сигнала в гравитационном поле Солнца 288, 355—361
Заряд, силовые линии, захваченные топологией пространства 467
Застывшая звезда (см. Черная дыра) 78
Затмения 353
Земля 246, 247, 367, 268, 270, 272
— вращение, увлечение инерциальных систем отсчета 372
— как детектор гравитационных волн 246, 247, 270
— общая прецессия 367, 368
— приливы как экспериментальный тест ОТО 378

Излучение гравитационное (см. Гравитационные волны) 200, 205, 261
Измерение, возможности, определяемые теорией 449
Изотропия и однородность Вселенной 157
Изотропные координаты 39, 346
Инертная масса 292
Интерференция 449—453
Интерферометрия, измерение отклонения радиоволн Солнцем 353—355

Кавендиша гравитационная постоянная 375, 376
— — — вариации, отклонение от геодезического движения 382—386
— — — зависимость от скорости относительно предпочтительной системы отсчета 377, 378
— — — — — химического состава гравитирующих тел 380
— эксперимент 376
Калибровочные преобразования и калибровочная инвариантность 191
Картера четвертый интеграл движения 110
Каустики горизонтов 139
Квадрупольный момент приведенный 201, 203, 220—224
— — — генерация гравитационных волн 201, 220—224
— — — как коэффициент при разложении ньютоновского потенциала 220
— — Солнца 366, 367
Квазары и экспериментальные проверки общей теории относительности 287, 304, 350, 352
Квантовая геометродинамика 152—154, 157, 158
Квантовые флуктуации 455—459, 475
Квантовый пропагатор 460
Кватернионы (см. Спиновые матрицы) 392
Керра геометрия 86
— диаграмма 89
— координаты 86
Керра — Ньюмана геометрия, Бойера — Линдквиста координаты 83—87
— — — векторный потенциал 108
— — — вектор собственного момента импульса 101
— — — гиромагнитное отношение 92, 101
— — — главные нулевые конгруэнции 112
— — — горизонт 87, 98, 115, 124
— — — движение пробных частиц 108—112, 125—127
— — — динамические свойства 91, 93—100, 116—123
— — — единственность в качестве внешнего поля черной дыры 66, 67, 82—84, 158
Керра — Ньюмана геометрия, история 83
— — — и электромагнитное поле 82—84, 86
— — — Киллинга векторы 87, 102
— — — — тензор 102
— — — локально невращающиеся наблюдатели 105, 106
— — — магнитный дипольный момент 92, 101
— — — максимальное аналитическое продолжение 90
— — — мультипольные моменты 92, 101
— — — параметры 86
— — — предел статичности 87, 103
— — — предельные случаи 86
— — — распространение волн 125, 126
— — — световые конусы 89, 106, 107
— — — стационарные наблюдения 102, 103
— — — тензор электромагнитного поля 84, 86
— — — увлечение инерциальных систем отсчета 101—107
— — — электромагнитное поле 84, 91, 101
— — — эргосфера 88
Керра — Шилда координаты 114
Коллапс гравитационный 13, 46—51, 56, 58—62, 66, 73, 78, 79, 90—92, 462
— — в одном и двух измерениях 76
— — на трех уровнях 468, 481—488
— — реальный 66, 90—92
— — — гравитационные волны 279
— — — малые отклонения от сферической симметрии 72—75
— — — на поздних стадиях звездной эволюции 66
— — — неизбежность для массивных звезд 13
— — — образование черной дыры Керра — Ньюмана 90, 91
— — сферической звезды 46—59, 61, 62, 73, 78, 79
Контролируемого неведения философия 225
Координатные системы 22—34, 49, 59, 83—86
— — Бойера — Линдквиста 83—88
— — изотропные для геометрии Шварцшильда 39
— — Керра 86
— — Керра — Шилда 114
— — Крускала — Шекереса 23, 27—33
— — Новикова 22
— — постньютоновского формализма 318, 328—334, 337—339, 345
— — сопутствующие 59
— — Эддингтона — Финкельштейна 24—29, 49
Космическая цензура 155
Космические аппараты для проверки ОТО 359, 364
Красное смещение 47, 49, 78, 307
— — в спектре Солнца 300, 301
— — гравитационных волн 179
— — из-за смещения «относительно эфира» 307
— — излучения коллапсирующей звезды 47, 49, 78
— — Наунда — Ребки — Спайдера эксперимент 297—299
— — проверка движения по геодезическим 296—300
— — — принципа эквивалентности 297
— — экспериментальные результаты 299
Кривизна пространства-времени, взаимодействие с моментами макроскопического объекта 374
— — формализм, конформный тензор Вейля 113, 413
— — — — — — — главные конгруэнции 113

Кривизна пространства-времени, формализм, Петрова — Пирани алгебраическая классификация 425
— — — Римана тензор в спинорном представлении 413
Кривизны тензоры в специальных системах отсчета 15, 55, 167
— — гравитационные волны линеаризованные 167
— — метрика Шварцшильда 15
— — мировая трубка поверхности коллапсирующей звезды 55
Крускала диаграммы 32, 35, 48, 56
Крускала — Шекереса координаты 24—38

Лазеры, измерение расстояний до Луны 288, 384
Ландау — Лифшица псевдотензор (см. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля) 226—230
Линеаризованная теория гравитации 163—177, 318—326, 336, 337
Ловушечная поверхность 150, 154
Локально невращающиеся наблюдатели 105, 106
Лоренца преобразования 334, 399—403, 420
Лоренцева система отсчета локальная, эксперименты по красному смещению 297—302
Лоренц-инвариантность, экспериментальные проверки 295
Луна 288
— измерение расстояния с помощью лазеров 288, 384
— орбита, проверки ОТО 288, 369—371, 382—388
— расстояние между Землей и Луной как детектор гравитационных волн 246, 253
Лэмба — Резерфорда сдвиг 455

Максвелла уравнения 467
Максимальное аналитическое продолжение геометрии 90
Масса 61, 292, 375
— активная и пассивная (см. Кавендиша гравитационная постоянная) 375
— инертная и гравитационная (см. Универсальность свободного падения) 292
Масса-энергия, вклад гравитационного поля 177, 187, 194
Меркурий (см. Перигелия смещение) 361—368
Мессбауэра эффект 297—299
Метрические теории гравитации 311
— — ППН-формализм как приближение 313
— — эксперименты 288—308
Мультипольное разложение ньютоновского потенциала 220
Мультипольные моменты черной дыры Керра — Ньюмана 92, 101

Недостающие углы 428
Нейтрино 50, 51, 424
Нейтронные звезды как источник гравитационных волн 209—212, 283
Неприводимая масса черной дыры 98, 123
Новикова координаты 22
Нордведта эффект 383—386
Нулевые эксперименты 291, 306, 307
Ньюмана — Пенроуза константы 71
Ньютона теория гравитации 323, 324, 334, 335, 345
— — — вириальные теоремы 334, 335
Ньютона теория гравитации как приближение к метрическим теориям гравитации 323, 345
— — — тензор натяжений ньютоновского гравитационного поля 324

Обратимые и необратимые превращения 98
Обратное рассеяние волн на кривизне 69, 73, 179
Оппенгеймера — Снайдера модель коллапсирующей звезды 52—58
Отклонение света в гравитационном поле 288, 313, 348, 350, 353—356
— частиц в центральном гравитационном поле 348

Параметризованный постньютоновский формализм (ППН-формализм) 289, 290, 313, 317, 318, 341, 342
— — — гравитационные потенциалы 327, 332
— — — история 289, 290, 315
— — — качественное описание 289, 290, 312, 317, 318
— — — координаты 318, 329—334, 337, 339, 345
— — — метрические коэффициенты 321, 326, 331, 349
— — — нелинейная суперпозиция гравитационных полей 345
— — — обозначения 315, 341, 342
— — — описание вещества 319, 333, 334
— — — параметры 313, 317, 318, 326
— — — — экспериментальные ограничения 352, 355, 359, 363, 364, 368, 379, 380
— — — приложения, гравитационное поле Земли 373
— — — — — — Солнца 345, 346, 366
— — — — Кавендиша гравитационная постоянная 381
— — — — прецессия гироскопа 370—373
— — — — распространение света и радиоволн 348—361
— — — — расчет полной массы-энергии тела 339, 340, 347, 381
— — — — смещение перигелия 361—368
— — — — уравнения движения вращающегося тела 374, 375
— — — — — — многих тел (ЭИГ-уравнения) 339—341
— — — — эффекты трех тел на лунной орбите 369
— — — скорость системы координат относительно предпочтительной системы отсчета 330, 347, 364
— — — тождества, связывающие потенциалы 328, 336, 337
— — — точность и область применимости 314, 320, 321
— — — уравнения движения вещества 335, 336
Паунда — Ребки — Снайдера эксперимент 297
Первичная геометрия 312, 316
Первый закон термодинамики 61, 335
Пересечение оболочек 62
Перигелия смещение 361—368
Петрова — Пирани классификация 113
Планет орбиты, отклонения от геодезического движения 363, 382—388
— — периодические релятивистские эффекты 360, 363
Планковская длина 444, 458

Плоские гравитационные волны, линеаризованная теория 163, 167, 235
— — — точные решения 180—187
— электромагнитные волны в искривленном пространстве-времени 184, 185
Поверхность последнего влияния 80
Погружения диаграммы 35, 37, 57, 58
Поляризация гравитационной волны 172—175, 177, 196
— — — диаграмма силовых линий 243, 244
— — — круговая 174
— — — параллельный перенос в приближении геометрической оптики 196
— — — плоская (линейная) 172, 173
— — — эллиптическая, 177
— нейтрино 176
— полей излучения с произвольным спином 178
Поперечная бесследовая калибровка 165—170, 193
Постньютоновское приближение 313, 315, 337, 339—341
Постоянные фундаментальные 303—306
Постпостньютоновское приближение 313, 322
Прайса теорема 67—75
Предгеометрия как исчисление высказываний 474, 477—481
Предпочтительная система отсчета 330, 343, 364, 347, 377
Преобразования спиноров 397
Приливные силы 17, 63
Прицельный параметр для фотона в ППН-формализме 350
Причинная структура искривленного пространства-времени 135
— — — — будущего горизонты 136—139
— — — — глобальная структура горизонтов 139—145
Пробное тело 290
Проекции оператор для поперечной бесследовой компоненты тензора 169
Пространства-времени геометрия 44, 447, 448
— — как классический лист, пересекающий суперпространство 447, 448
— — — классическое приближение 444
Пространственная теория вещества 469—474
Пространственноподобное сечение как динамический объект в суперпространстве 444
Пространство 444, 472, 473
— как динамический объект 444
Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля 197, 226—230

Радиационно-доминированный детектор 254
Расширенный гамильтониан 108
Реакция излучения 22
Редже исчисление 426—428
— — блок-схема 431, 432
— — вариационный принцип 433, 434
— — выбор длин ребер 439—441
— — — структуры решетки 434—438
— — дополнительные вершины 438
— — континуальный предел 433
— — начальные данные 433
— — приложения и перспективы 441, 442
— — симплексы и недостающие углы 427—431
— — скелетная геометрия 433
— — узлы 433
Рейснера — Нордстрема геометрия 39, 40, 44, 45
— — — глобальная структура 133—135
Рейснера — Нордстрема геометрия как предельный случай геометрии Керра — Ньюмана 86
— — — метрика 39, 40
Рентгеновские лучи, испускаемые газом вокруг черной дыры 94

Сверхновая как источник гравитационных волн 209, 215, 279, 280, 283
Связность пространства-времени (см. Топология пространства-времени) 467, 471—474
Сигналы, выделение из шума 274—276
Симплекс 428
Сингулярности в геометрии пространства-времени 36, 149, 150, 152, 462
— — — Шварцшильда 36, 38, 46, 63
— координатные 18
— космическая цензура и голые сингулярности 155
— структура 150, 152
— теоремы о возникновении 149, 154, 156, 157
Скалярное поле в геометрии Шварцшильда 67—70
Скелетная геометрия 433
Скопление галактик Дева как источник гравитационных волн 279, 280
Скопления звезд, релятивистский коллапс 92
Слабый принцип эквивалентности (см. Универсальность свободного падения) 290
Собственная система отсчета и исследование детекторов гравитационных волн 236—244
Событие как классическое понятие 447, 448
Солнечная система, релятивистские эффекты 288, 312, 386
Солнце 294, 320, 345, 346
— гравитационное поле в ППН-формализме 345, 346
— квадрупольный момент 294, 365, 367
— красное смещение 300
— скорость относительно Галактики и Вселенной (см. Экспериментальные проверки ОТО) 364
Сохранения законы в ППН-формализме 335, 336
— — для пробных частиц в поле Керра — Ньюмана 109
— — применение к коллапсирующим звездам 61
Спектральный поток 261
Спиновые матрицы 392—399
— — присоединенные 410, 411
Спиноры 406, 408—410, 414
— базисные 414, 415
— в искривленном пространстве-времени 423
— отношение ориентация — запутанность 405
— связь с векторами 408
Статичности предел 87, 103
Стационарные координаты 187
Стационарный поток волн 254
Суперпространство 443—447, 449, 454

Твисторы 156
Тензоры второго ранга, разложение 166, 167
— спинорное представление 411—414
Томаса прецессия 372, 403—405
Топология пространства-времени 34—36
Тригеометрия 448

Увлечение инерциальных систем отсчета 87, 102—107, 370—375
— — — — — в геометрии Керра — Ньюмана 87, 102—107
— — — — — ППН-формализме 370—375
— — — — перспективы измерения 373, 374
Угловая скорость в спинорном анализе 396, 399
— — орбитального движения в геометрии Керра — Ньюмана 102
— — черной дыры 101
Универсальность свободного падения 290—295
— — — экспериментальные проверки (см. Этвеша — Дикке эксперимент) 291—295
Уравнения движения 339—341, 374, 375, 387, 388

Ферма принцип 356, 359
Ферми — Уолкера перенос 371
Фокусировка лучей 424, 425

Хвосты волновые 69, 70, 72, 73, 179
Хьюза — Древера эксперимент 306

Черная дыра 78—81, 85, 92—97, 148
— — астрофизические аспекты 92—97
— — взаимодействие с веществом 94, 95, 115—124
— — «волосы» 67, 84, 85
— — геометрия Керра — Ньюмана как однозначное решение для внешнего поля 67, 82—84
— — гравитационные волны 95, 96, 138, 157
— — механизмы образования 92, 93
Черных дыр динамика (см. Второй закон динамики черных дыр) 97, 98

Шварцшильда геометрия 18
— — движение пробных частиц 14—22, 32
— — как предельный случай геометрии Керра — Ньюмана 86
— — приложения к коллапсирующей звезде 46—50, 52—55
— — распространение волн 67—70, 75, 93
— — сингулярность 33, 37, 63—66
— — структура и эволюция 35—39, 132
— — теорема Биркгофа 42—44
— — энергия связи на последней устойчивой круговой орбите 95, 127
Шварцшильдовская поверхность 14—22
Шварцшильдовский радиус 14—22

Эддингтона — Финкельштейна диаграммы 25, 26, 49, 73, 80
Эйлера связь между числами вершин, ребер и граней 436
— уравнение гидродинамики 60, 61, 335, 336
Эйнштейна коэффициенты 266
— Инфельда — Гофмана (ЭИГ) уравнения движения 339—341
— Розена мост 35
Эйнштейновские уравнения поля 225, 226, 465, 466
Эквивалентности принцип 290, 302
— — роль в метрических теориях 303
— — тесты 295—306
Экспериментальные проверки ОТО 303, 304, 310, 387, 388
— — — вариации гравитационной постоянной 375, 376
— — — гироскопа прецессия 370—375
— — — запаздывание радиолокационного сигнала 288, 355—361
— — — земные приливы и вариации скорости вращения 377—379
— — — квазары 228, 308, 350, 352—355
— — — красное смещение 297—300, 307
— — — Крюцера эксперимент 380
— — — лунная орбита 288, 369, 370, 373, 383—386
— — — Нордведта эффект 383—386
— — — нулевые эксперименты 290, 307
— — — отклонение электромагнитных волн Солнцем 288, 313, 350—355
— — — постоянство фундаментальных постоянных 303—306
— — — перигелия смещение 361—368
— — — эксперимент Тернера — Хилла 307, 308
— — — — Хьюза — Древера 307
— — — — Этвеша — Дикке 290—295
— — — эффекты, связанные с предпочтительной системой отсчета 347, 364
— — специальной теории относительности 295, 296
— — — — — в физике элементарных частиц 295, 302
Энергия на бесконечности в геометрии Керра — Ньюмана 108, 126, 127
— связи на орбитах вокруг черных дыр 95, 127
Энергия-импульс гравитационного поля 177, 187—189, 193, 194
Эргосфера 88
Этвеша — Дикке эксперимент 290—295, 303—306, 383—386
Эфир 292, 307
Эффективные потенциалы для волн в геометрии Керра 125
— — — — — — Шварцшильда 68
— — — заряженной пробной частицы в экваториальной плоскости геометрии Керра — Ньюмана 126, 127

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим посылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

ИБ № 912

Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер

ГРАВИТАЦИЯ

Том 3

Редактор Н. Телешин
Художник В. Медников
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Е. Потапенкова
Корректор Т. Пашковская

Сдано в набор 22/XII 1976 г.
Подписано к печати 23/VI 1977 г.
Бум. тип. № 1 $70 \times 90^{1}/_{16} = 16$ бум. л. 37,44 усл. печ. л.,
Уч.-изд. л. 33,66 Изд. № 2/9002
Цена 4 р. 40 к. Зак. № 018

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская
типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.